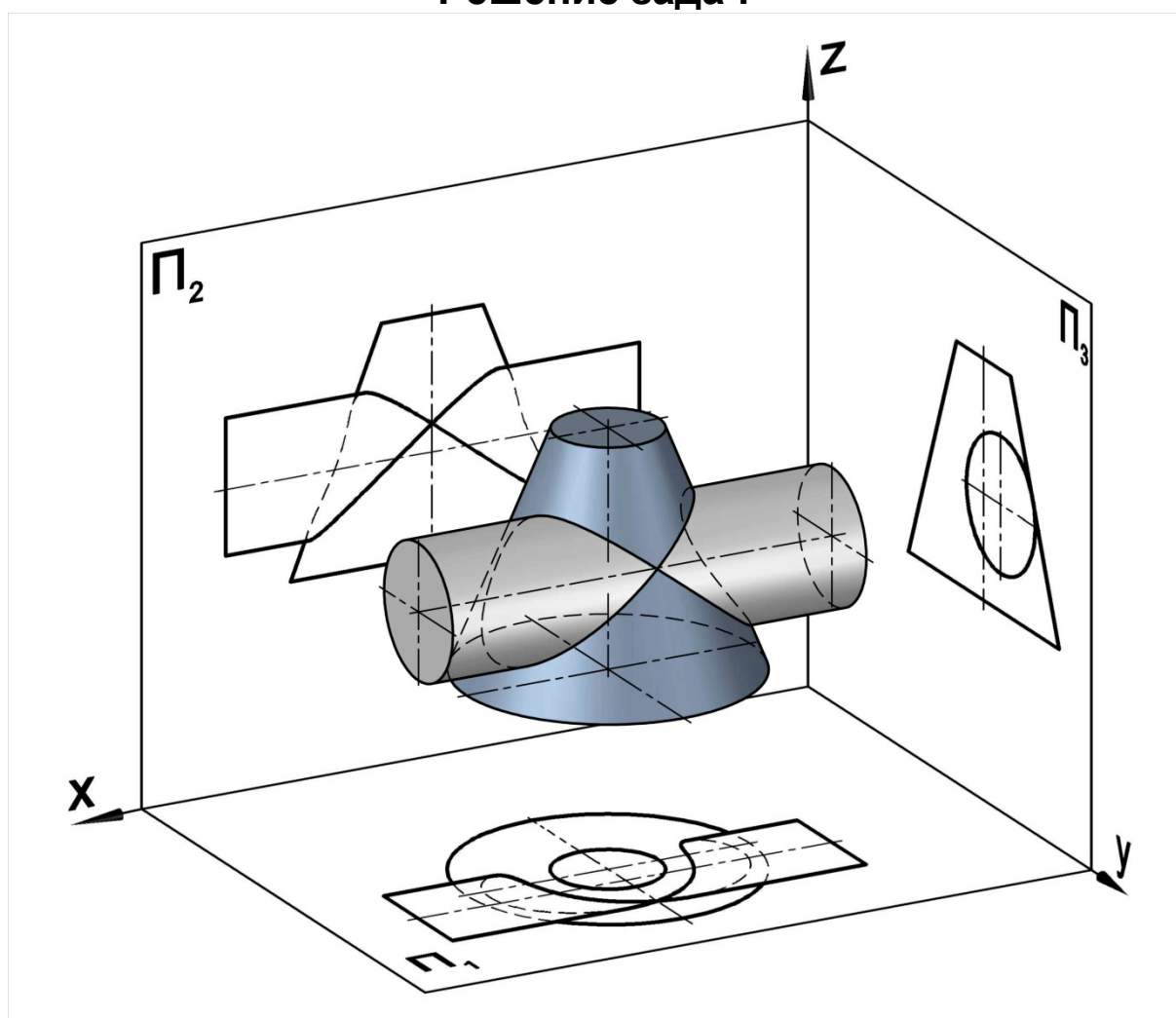


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, Е.А. Усманова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Решение задач



Челябинск
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра графики

514.18(07)
К687

В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, Е.А. Усманова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Решение задач

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2016

УДК 514.18(075.8)
К 687

*Одобрено
учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета*

Рецензенты:

заведующий кафедрой “Сопротивление материалов” Челябинской государственной агроинженерной академии, доктор техн. наук А.Г. Игнатьев,
доцент кафедры “Сопротивление материалов” Челябинской государственной агроинженерной академии, кандидат техн. наук А.А. Зарезин.

Короткий, В. А.

К687 Начертательная геометрия: решение задач / В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, Е.А. Усманова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 139 с.

Учебное пособие содержит примеры решения задач по основным разделам начертательной геометрии. Решение задач выполняется на двух или трёхпроекционных чертежах.

Учебное пособие составлено для студентов, обучающихся по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки «Инженерное дело, технологии и технические науки».

УДК 514.18(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
Тема 1. Комплексный чертеж точки. Относительное положение точек	6
1.1. Осный чертеж точки.....	6
1.2. Безосный чертеж точки. Относительное положение точек.....	9
1.3. Конкурирующие точки.....	11
Тема 2. Комплексный чертеж прямой линии.....	12
2.1. Чертеж прямой общего положения.....	12
2.2. Определение длины отрезка прямой общего положения.....	13
2.3. Построение отрезка заданной длины.....	14
2.4. Чертежи прямых частного положения.....	15
2.5. Принадлежность точки к прямой линии.....	18
2.6. Принадлежность точки к прямой линии.....	20
Тема 3. Комплексный чертеж плоскости.....	21
3.1. Чертеж плоскости общего положения. Взаимопринадлежность прямой, точки и плоскости.....	21
3.2. Главные линии плоскости. Взаимная параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей.....	25
3.3. Чертежи плоскостей частного положения.....	26
Тема 4. Взаимное пересечение прямых и плоскостей.....	29
4.1. Вспомогательная задача.....	29
4.2. Первая позиционная задача.....	30
4.3. Вторая позиционная задача.....	31
Тема 5. Способ замены плоскостей проекций.....	35
Тема 6. Точки и линии, принадлежащие поверхности.....	44
6.1. Многогранники.....	44
6.2. Поверхности вращения (конус, цилиндр, тор, сфера).....	46
6.3. Линейчатые поверхности.....	50
Тема 7. Пересечение поверхности проецирующими плоскостями.....	54
7.1. Пересечение многогранника проецирующими плоскостями.....	54
7.2. Пересечение прямого кругового конуса проецирующими плоскостями...	57
7.3. Пересечение сферы проецирующими плоскостями.....	63
7.4. Пересечение кругового цилиндра проецирующими плоскостями.....	65

Тема 8. Пересечение линии с поверхностью.....	69
8.1. Пересечение прямой линии с поверхностью.....	69
8.2. Пересечение кривой линии с поверхностью.....	74
Тема 9. Пересечение поверхностей. Способ вспомогательных плоскостей.....	75
9.1. Пересечение многогранников.....	75
9.2. Пересечение гранных и кривых поверхностей.....	81
9.3. Пересечение кривых поверхностей.....	91
Тема 10. Пересечение поверхностей. Способ вспомогательных сфер.....	97
10.1. Способ концентрических сфер.....	97
10.2. Способ эксцентрических сфер.....	99
Тема 11. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка.....	105
11.1. Задачи на применение теоремы 1.....	105
11.2. Задачи на применение теоремы 2.....	106
11.3. Задачи на применение теоремы 3 (теоремы Монжа).....	107
Тема 12. Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости.....	110
Тема 13. Комплексные (комбинированные) задачи.....	117
Тема 14. Развертки поверхностей.....	125
Тема 15. Тени в ортогональных проекциях.....	130
Библиографический список.....	139

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия – раздел математики, изучающий *теорию методов отображения пространств различных структур и размерностей друг на друга*. В начертательной геометрии как учебной дисциплине рассматриваются *теоретические основы методов отображения трехмерного пространства на плоскость*.

Все многообразие плоских и пространственных геометрических фигур и отношения между ними составляют предмет начертательной геометрии. Различают позиционные (принадлежность, пересечение, параллельность) и метрические (расстояние, угол) отношения между фигурами. В соответствии с этой классификацией рассматриваются разнообразные геометрические задачи, которые условно разделяют на позиционные, метрические и комплексные (комбинированные).

Позиционными называют задачи, в которых требуется определить взаимное положение (принадлежность, параллельность, пересечение) двух или более фигур, заданных на чертеже. Например, если на чертеже заданы две пересекающиеся поверхности, то находят проекции линии пересечения этих поверхностей.

Метрическими называют задачи, в которых требуется определить либо размеры данной фигуры (линейные и угловые), либо метрические свойства, обусловленные взаимным положением двух и более фигур (углы между прямыми и плоскостями, расстояние между фигурами и т.д.).

Комплексными (комбинированными) называют геометрические задачи, в которых содержатся как позиционные, так и метрические условия.

Таким образом, в курсе начертательной геометрии изучают как теоретические основы построения двумерных изображений трехмерных фигур, так и способы графического решения пространственных задач при помощи этих изображений.

Компьютерная графика, позволяющая выполнять точные геометрические построения не только на плоскости, но и в виртуальном трехмерном пространстве, также может быть использована для решения учебных задач начертательной геометрии. Геометрические построения на проекционном чертеже или в условно трехмерном пространстве, виртуально существующем на экране компьютера, развивают пространственные представления, логическое мышление учащегося, заставляют анализировать исходные данные, проводить исследование полученного решения.

Но при этом следует учитывать, что решение многих задач на компьютере выполняется “автоматически”. Например, для определения истинных размеров фигуры достаточно указать ее на экране компьютера и нажать кнопку “свойства”. Для построения линии пересечения данных фигур следует вызвать команду “объединение фигур”. При этом линия пересечения будет построена совершенно точно, без каких-либо усилий со стороны учащегося. В подобных случаях компьютер дает ответ, но не помогает понять алгоритм решения поставленной задачи [1, лекция 14].

Поэтому для успешного овладения методами геометрических построений рекомендуется решать задачи самостоятельно, прибегая к компьютерному геометрическому моделированию либо для проверки найденного решения, либо в том случае, когда учащийся испытывает затруднения в связи с недостатком пространственного воображения.

Предлагаемое учебное пособие содержит подробные пояснения к решению 166 задач, сгруппированных в 15 тематических разделов. Содержание разделов соответствует содержанию конспекта лекций [1], поэтому при решении задач рекомендуется одновременно использовать как предлагаемое учебное пособие, так и конспект лекций [1].

Тема 1

КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК

Определение. Точкой называют абстрактную, физически не реализуемую геометрическую фигуру, размер которой в любом направлении равен нулю. Точка не имеет ни длины, ни ширины, ни высоты. Точка – “нульмерный” геометрический объект. Положение точки A в пространстве полностью определяется тремя декартовыми координатами x_A, y_A, z_A (рис. 1.1).

1.1. Осный чертеж точки

Точка – нульмерная, реально не существующая фигура. Для придания ей наглядности будем считать, что точка A – вершина прямого кругового конуса (рис. 1.2). Сформируем комплексный трёхпроекционный чертеж конуса, ортогонально проецируя его на три плоскости проекций Π_1, Π_2, Π_3 . Каждую проекцию можно условно считать “фотографией” конуса.

Горизонтальная проекция конуса – это вид сверху. На такой “фотографии” мы увидим не только изображение конуса в виде окружности, но и изображение осей координат x и y . Изображение оси z на плоскости Π_1 вырождается в точку (рис. 1.3).

Фронтальная проекция конуса (“фотография” спереди, или вид спереди) – равнобедренный треугольник. На фотографии мы увидим не только изображение конуса в виде треугольника, но и оси координат x, z . Изображение оси y на плоскости Π_2 вырождается в точку, поскольку ось y “смотрит в объектив”.

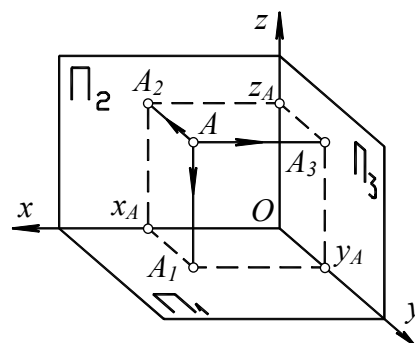


Рис. 1.1

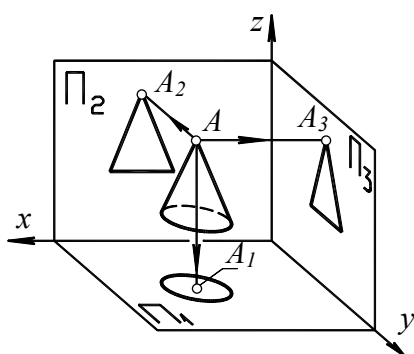


Рис. 1.2

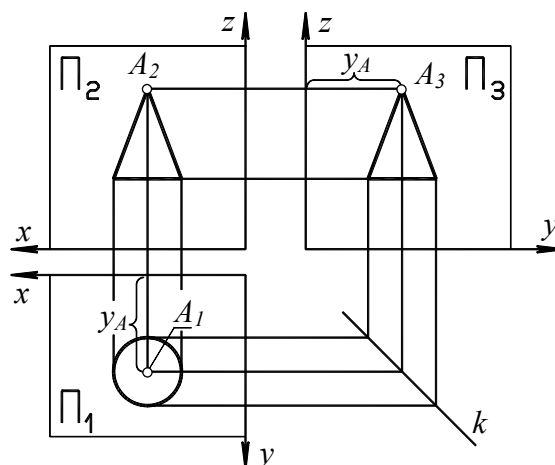


Рис. 1.3

На профильной проекции конуса (вид слева) получаем изображение конуса (треугольник) и изображение осей координат z, y . Ось x на виде слева “смотрит в объектив”, поэтому изображение оси x на плоскости Π_1 вырождается в точку.

Условия связи между проекциями на комплексном чертеже. Чтобы составить чертеж конуса, надо полученные проекции (“фотографии”) разместить на листе чертежа в строго установленном порядке, показанном на рис. 1.3. Горизонтальная и фронтальная проекции конуса должны быть связаны вертикальными линиями связи, фронтальная и профильная проекции – горизонтальными линиями связи, горизонтальная и

профильная – ломаными линиями связи, терпящими излом на *постоянной прямой чертежа* k , расположенной под углом 45° к проекциям осей координат. Прямую k также называют *линией преломления* [1, п. 2.1].

Таким образом, на рис. 1.3 показан трехпроекционный чертеж, состоящий из трех взаимосвязанных ортогональных проекций (“фотографий”) одной и той же геометрической фигуры – прямого кругового конуса с вершиной в точке A . На каждой проекции одна из осей координат “смотрит в объектив”, поэтому на каждой проекции мы видим изображение только двух осей координат. Такой чертеж называют *осным* чертежом, поскольку на нем имеется изображение осей координат.

Расстояние между проекциями никак не связано с формой и размерами изображаемой фигуры, поэтому может быть выбрано совершенно произвольно. Возьмем это расстояние равным нулю и удалим изображение конуса, оставив только изображение его вершины – точки A . В результате вместо чертежа конуса, показанного на рис. 1.3, получаем комплексный трехпроекционный чертеж точки A (рис. 1.4).

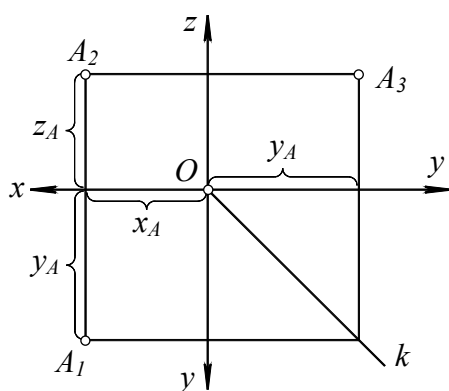


Рис. 1.4

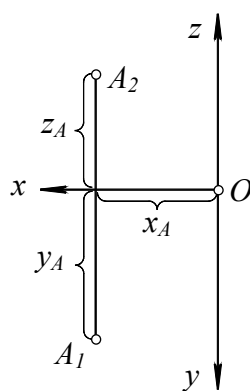


Рис. 1.5

Для определения положения точки относительно заданной системы координат достаточно указать не три, а только две проекции точки. Действительно, на двухпроекционном чертеже (рис. 1.5) имеются все три координаты x_A , y_A , z_A точки A . Если даны две проекции точки, то всегда можно построить ее третью проекцию, используя условия связи между проекциями точки на комплексном чертеже [1, п. 2.1].

Задача 1.1

Построить комплексный трехпроекционный чертеж точки $A(16,20,15)$.

Решение. Цифры в скобках обозначают координаты x_A , y_A , z_A точки A , указанные в миллиметрах. Откладываем вдоль оси x расстояние $x_A=16$ мм и проводим вертикальную линию связи (рис. 1.6). Откладываем на ней координаты $z_A=15$ мм и $y_A=20$ мм. Горизонтальная A_1 и фронтальная A_2 проекции точки A найдены.

Для построения профильной проекции точки A проводим горизонтальную и ломаную линии связи, на пересечении которых отмечаем искомую проекцию A_3 . Линии связи, проведенные на рис. 1.6 для построения профильной проекции точки A , отмечены стрелками. Линия преломления k наклонена к осям координат

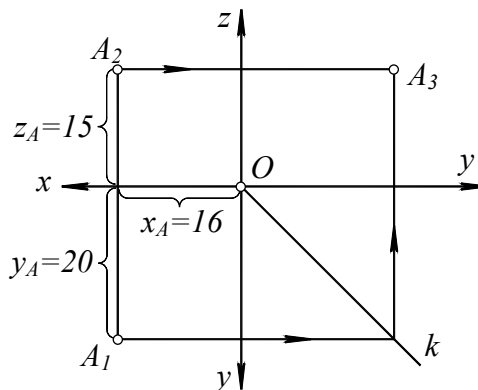


Рис. 1.6

строго под углом 45 градусов, что обеспечивает точный перенос координаты $y_A=20$ мм на профильную проекцию чертежа.

Задача 1.2

Построить трехпроекционный чертеж треугольника ABC по заданным координатам его вершин $A(26,10,12)$, $B(10,15,0)$, $C(5,0,15)$.

Решение. Чтобы от координатного (аналитического) способа задания фигуры перейти к чертежу, надо предварительно на свободном месте тетрадной страницы или на

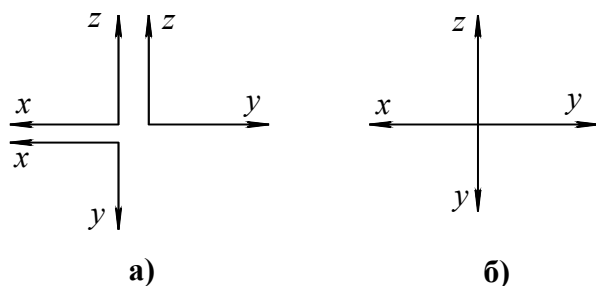


Рис. 1.7

листе чертежной бумаги начертить проекции осей координат (рис. 1.7). На фронтальной плоскости проекций Π_2 вычерчиваем изображения осей x и z , на горизонтальной плоскости проекций Π_1 – изображения осей x и y , а на профильной плоскости проекций Π_3 – изображения осей z и y . Расстояние между проекциями может быть выбрано произвольно (как показано на рис. 1.7, а).

Чтобы сделать чертеж более “компакт-

ным”, можно принять это расстояние равным нулю, как это сделано на рис. 1.7, б. Оба варианта разметки координатных осей, показанные на рис. 1.7, вполне равноправны.

Пусть выбрана разметка осей, показанная на рис. 1.7, б. Для построения проекций вершины A откладываем по оси x расстояние $x_A=26$ мм и проводим вертикальную линию связи, вдоль которой отмечаем координаты $y_A=10$ мм и $z_A=12$ мм (рис. 1.8). Проекция A_2 и A_1 построены. Чтобы найти профильную проекцию A_3 точки A , используем линию преломления и условия связи между проекциями точки. Проекция вершин B и C треугольника определяются аналогично.

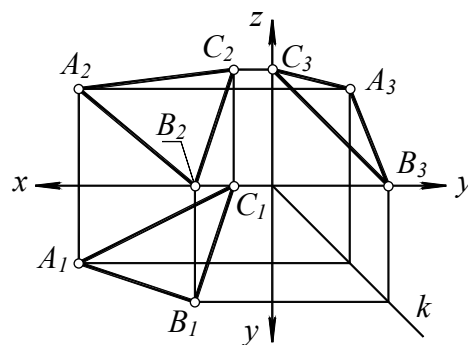


Рис. 1.8

Задача 1.3

На чертеже (рис. 1.9) указаны проекции координатных осей. Построить двухпроекционный чертеж точек $A(30,5,5)$ и $B(5,15,18)$. Отметить на чертеже и записать числовые значения разностей координат $\delta x=x_A-x_B$, $\delta y=y_A-y_B$, $\delta z=z_A-z_B$ этих точек.

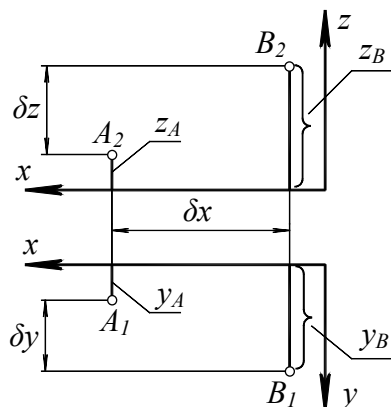


Рис. 1.9

Решение. В данном случае расстояние между проекциями выбрано произвольным образом, что не затрудняет решение задачи. Для построения проекций точки A откладываем по оси x расстояние $x_A=30$ мм и проводим вертикальную линию связи, вдоль которой откладываем координаты $y_A=5$ мм и $z_A=5$ мм, пренебрегая произвольно выбранным расстоянием между полями проекций Π_2 и Π_1 (рис. 1.9). Проекция точки B отмечается аналогично.

Разность координат точек A и B вдоль координатной оси x , согласно условию задачи, равна $\delta x=x_A-x_B=30-5=25$. На чертеже (см. рис. 1.9) эта разность координат определена графически – как расстояние вдоль координатной оси x между проекциями точек A

и B . Точно так же определяются и отмечаются на чертеже разности координат δy и δz по координатным осям y, z .

1.2. Безосный чертеж точки. Относительное положение точек

Если на чертеже, показанном на рис. 1.9, стереть изображения координатных осей, то получим *безосный* чертеж (рис. 1.10). При этом утрачиваются абсолютные числовые значения координат точек A и B , но сохраняется возможность определения их относительного положения.

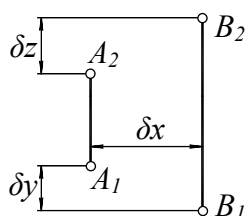


Рис. 1.10

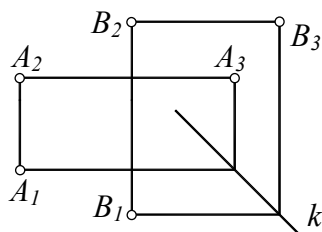


Рис. 1.11

Например, точка B выше точки A на величину δz . Иначе говоря, точка B дальше от плоскости проекций Π_1 , чем точка A , на расстояние δz . Разность координат δz можно непосредственно измерить на чертеже даже при отсутствии координатных осей.

Если рассматривать положение точек по отношению к фронтальной плоскости проекций Π_2 , нетрудно опреде-

лить, что точка B дальше от плоскости Π_2 , чем точка A , на расстояние δy .

Рассматривая положение точек A и B относительно профильной плоскости проекций Π_3 , замечаем, что точка A находится дальше от Π_3 , чем точка B , на расстояние δx .

Пусть на безосном чертеже, показанном на рис. 1.10, требуется построить профильные проекции точек A и B . Профильная проекция одной из точек, например, проекция A_3 точки A , может быть указана произвольно (на горизонтальной линии связи, идущей из A_2), так как расстояние между проекциями A_2 и A_3 точки A не имеет значения. Три проекции точки A полностью определяют положение линии преломления k (постоянной прямой чертежа). Проекция B_3 точки B указывается не произвольно, а с учетом условия связи: ломаная линия связи, соединяющая проекции B_1 и B_3 , должна преломляться на постоянной прямой чертежа (рис. 1.11).

Задача 1.4

Построить профильную проекцию параллелограмма $ABCD$, фронтальная и горизонтальная проекции которого заданы (рис. 1.12).

Решение. Произвольно указываем профильную проекцию какой-либо вершины параллелограмма, например, проекцию B_3 точки B . Три проекции точки B полностью определяют положение постоянной прямой k . Профильные проекции любой точки определяются с учетом условий связи между проекциями на комплексном чертеже. Например, проекция C_3 точки C отмечается на пересечении горизонтальной линии связи, соединяющей C_2 и C_3 , и ломаной линии связи, соединяющей C_1 и C_3 . Точка излома ломаной линии связи располагается на постоянной прямой чертежа k (см. рис. 1.12). Для построения профильной проекции параллелограмма достаточно построить профильные проекции только трех его вершин, например, вершин B, C, D , как это показано на рис. 1.12. Профильная проекция A_3 вершины A определяется с учетом известного свойства параллельного (в частности – ортогонального) проецирования: проекции параллельных прямых параллельны [1, п. 1.2]. Следовательно, профильные проекции противоположных попарно параллельных сторон параллелограмма должны быть параллельны, что позволяет по-

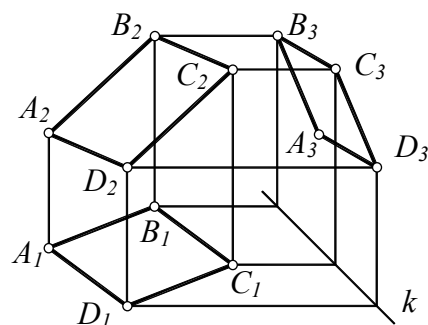


Рис. 1.12

строить точку A_3 без вычерчивания линий связи (*как?*). Условия связи могут быть использованы для дополнительной проверки точности решения задачи.

Задача 1.5

На комплексном трехпроекционном чертеже заданы точки A, B, C, D, E , причем некоторые точки указаны только двумя своими проекциями (рис. 1.13). Построить недостающие (третьи) проекции этих точек.

Решение. Заметим, что точка A задана на чертеже тремя своими проекциями, что позволяет определить положение линии преломления k : прямая k должна проходить через точку излома ломаной линии связи, соединяющей проекции A_1 и A_3 точки A .

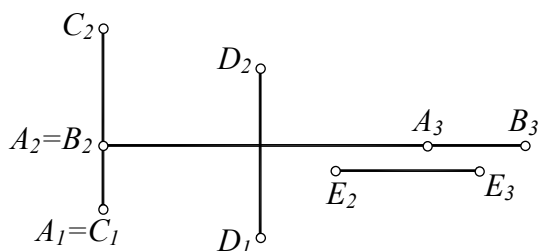


Рис. 1.13

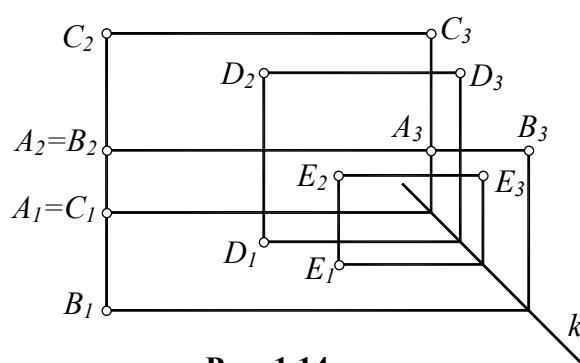


Рис. 1.14

Начертив линию преломления, получаем возможность построить недостающие проекции точек B, C, D, E , используя условия связи между проекциями точек на трехпроекционном комплексном чертеже (рис. 1.14).

Задача 1.6

Дан комплексный трехпроекционный чертеж точки A (рис. 1.15). Построить проекции точки B , если известно, что $x_B - x_A = 11$ мм, $y_B - y_A = 7,5$ мм, $z_A - z_B = 10,5$ мм.

Решение. Проводим ломаную линию связи, соединяющую горизонтальную A_1 и профильную A_3 проекции точки A . Через точку излома проводим постоянную прямую чертежа k (линию преломления).

Из условия задачи следует, что координата x точки B больше, чем координата x точки A . Можно сказать, что для наблюдателя, смотрящего спереди (из несобственной точки оси y), точка B в пространстве располагается левее точки A . Поэтому на чертеже проводим вертикальную линию связи (на которой будут располагаться проекции искомой точки B) левее линии связи, соединяющей проекции A_2 и A_1 точки A , на величину $\delta x = x_B - x_A$ (рис. 1.16).

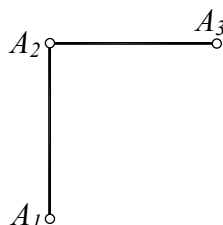


Рис. 1.15

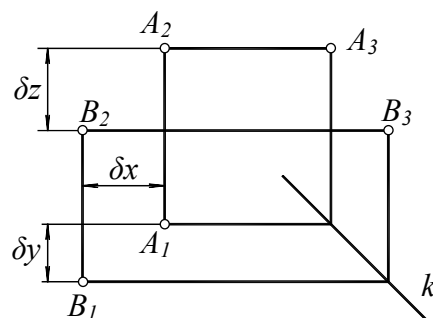


Рис. 1.16

Согласно условию, точка B располагается в пространстве ниже точки A на величину $\delta z = z_A - z_B$, что позволяет построить фронтальную проекцию B_2 точки B .

Координата y_B точки B больше, чем координата y_A точки A . Это означает, что в пространстве точка B располагается ближе, чем точка A , по отношению к наблюдателю, смотрящему спереди (из несобственной точки оси y). Откладывая на чертеже расстояние $\delta y = y_B - y_A$, получаем горизонтальную проекцию точки B .

Третья (профильная) проекция точки B определяется на чертеже с учетом условий связи и с использованием преломления k (см. рис. 1.16).

Задача 1.7

Построить недостающие проекции вершин треугольника ABC (рис. 1.17).

Решение. Каждая из вершин треугольника задана на чертеже двумя своими проекциями. Чтобы найти недостающие проекции вершин треугольника, начертим постоянную прямую чертежа (линию преломления k). Для этого достаточно провести ломаную линию связи, соединяющую заданные на чертеже проекции B_1 и B_3 вершины B . Через точку излома проходит искомая линия преломления. Недостающие проекции всех вершин треугольника определяются с помощью условий связи (рис. 1.18). Заметим, что профильная проекция $A_3B_3C_3$ представляет собой истинную форму треугольника ABC (*почему?*).

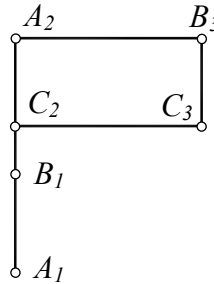


Рис. 1.17

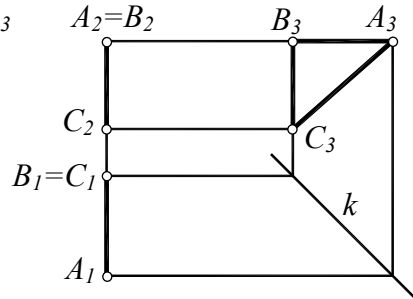


Рис. 1.18

1.3. Конкурирующие точки

Если на комплексном чертеже горизонтальные проекции двух точек совпадают, то такие точки называют *горизонтально-конкурирующими*. Например, на рис. 1.18 совпадают горизонтальные проекции точек B и C . Точка B расположена в пространстве *над* точкой C . Точки B и C на рис. 1.18 – горизонтально-конкурирующие.

Если на чертеже фронтальные проекции двух точек совпадают, то такие точки называют *фронтально-конкурирующими*. Например, на рис. 1.18 совпадают фронтальные проекции точек A и B . Точка A располагается в пространстве *перед* точкой B . Точки A и B на рис. 1.18 – фронтально-конкурирующие.

Если совпадают профильные проекции двух точек, то такие точки называют *профильно-конкурирующими*. На рис. 1.18 таких точек нет.

Задача 1.8

На рис. 1.19 представлен чертеж трех пар конкурирующих точек $A-B$, $C-D$ и $E-F$. Уточнить названия пар точек. Указать видимость проекций точек.

Решение. Точки A и B “конкурируют” между собой по отношению к горизонтальной плоскости проекций: точка A *выше* точки B . Точки A и B – *горизонтально-конкурирующие*. При взгляде сверху точка A будет видна, а точка B “спрячется” под ней. Поэтому горизонтальная проекция точки B – невидима. Невидимые проекции точек условно обозначают на чертеже круглыми скобками, поэтому горизонтальная проекция B_1 точки B взята на чертеже в скобки (см. рис. 1.19).

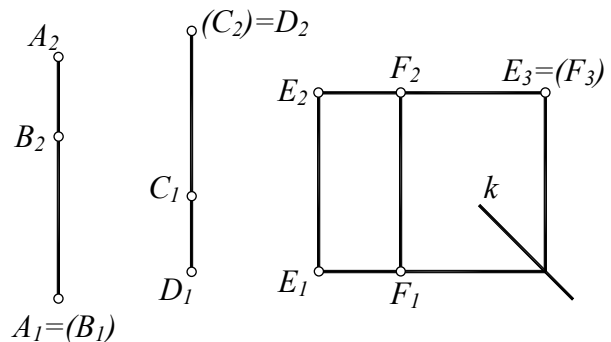


Рис. 1.19

Точки C и D “конкурируют” между собой по отношению к фронтальной плоскости проекций: точка D *дальше* от плоскости проекций Π_2 , чем точка C . Точки C и D – *фронтально-конкурирующие*. При взгляде спереди точка D будет видна, а точка C “спрячется” за ней, поэтому фронтальная проекция C_2 точки C – невидима (взята на чертеже в круглые скобки). Видимость точек E и F определить самостоятельно.

Тема 2

КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Аксиома. Через две различные точки пространства проходит единственная прямая. Положение прямой в пространстве вполне определяется двумя ее точками.

Прямая линия проецируется в прямую линию. Чтобы на комплексном чертеже задать прямую линию, достаточно указать проекции двух ее точек A, B . Проекции прямой пройдут через одноименные проекции точек A, B .

Прямая линия может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2, Π_3 . Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют прямой *общего положения*. Если прямая параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую прямую называют прямой *частного положения*.

2.1. Чертеж прямой общего положения

Чтобы начертить прямую общего положения (или ее отрезок), надо на чертеже указать проекции двух точек A, B и провести проекции искомой прямой через одноименные проекции этих точек.

Задача 2.1

Построить комплексный трёхпроекционный чертеж отрезка AB , если дан чертеж точки A и известны разности координат концов отрезка: $\delta x = x_A - x_B = 19$ мм, $\delta y = y_A - y_B = 13$ мм, $\delta z = z_B - z_A = 9$ мм (рис. 2.1).

Решение. Для решения задачи требуется построить проекции точки B , а затем соединить отрезками прямых одноименные проекции точек A и B . Проводим ломаную линию связи $A_1 - A_3$ и через точку излома проводим линию преломления k . Координата x искомой точки B меньше, чем координата x точки A , поэтому проекции B_2, B_1 точки B должны лежать на вертикальной линии связи, расположенной *правее* вертикальной линии связи $A_2 - A_1$ (на расстояние $\delta x = 19$ мм).

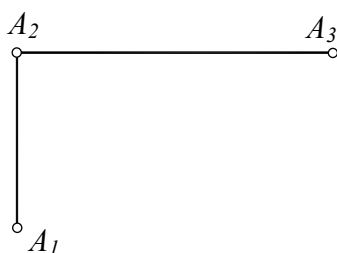


Рис. 2.1

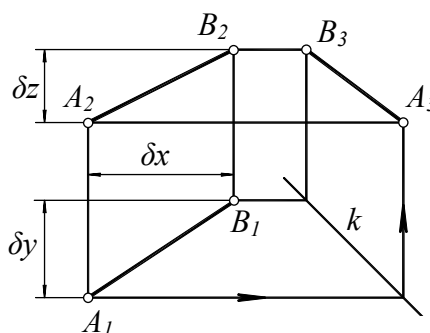


Рис. 2.2

Фронтальную и горизонтальную проекции точки B отмечаем в соответствии с заданными разностями координат δz и δy . Профильная проекция точки B определяется с помощью линии преломления k и с учетом условий связи между проекциями. Соединяя одноименные проекции точек A и B , получаем решение задачи (рис. 2.2).

Примечание. На рис. 2.2 не отмечена разность координат δy между профильными проекциями A_3, B_3 точек A и B . Отметить эту разность самостоятельно (с помощью линии преломления k).

2.2. Определение длины отрезка прямой общего положения

Задача 2.2

Дан двухпроекционный чертеж отрезка AB прямой общего положения. Требуется определить истинную длину отрезка AB и углы наклона прямой AB к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 (рис. 2.3).

Решение. Измерив на чертеже разности координат δx , δy , δz концов отрезка AB , можем рассчитать истинную длину отрезка AB по формуле

$$AB^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2, \quad (2.1)$$

представляющей собой теорему Пифагора для трехмерного пространства (справедливость формулы (2.1) доказать самостоятельно).

Для вычисления угла наклона отрезка к какой-либо плоскости проекций (например, угла α наклона отрезка к Π_1) требуется вычислить $\cos \alpha = |A_1 B_1| / |AB|$, а затем использовать калькулятор для расчета обратной тригонометрической функции $\arccos$. Такой вычислительный алгоритм применяют в аналитической геометрии.

В курсе начертательной геометрии предлагается вместо расчета использовать графический способ решения этой задачи (способ прямоугольного треугольника), не требующий каких-либо вычислений [1, п. 2.2.2].

Правило (способ прямоугольного треугольника)

Чтобы определить истинную длину отрезка AB прямой общего положения и углы его наклона к плоскостям проекций Π_1 , Π_2 , надо на чертеже построить два вспомогательных прямоугольных треугольника. Катеты одного треугольника: горизонтальная проекция $A_1 B_1$ и разность высот δz концов отрезка. Катеты другого треугольника: фронтальная проекция $A_2 B_2$ и разность глубин δy концов отрезка. Гипотенузы этих треугольников равны между собой и равны истинной длине отрезка. Углы, противолежащие катетам δz и δy , равны углам наклона α , β отрезка к плоскостям Π_1 и Π_2 соответственно.

“Графическое” доказательство этого правила дано в [1]. Рассмотрим другое доказательство, основанное на использовании формулы (2.1).

В соответствии с доказываемым правилом, измеряем на чертеже разности координат δz , δy концов отрезка и строим два вспомогательных прямоугольных треугольника $A_1 B_1 B'$ и $A_2 B_2 B''$ (рис. 2.4).

Катетами первого треугольника являются горизонтальная проекция $A_1 B_1$ и разность высот δz концов отрезка. В соответствии с теоремой Пифагора, гипотенуза $A_1 B'$ этого треугольника равна:

$$(A_1 B')^2 = (A_1 B_1)^2 + \delta z^2. \quad (2.2)$$

Горизонтальная проекция $A_1 B_1$ отрезка AB равна

$$(A_1 B_1)^2 = \delta x^2 + \delta y^2. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем:

$$(A_1 B')^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2.$$

Следовательно, в соответствии с (2.1), гипотенуза $A_1 B'$ вспомогательного треугольника $A_1 B_1 B'$ равна истинной длине отрезка AB . Аналогично доказывается, что гипотену-

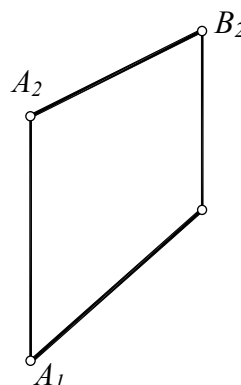


Рис. 2.3

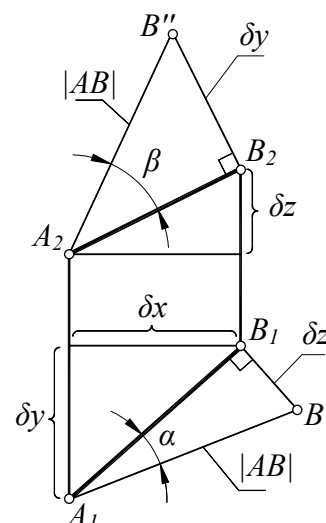


Рис. 2.4

за A_2B'' другого вспомогательного треугольника A_2B_2B'' также равна истинной длине отрезка AB . Первая часть правила (равенство гипотенуз вспомогательных треугольников истинной длине отрезка) доказана.

Справедливость второй части правила (равенство углов наклона прямой AB к плоскостям проекций соответствующим углам вспомогательных прямоугольных треугольников) следует из правила: *угол наклона отрезка AB к какой-либо плоскости проекций равен углу между отрезком и его ортогональной проекцией на эту плоскость проекций (почему?)*. Например, на рис. 2.4 отрезок AB – это гипотенуза вспомогательного прямоугольного треугольника A_2B_2B'' , а катет A_2B_2 – ортогональная проекция отрезка AB на плоскость Π_2 . Угол β между отрезком AB и его проекцией A_2B_2 (противолежащий катету δy) равен истинному углу наклона отрезка к плоскости Π_2 .

Аналогично доказывается, что в другом вспомогательном треугольнике A_1B_1B' угол α , противолежащий катету δz , равен истинному углу наклона отрезка к плоскости Π_1 .

2.3. Построение отрезка заданной длины

В некоторых задачах требуется начертить отрезок заранее заданной длины, отмеренный на данной прямой. Такое построение также выполняется способом прямоугольного треугольника.

Задача 2.3

На комплексном двухпроекционном чертеже задана прямая l общего положения и точка A на ней. Требуется отложить вдоль прямой l (от точки A) отрезок AB заданной длины m (рис. 2.5).

Решение. На прямой l отметим произвольную точку R и способом прямоугольного треугольника определим истинную длину полученного отрезка AR . Для этого строим вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1R_1R_0$, одним катетом которого является горизонтальная проекция A_1R_1 отрезка AR , а другим катетом – разность высот δz точек A и R , измеренная на фронтальной проекции отрезка (рис. 2.6).

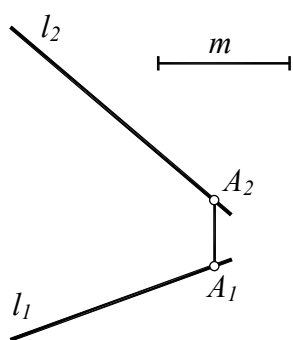


Рис. 2.5

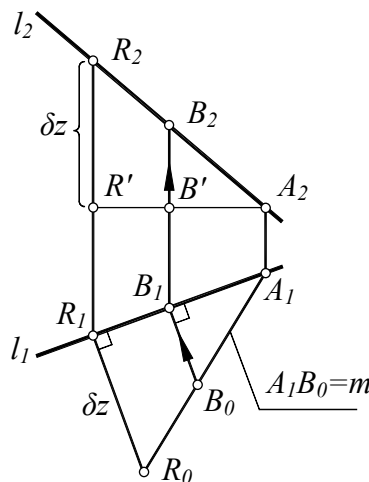


Рис. 2.6

Гипотенуза A_1R_0 треугольника $A_1R_1R_0$ равна истинной длине произвольно отмеченного на прямой l отрезка AR (*почему?*). Откладывая вдоль гипотенузы A_1R_0 расстояние m , отмечаем точку B_0 . “Возвращая” точку B_0 на проекции данной прямой, получаем чертеж отрезка AB , длина которого равна заданной величине m (рис. 2.6). Для подтверждения справедливости указанного построения достаточно доказать, что катет B_1B_0 вспомогательного прямоугольного треугольника $A_1B_1B_0$ равен разности высот точек A и B (доказать самостоятельно).

Задача 2.4

Построить недостающую фронтальную проекцию отрезка AB , если на чертеже дана его горизонтальная проекция A_1B_1 и известно, что истинная длина отрезка AB равна 40 мм (рис. 2.7).

Решение. Предположим, что задача решена, то есть построен двухпроекционный чертеж отрезка AB длиной 40 мм. Тогда вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$, построенный на горизонтальной проекции отрезка A_1B_1 как на катете, должен иметь гипотенузу, равную истинной длине отрезка: $A_1B_0=40$ мм (рис. 2.8). Другой катет этого треугольника должен быть равен разности высот δz точек A и B (*почему?*). Построив на чертеже вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$ по известному катету A_1B_1 и гипотенузе $A_1B_0=40$ мм (см. построение на рис. 2.8), определяем $\delta z=B_1B_0$.

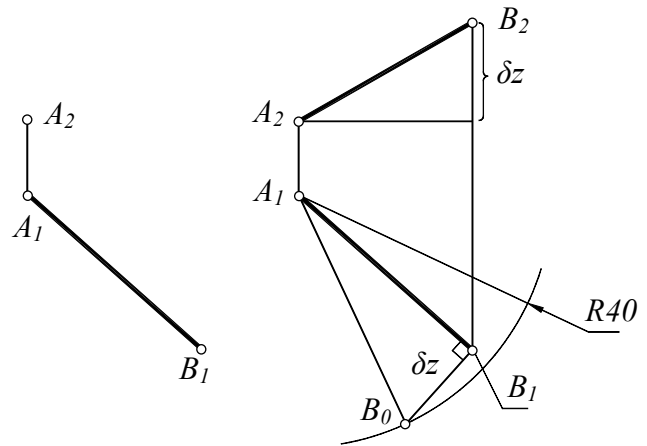


Рис. 2.7

Откладывая найденное значение δz (разность высот точек A и B) на плоскости Π_2 , находим фронтальную проекцию B_2 искомой точки B . Задача имеет два решения, поскольку точка B может располагаться как выше, так и ниже данной точки A на величину δz (второе решение на рис. 2.8 условно не показано).

Рис. 2.8

2.4. Чертежи прямых частного положения

Прямые частного положения разделяют на две группы: *прямые уровня* (горизонталь, фронталь, профильная прямая) и *проецирующие прямые* (горизонтально-проецирующая прямая, фронтально-проецирующая прямая, профильно-проецирующая прямая).

Задача 2.5 (чертеж горизонтали)

Построить трехпроекционный чертеж прямой по разности координат двух ее точек A и B : $\delta x=x_A-x_B=23$ мм, $\delta y=y_B-y_A=12$ мм, $\delta z=z_B-z_A=0$. Записать название прямой. Указать натуральную величину отрезка AB и углы его наклона α , β , γ к плоскостям проекций Π_1 , Π_2 , Π_3 (рис. 2.9).

Решение. Разность высот δz точек A , B равна нулю, следовательно, прямая AB – *горизонтальная прямая уровня* (все ее точки находятся на одном уровне относительно горизонтальной плоскости проекций Π_1) или более кратко – *горизонталь*. Горизонталь параллельна горизонтальной плоскости проекций.

Для составления чертежа горизонтали произвольно указываем три проекции одной из ее точек, например, точки A . Проводя линию преломления и учитывая заданные значения разностей координат точек A и B , отмечаем проекции точки B . Соединяя одноименные проекции, получаем чертеж отрезка AB горизонтали. Горизонталь принято обозначать буквой h (рис. 2.9).

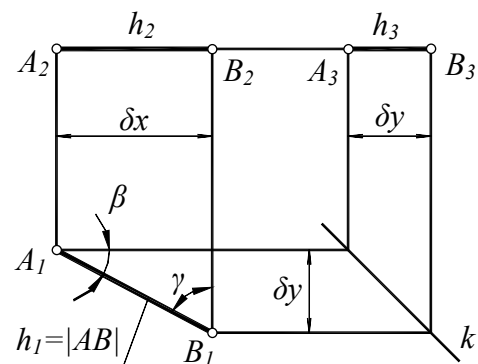


Рис. 2.9. Горизонталь

Длина отрезка AB горизонтали и углы наклона β, γ к плоскостям проекций Π_2, Π_3 изображаются в истинную величину на горизонтальной плоскости проекций (*почему?*). Чему равен угол α наклона горизонтали к плоскости Π_1 ?

Задача 2.6 (чертеж фронтали)

Построить трехпроекционный чертеж прямой по разности координат двух ее точек A и B : $\delta x = x_A - x_B = 25$ мм, $\delta y = y_B - y_A = 0$, $\delta z = z_B - z_A = 14$ мм. Записать название прямой. Указать натуральную величину отрезка AB и углы его наклона α, β, γ к плоскостям проекций Π_1, Π_2, Π_3 .

Решение. Разность глубин δy точек A, B равна нулю, следовательно, прямая AB параллельна фронтальной плоскости проекций Π_2 . Прямую AB называют *фронтальной прямой уровня* или, более кратко – *фронталью*. Все ее точки находятся на одном расстоянии от фронтальной плоскости проекций Π_2 .

Чтобы начертить фронталь, произвольно указываем три проекции одной из ее точек, например, проекции точки A . Учитывая заданные значения разностей координат точек A и B , отмечаем проекции точки B . Соединяя одноименные проекции, получаем чертеж отрезка AB фронтали. Фронталь принято обозначать буквой f (рис. 2.10).

Длина отрезка AB фронтали и углы наклона α, γ к плоскостям проекций Π_1, Π_3 изображаются в истинную величину на фронтальной плоскости проекций (*почему?*). Чему равен угол β наклона фронтали к плоскости Π_2 ?

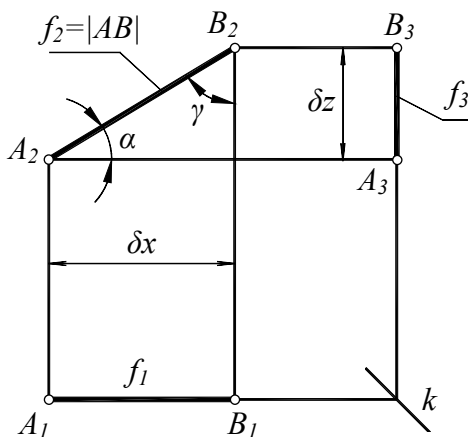


Рис. 2.10. Фронталь

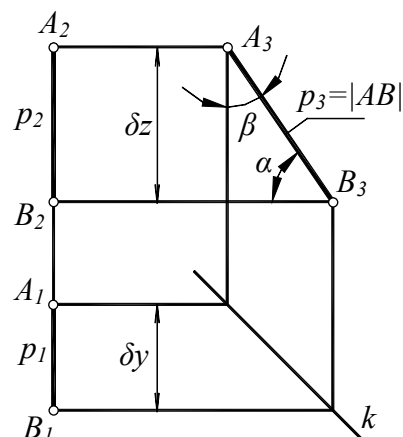


Рис. 2.11. Профильная прямая

Задача 2.7 (чертеж профильной прямой уровня)

Построить трехпроекционный чертеж прямой по разности координат двух ее точек A и B : $\delta x = x_A - x_B = 0$, $\delta y = y_B - y_A = 15$ мм, $\delta z = z_B - z_A = 22$ мм. Записать название прямой. Указать натуральную величину отрезка AB и углы его наклона α, β, γ к плоскостям проекций Π_1, Π_2, Π_3 .

Решение. Разность широт δx точек A, B равна нулю, следовательно, прямая AB – *профильная прямая уровня* (кратко – *профильная прямая*). Все ее точки находятся на одном расстоянии от профильной плоскости проекций Π_3 . Профильная прямая параллельна профильной плоскости проекций.

Для составления чертежа профильной прямой указываем три проекции одной из ее точек, например, точки A . Учитывая заданные значения разностей координат точек A и B , отмечаем проекции точки B . Соединяя одноименные проекции отрезком прямой линии, получаем чертеж отрезка AB профильной прямой (рис. 2.11). Профильную прямую обозначают буквой p .

Длина отрезка AB профильной прямой и углы наклона α, β к плоскостям проекций Π_1, Π_2 изображаются в истинную величину на плоскости проекций Π_3 (почему?). Чему равен угол γ наклона профильной прямой к плоскости Π_3 ?

Задача 2.8

Построить двухпроекционный чертеж отрезка AB фронтали длиной $|AB|=35$ мм, наклоненного к Π_1 под углом $\alpha=30^\circ$. Точка B выше точки A .

Решение. Произвольно указываем проекции одного из концов искомого отрезка (например, проекции A_1, A_2 точки A). Фронталь – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 , поэтому на Π_2 отрезок AB фронтали проецируется в натуральную величину и под заданным углом наклона $\alpha=30^\circ$ к плоскости Π_1 (рис. 2.12). Согласно условию, точка B расположена выше точки A . Задача имеет два решения. Второе решение на рис. 2.12 не показано (найти его самостоятельно).

Задача 2.9

Построить трехпроекционный чертеж отрезка $|AB|=23$ мм профильной прямой, равнонаклоненной к плоскостям Π_2 и Π_1 . Точка B выше точки A .

Решение. Произвольно указываем проекции одного из концов искомого отрезка (например, проекции A_1, A_2, A_3 точки A). Профильная прямая параллельна профильной плоскости проекций Π_3 , поэтому искомым отрезком AB профильной прямой изображается на Π_3 “в натуральную величину” $A_3B_3=|AB|$ под равными углами наклона $\alpha=\beta=45^\circ$ к плоскостям Π_1 и Π_2 (рис. 2.13). Согласно условию, точка B расположена выше точки A . Задача имеет два решения. Второе решение на рис. 2.13 не показано (найти его самостоятельно).

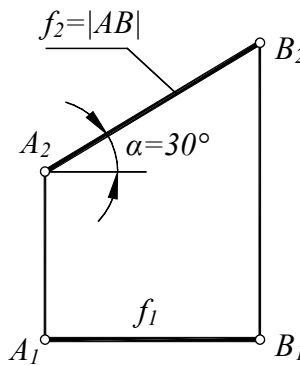


Рис. 2.12

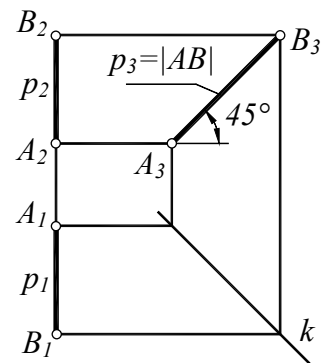


Рис. 2.13

Задача 2.10 (чертеж горизонтально-проецирующей прямой)

Построить трехпроекционный чертеж прямой q по разности координат двух ее точек A и B : $\delta x = x_A - x_B = 0$, $\delta y = y_B - y_A = 0$, $\delta z = z_B - z_A = 26$ мм. Записать название прямой.

Решение. Разность координат точек A, B по осям x и y равна нулю, следовательно, прямая $q=AB$ параллельна оси z , то есть перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. Такую прямую называют горизонтально-проецирующей прямой. Ее горизонтальная проекция вырождается в точку.

Для составления чертежа горизонтально-проецирующей прямой произвольно указываем три проекции одной из ее точек, например, точки A . Учитывая заданные значения разностей координат точек A и B , отмечаем проекции точки B . Соединяя одноименные проекции, получаем чертеж прямой $q=AB$ (рис. 2.14).

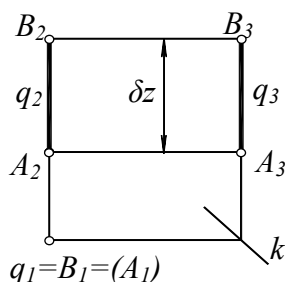


Рис. 2.14

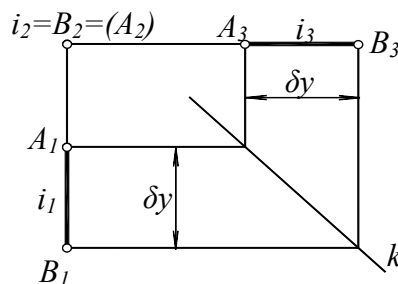


Рис. 2.15

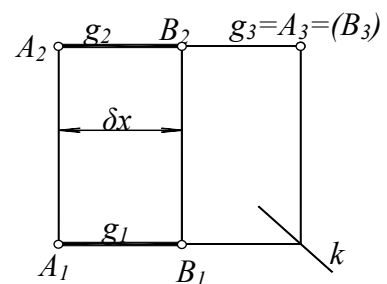


Рис. 2.16

Точки A и B – горизонтально-конкурирующие. Их горизонтальные проекции совпадают (см. п. 1.3). Точка B выше точки A , поэтому на Π_1 проекция A_1 точки A невидима (взята в круглые скобки).

Прямая q , перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, параллельна фронтальной и профильной плоскостям проекций. Следовательно, отрезок AB горизонтально-проецирующей прямой q проецируется на Π_2 и Π_3 в натуральную величину. Такая прямая может быть названа *дважды прямой уровня* (так как она параллельна двум плоскостям проекций). Существует ли дважды проецирующая прямая?

Задача 2.11 (чертеж фронтально-проецирующей прямой)

Построить трехпроекционный чертеж прямой i по разности координат двух ее точек A и B : $\delta x = x_A - x_B = 0$, $\delta y = y_B - y_A = 15$ мм, $\delta z = z_B - z_A = 0$. Записать название прямой.

Решение. Разность координат точек A , B по осям x и z равна нулю, следовательно, прямая $i = AB$ параллельна оси y , то есть перпендикулярна фронтальной плоскости проекций. Такую прямую называют фронтально-проецирующей прямой. Ее фронтальная проекция вырождается в точку.

Для составления чертежа фронтально-проецирующей прямой произвольно указываем три проекции одной из ее точек, например, точки A . Учитывая заданные значения разностей координат точек A и B , отмечаем проекции точки B . Соединяя одноименные проекции, получаем чертеж прямой $i = AB$ (рис. 2.15).

Точки A и B – фронтально-конкурирующие. Их фронтальные проекции совпадают. Точка A ближе к Π_2 , чем точка B , поэтому проекция A_2 точки A невидима (взята на рис. 2.15 в круглые скобки).

Прямая i , перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, параллельна горизонтальной и профильной плоскостям проекций. Следовательно, отрезок AB фронтально-проецирующей прямой i проецируется на Π_1 и Π_3 в натуральную величину (прямая i – дважды прямая уровня).

Задача 2.12 (чертеж профильно-проецирующей прямой)

Построить трехпроекционный чертеж прямой g по разности координат двух ее точек A и B : $\delta x = x_A - x_B = 19$ мм, $\delta y = \delta z = 0$. Записать название прямой.

Решение. Разность координат точек A , B по осям y и z равна нулю, следовательно, прямая $g = AB$ параллельна оси x , то есть перпендикулярна профильной плоскости проекций. Такую прямую называют профильно-проецирующей прямой. Ее профильная проекция вырождается в точку.

Для составления чертежа профильно-проецирующей прямой произвольно указываем три проекции одной из ее точек, например, точки A . Учитывая заданные значения разностей координат точек A и B , отмечаем проекции точки B . Соединяя одноименные проекции, получаем чертеж прямой $g = AB$ (рис. 2.16).

Точки A и B – профильно-конкурирующие. Их профильные проекции совпадают. Точка B ближе к Π_3 , чем точка A , поэтому проекция B_3 точки B невидима (взята на рис. 2.16 в круглые скобки).

Прямая g , перпендикулярная профильной плоскости проекций, параллельна горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций. Следовательно, отрезок AB профильно-проецирующей прямой g проецируется на Π_1 и Π_2 в натуральную величину (прямая g – дважды прямая уровня).

2.5. Относительное положение прямых линий

Прямые a и b , расположенные в трехмерном пространстве, могут пересекаться, совпадать или скрещиваться.

Если прямые a и b имеют единственную общую точку $K=a\cap b$, их называют *пересекающимися*. Если точка K – несобственная (бесконечно удаленная), то прямые a и b называют *параллельными*.

Если прямые a и b имеют две общие точки, то эти прямые совпадают (*почему?*).

Если прямые a и b не имеют ни одной общей точки, их называют *скрещивающимися*. Очевидно, в двумерном пространстве (на плоскости) две прямые не могут быть скрещивающимися.

Задача 2.13

Через точку A провести горизонталь h и фронталь f , пересекающие данную прямую t (рис. 2.17).

Решение. На прямой t есть единственная точка I , расположенная на той же высоте, что и заданная точка A . Через точки A и I проходит искомая горизонталь (рис. 2.18). **Почему?** Как найдена точка I ? Объяснить самостоятельно.

На прямой t есть единственная точка 2, удаленная от фронтальной плоскости проекций Π_2 на то же расстояние, что и точка A . Через точки A и 2 проходит искомая фронталь (см. рис. 2.18). **Почему?** Объяснить самостоятельно.

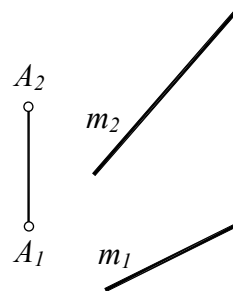


Рис. 2.17

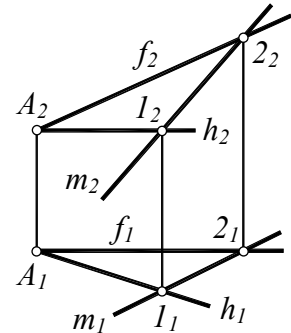


Рис. 2.18

Задача 2.14

Через точку A провести прямую n' , параллельную прямой n .

Решение. Проекции параллельных прямых параллельны [1, п. 1.2], поэтому для решения задачи надо на комплексном чертеже построить прямую, проходящую через A , проекции которой параллельны одноименным проекциям данной прямой n (рис. 2.19).

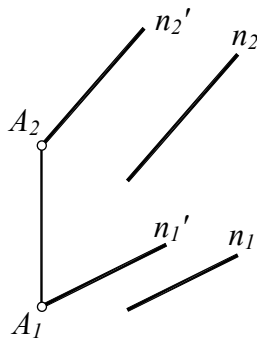


Рис. 2.19

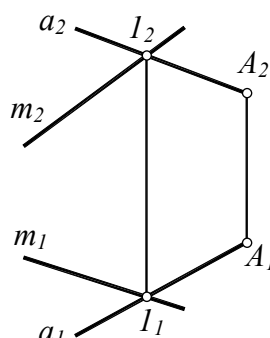


Рис. 2.20

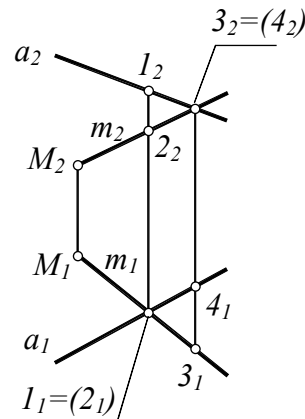


Рис. 2.21

Задача 2.15

Через точку A провести прямую общего положения a , пересекающую прямую t (рис. 2.20).

Решение. Отмечаем на прямой t произвольную точку I . Через точки A и I проходит искомая прямая A . Задача имеет бесконечно много решений: через точку A и произвольную точку на прямой t проходит прямая, удовлетворяющая условию задачи.

Примечание к задаче 2.15. Прямая t содержит множество ∞^1 (бесконечность в первой степени) точек [1, п. 6.3.1], поэтому рассматриваемая задача имеет ∞^1 решений.

Задача 2.16

Через точку M провести прямую t общего положения, скрещивающуюся с прямой a . Определить относительное положение прямых a и t (рис. 2.21).

Решение. Через точку M проведем произвольную прямую t , не пересекающую данную прямую a . У прямых a и t нет ни одной общей точки, значит, эти прямые – скрещивающиеся. Задача решена.

Чтобы определить относительное положение прямых a и t , отметим на них две пары конкурирующих точек 1-2 и 3-4 (определение понятия “конкурирующие точки” – см. п. 1.3). Точки 1 и 2 – горизонтально-конкурирующие. Точка 1 выше точки 2. Точка 1 принадлежит прямой a , поэтому говорят, что прямая a выше прямой t . Почему на рис. 2.21 горизонтальная проекция точки 2 взята в скобки?

Рассматривая пару фронтально-конкурирующих точек 3-4, замечаем, что точка 3 располагается перед точкой 4. Точка 3 принадлежит прямой t , поэтому говорят, что прямая t располагается перед прямой a . Почему на рис. 2.21 фронтальная проекция точки 4 взята в скобки?

Задача имеет бесконечно много решений: в трехмерном пространстве через точку M проходит бесконечно много прямых t , скрещивающихся с данной прямой a .

Примечание к задаче 2.16. Через точку M проходит множество ∞^2 (бесконечность во второй степени) прямых [1, п. 6.3.1]. В этом множестве содержится ∞^2 прямых, скрещивающихся с данной прямой a , и ∞^1 прямых, пересекающих прямую a .

2.6. Принадлежность точки к прямой линии

Если точка лежит на прямой, то проекции точки лежат на одноименных проекциях прямой. Если хотя бы одна проекция точки не принадлежит проекции прямой, то точка не принадлежит прямой.

Задача 2.17

На чертеже (рис. 2.22) заданы точки A, B, C, D и прямая линия a . Лежат ли заданные точки на данной прямой?

Решение. Точка C лежит на прямой a , так как проекции C_1 и C_2 точки C лежат на одноименных проекциях a_1 и a_2 прямой a . Отмеченные на чертеже вспомогательные точки 1 и 2 также принадлежат прямой a .

Точки A, B, D не лежат на прямой a . Точка A и точка 1 – горизонтально-конкурирующие точки, причем точка A располагается в пространстве выше точки 1. Значит, точка A находится выше прямой a .

Точки B и 2 – фронтально-конкурирующие, причем точка B находится перед точкой 2. Значит, точка B находится перед прямой a .

Точка D находится за прямой a . При этом точка D выше прямой a .

Круглыми скобками отмечены невидимые проекции точек. Например, горизонтальная проекция 1_1 точки 1 – невидима (закрыта от смотрящего сверху наблюдателя точкой A).

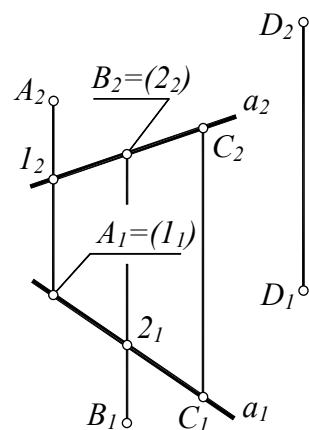


Рис. 2.22

Тема 3

КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПЛОСКОСТИ

Аксиома. *Через три различные точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.* Положение плоскости в пространстве вполне определяется либо тремя ее точками, либо принадлежащими ей точкой и прямой, либо двумя пересекающимися (в собственной или несобственной точке) прямыми.

Плоскость может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2, Π_3 . Если плоскость не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, ее называют *плоскостью общего положения*. Если плоскость параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую плоскость называют *плоскостью частного положения*.

3.1. Чертеж плоскости общего положения.

Взаимопринадлежность прямой, точки и плоскости

Чтобы на комплексном чертеже задать плоскость общего положения, надо указать либо проекции трех точек, либо проекции прямой общего положения и точки, либо проекции двух пересекающихся или параллельных прямых.

Для построения точки или прямой, принадлежащей данной плоскости, используют *признаки взаимопринадлежности точки, прямой и плоскости* [1, п. 2.3.1].

Признак 1. Точка лежит в плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в данной плоскости.

Признак 2. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через две точки, лежащие в этой плоскости.

Признак 3. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через какую-либо точку плоскости и при этом параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (то есть проходит через две точки плоскости, одна из которых несобственная).

Задача 3.1

Построить комплексный чертеж плоскости общего положения $\Gamma(a \cap b)$.

Решение. Согласно условию, плоскость следует задать проекциями двух пересекающихся прямых a и b . Поэтому начертим две пересекающиеся прямые общего положения a и b , которые и задают искомую плоскость (рис. 3.1).

Плоскость общего положения можно задать не только пересекающимися прямыми общего положения, но и пересекающимися прямыми уровня. Например, на рис. 3.2 плоскость задана пересекающимися горизонталью и фронталью, а на рис. 3.3 – пересекающимися горизонталью и прямой общего положения.

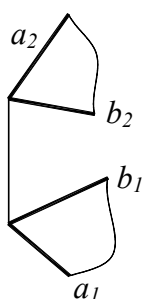


Рис. 3.1

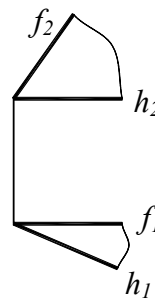


Рис. 3.2

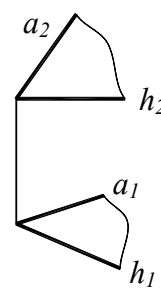


Рис. 3.3

Задача 3.2

Построить комплексный чертеж плоскости общего положения, задав ее пересекающимися фронталью и прямой общего положения (решить самостоятельно).

Можно ли плоскость общего положения задать пересекающимися прямыми, одна из которых – проецирующая? Можно ли плоскость общего положения задать пересекающимися прямыми, одна из которых – прямая уровня?

Задача 3.3

Построить произвольную прямую общего положения a , принадлежащую плоскости $\Gamma(n||l)$. Определить, принадлежит ли точка D плоскости Γ (рис. 3.4).

Решение. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через две точки, лежащие в этой плоскости (*признак 2*). Поэтому отметим на прямых n и l произвольные точки $1, 2$ и проведем через них прямую a . Точки 1 и 2 лежат в плоскости Γ , значит, прямая a лежит в плоскости Γ (рис. 3.5).

Чтобы определить, принадлежит ли точка D плоскости Γ , отметим на плоскости Γ произвольную точку 3 . Пусть это будет, например, точка 3 на прямой l . Через точки 3 и D проведем прямую m . Если точка D лежит в плоскости Γ , то прямая m обязательно пересечет прямую n . Но, согласно чертежу рис. 3.5, прямые m и n не пересекаются (*почему?*). Следовательно, точка D не принадлежит плоскости Γ .

Следовательно, точка D не принадлежит плоскости Γ .

Задача 3.4

Построить недостающую проекцию треугольника ABC , принадлежащего плоскости $\Gamma(n||l)$ (рис. 3.6).

Решение. Согласно условию задачи, треугольник ABC находится в плоскости Γ . Следовательно, стороны треугольника должны пересекаться с прямыми n, l , лежащими в плоскости Γ . Отмечаем горизонтальные проекции $1_1, 2_1, 3_1$ точек пересечения сторон треугольника ABC с прямыми n, l , затем находим фронтальные проекции $1_2, 2_2, 3_2$ этих точек и проводим через них фронтальные проекции сторон треугольника ABC (рис. 3.7).

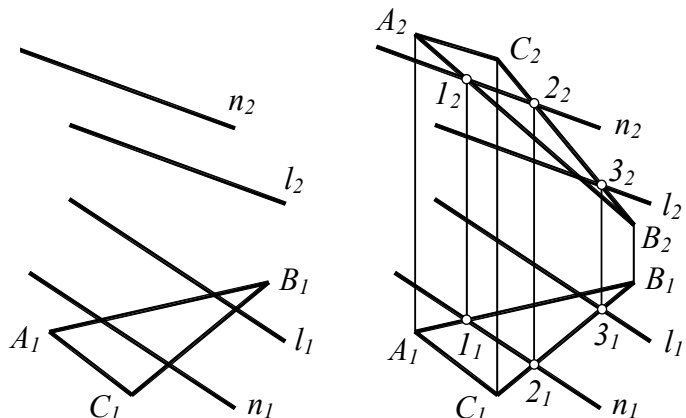


Рис. 3.6

Рис. 3.7

Задача 3.5

Достроить фронтальную проекцию плоского пятиугольника $ABCDE$ (рис. 3.8).

Решение. Точки A, B, E , заданные на чертеже, вполне определяют положение плоскости в пространстве. Согласно условию задачи, точки C и D должны принадлежать этой плоскости. Для построения недостающих проекций точек C, D проведем диагональ BE и горизонтальную проекцию диагонали AC (рис. 3.9). Эти диагонали пересекаются, так как лежат в одной плоскости. Отметим точку 1_1 пересечения горизонтальных проекций диагоналей BE и AC . Найдя с помощью вертикальной линии связи фронтальную проекцию точки 1 , начертим фронтальную проекцию прямой $A-1$ и отметим на ней недостающую фронтальную проекцию точки C .

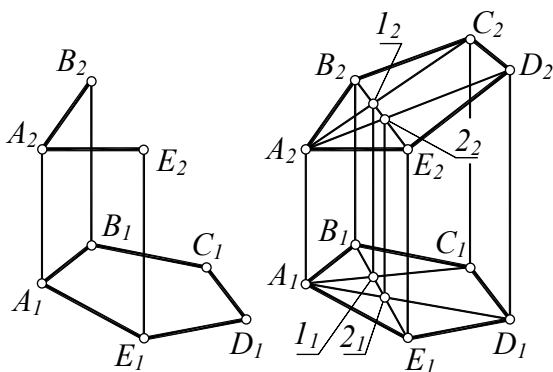


Рис. 3.8

Рис. 3.9

Недостающая фронтальная проекция точки D определяется аналогично (посредством построения вспомогательной точки 2, см. рис. 3.9).

Проверка. Прямая $A-I$ лежит в заданной плоскости ABE , так как она проходит через две точки A и I , лежащие в этой плоскости. Точка C лежит в плоскости ABE , так как она принадлежит прямой $A-I$, лежащей в этой плоскости. Аналогично выполняется проверка принадлежности точки D к заданной плоскости. Задача решена верно.

Задача 3.6

Построить проекции плоского неправильного n -угольника ($n > 3$), плоскость которого занимает общее положение в пространстве (не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций).

Решение. Произвольно указываем на чертеже проекции трех точек A, B, C , не лежащих на одной прямой (рис. 3.10). Положение плоскости ABC в пространстве вполне определено. Чтобы решить задачу, надо указать в этой плоскости еще хотя бы одну точку (точку D на рис. 3.10). Тогда фигура $ABCD$ будет искомым плоским n -угольником ($n=4$).

Рассмотрим последовательность построения точки D , принадлежащей заданной на чертеже плоскости ABC .

1. Отметим на прямой BC произвольную точку I . Точка I принадлежит плоскости ABC (*почему?*).

2. Проведем прямую $A-I$. Эта прямая целиком лежит в плоскости ABC (*почему?*).

3. Отметим на прямой $A-I$ произвольную точку D . Эта прямая принадлежит плоскости ABC (*почему?*).

Соединяя одноименные проекции точек A, B, C, D , получаем чертеж четырехугольника, все вершины которого лежат в одной плоскости (см. рис. 3.10). Задача решена.

Задача 3.7 (рис. 3.11)

Построить проекции треугольника ABC , лежащего в плоскости $\Gamma(m \parallel n)$, если даны фронтальные проекции вершин B и C и горизонтальная проекция вершины A .

Решение. Согласно условию, точки B и C лежат в плоскости Γ , поэтому прямая BC должна пересекать параллельные прямые m, n . Отмечаем фронтальные проекции $l_2, 2_2$

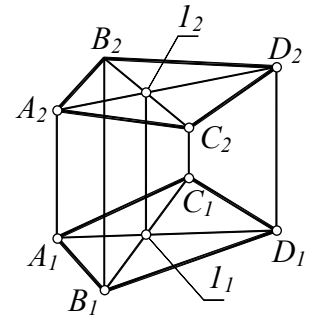


Рис. 3.10

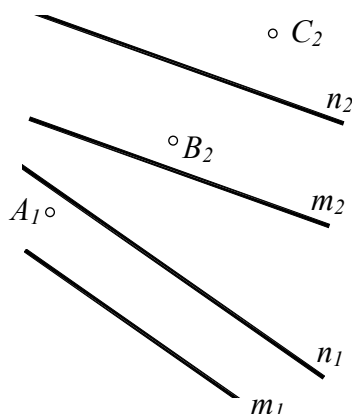


Рис. 3.11

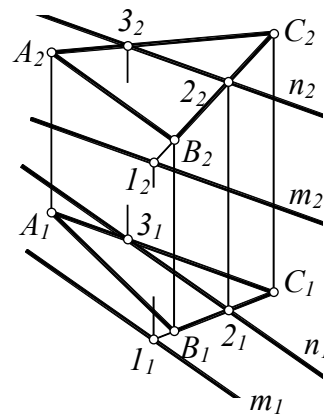


Рис. 3.12

этих точек и находим их горизонтальные проекции из условия принадлежности точек $l, 2$ прямым m, n . Недостающие горизонтальные проекции точек B и C лежат на горизонтальной проекции прямой $l-2$ (рис. 3.12).

Точка A , согласно условию задачи, также лежит в плоскости Γ , поэтому прямая AC должна пересечь прямую n . Отметив горизонтальную проекцию 3_1 точки $3=AC \cap n$, най-

дем фронтальную проекцию 3_2 этой точки. Недостающая фронтальная проекция точки A лежит на прямой C_2-3_2 . Соединяя отрезками прямых одноименные проекции точек A, B, C , получаем решение задачи (см. рис. 3.12).

Задача 3.8

Построить проекции отрезка AB , если известно, что точки A и B лежат в плоскости $\Gamma(a \cap b)$ (рис. 3.13).

Решение. Согласно условию задачи, точки A и B находятся в плоскости Γ , заданной пересекающимися прямыми a, b . Чтобы найти недостающие проекции этих точек, следует использовать признаки взаимопринадлежности точки, прямой и плоскости.

В плоскости $\Gamma(a \cap b)$ проведем какую-либо прямую, фронтальная проекция которой проходит через заданную проекцию A_2 точки A . Например, можно провести прямую a' , параллельную прямой a и пересекающую прямую b в точке I (рис. 3.14). Недостающая горизонтальная проекция A_1 точки A располагается на горизонтальной проекции прямой a . Аналогично определяется недостающая проекция точки B . Для окончательного решения задачи соединяем отрезками прямых одноименные проекции точек A и B .

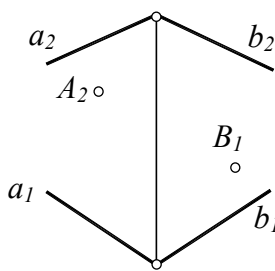


Рис. 3.13

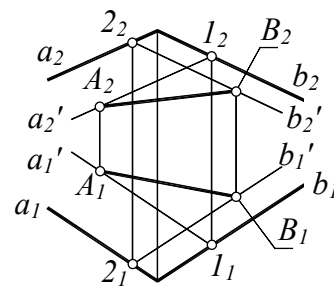


Рис. 3.14

Проверка. Прямая a' проходит через точку I плоскости Γ и при этом параллельна прямой a , лежащей в этой плоскости. Значит, прямая a' целиком лежит в плоскости Γ (в соответствии с признаком 3 принадлежности прямой линии к плоскости). Проекция точки A принадлежит одноименным проекциям прямой a' , следовательно, точка A принадлежит прямой a' . Но вся прямая a' лежит в плоскости Γ . Значит, точка A принадлежит плоскости Γ . Аналогично проверяется выполнение условия принадлежности точки B плоскости Γ . Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая (или ее отрезок) принадлежит плоскости. Задача решена верно.

Задача 3.9

Определить, лежат ли точки A и B в плоскости Σ , заданной проекциями треугольника KLM (рис. 3.15).

Решение. Напомним, что точка лежит в плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в данной плоскости. В свою очередь, точка принадлежит прямой, если на чертеже проекции точки принадлежат соответствующим проекциям прямой.

Предположим, что точка A принадлежит плоскости $\Sigma(KLM)$. Через какую-либо проекцию точки A (например, через A_1) проведем прямую K_1-I_1 (рис. 3.16). Найдем фронтальные проекции K_2, I_2 точек K, I . Вся прямая $K-I$ целиком лежит в плоскости Σ .

Замечаем, что точка A не принадлежит прямой $K-I$ (*почему?*). Отсюда следует, что точка A не принадлежит плоскости Σ . Действительно, если бы точка A принадлежала плоскости $\Sigma(KLM)$, то обе проекции этой точки принадлежали бы прямой $K-I$. Следовательно, наше исходное

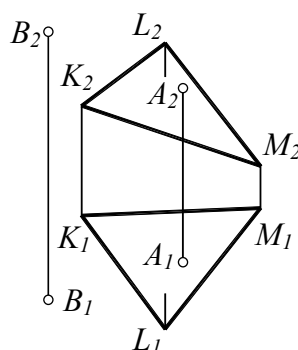


Рис. 3.15

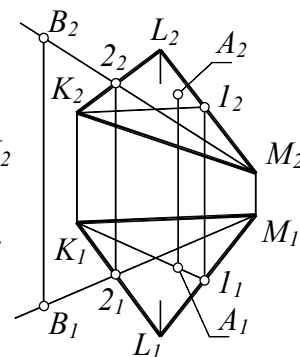


Рис. 3.16

предположение было неверно. Точка A в пространстве располагается не в плоскости Σ , а *выше* этой плоскости (*почему?*).

Аналогично проверяется принадлежность точки B плоскости Σ : проводим в плоскости Σ какую-либо прямую (например, $M-2$), одна из проекций которой проходит через одноименную проекцию точки B . Замечаем, что точка B принадлежит прямой $M-2$, так как обе ее проекции принадлежат одноименным проекциям прямой $M-2$. Следовательно, точка B принадлежит плоскости Σ (*почему?*).

3.2. Главные линии плоскости.

Взаимная параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

В любой плоскости обязательно имеются линии уровня: горизонталь, фронталь и профильная прямая. Эти линии, начерченные в заданной на чертеже плоскости, называют *главными линиями* данной плоскости.

При построении взаимно параллельных прямых и плоскостей применяют две теоремы [1, п. 2.3.4].

Теорема 1. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Теорема 2. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Задача 3.10

В плоскости $\Delta(ABC)$ общего положения построить главные линии этой плоскости: горизонталь, фронталь (рис. 3.17) и профильную прямую (рис. 3.18).

Решение. Для построения горизонтали отмечаем в заданной плоскости две точки, находящиеся на одинаковой высоте (одинаково удаленные от горизонтальной плоскости проекций), например, точки A и I (см. рис. 3.17). Через эти точки проходит искомая горизонталь h . У точек A и I – одинаковые координаты по оси высот z (аппликаты).

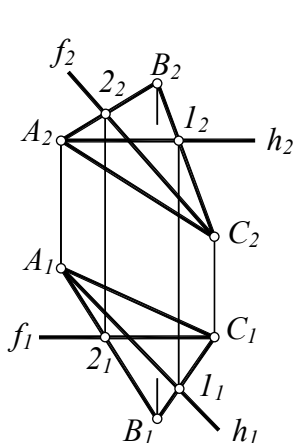


Рис. 3.17

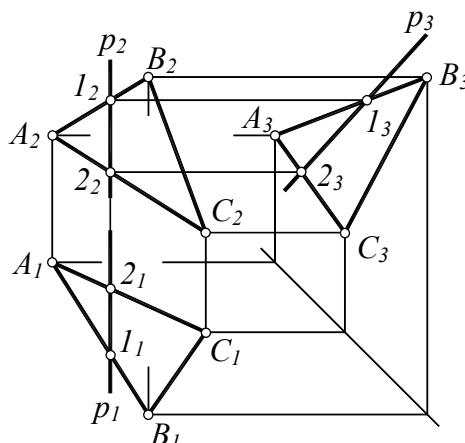


Рис. 3.18

Отметив в плоскости $\Delta(ABC)$ две точки, одинаково удаленные от фронтальной плоскости проекций (например, точки C и 2), проводим через них искомую фронталь f . У точек C и 2 – одинаковые координаты по оси глубин y (ординаты).

Чтобы в плоскости $\Delta(ABC)$ построить профильную прямую уровня, отмечаем в этой плоскости две точки, одинаково удаленные от профильной плоскости проекций (например, точки I и 2), и проводим через них искомую профильную прямую p (см. рис. 3.18). У точек I и 2 – одинаковые координаты по оси широт x (абсциссы).

Примечание. Задача имеет бесконечное множество решений. В любой плоскости можно провести ∞^1 горизонталей, ∞^1 фронталей, ∞^1 профильных прямых. Однотипные линии уровня, лежащие в данной плоскости (не являющейся плоскостью уровня), параллельны между собой.

В плоскости уровня это правило нарушается. Любая прямая, лежащая в горизонтальной плоскости уровня, является горизонталью, любая прямая во фронтальной плоскости уровня является фронталью. Плоскость содержит множество ∞^2 прямых [1, п. 6.3.1], поэтому в горизонтальной плоскости уровня можно провести ∞^2 горизонталей, ∞^1 фронталей и ∞^1 профильных прямых. Сколько фронталей можно провести во фронтальной плоскости уровня?

Задача 3.11

Через точку M провести плоскость Σ' , параллельную заданной плоскости $\Sigma(ABC)$.

Решение. Напомним, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (см. п. 3.2). Поэтому для решения задачи достаточно через точку M провести две прямые, параллельные любой паре пересекающихся прямых плоскости $\Sigma(ABC)$, например, $a \parallel AB$, $b \parallel AC$ (рис. 3.19). Плоскость $\Sigma'(a \cap b)$ проходит через точку M и параллельна плоскости Σ . Задача решена.

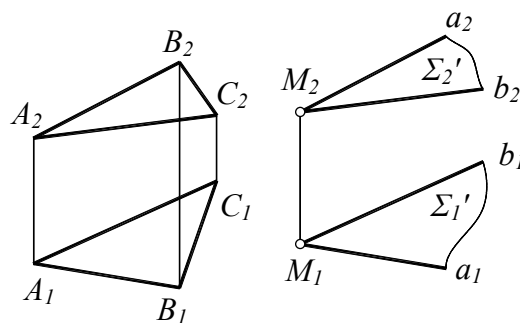


Рис. 3.19

3.3. Чертежи плоскостей частного положения

Плоскости частного положения разделяют на две группы: *плоскости уровня* (параллельные одной из плоскостей проекций) и *проецирующие плоскости* (перпендикулярные одной из плоскостей проекций) [1, п. 2.3.3].

Фигура, начерченная в плоскости, параллельной какой-либо плоскости проекций, проецируется на эту плоскость проекций *в натуральную величину (почему?)*. Все точки плоскости, перпендикулярной к какой-либо плоскости проекций, проецируются на эту плоскость проекций в прямую линию (*почему?*). В этом случае говорят, что проекция плоскости *выродилась* в прямую линию.

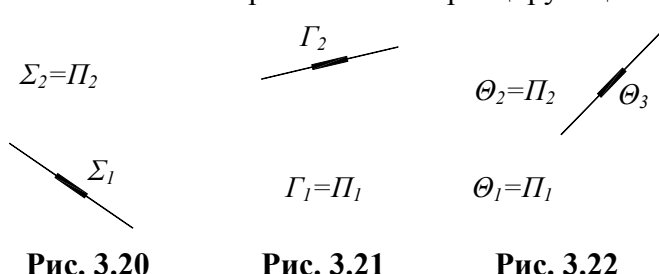
Через любую прямую, как общего, так и частного положения, всегда можно провести проецирующую плоскость, перпендикулярную к любой плоскости проекций.

Можно ли через прямую общего положения провести плоскость уровня?

Задача 3.12

Построить комплексные чертежи горизонтально-проецирующей плоскости Σ , фронтально-проецирующей плоскости Γ и профильно-проецирующей плоскости Θ .

Решение. Горизонтально-проецирующая плоскость Σ перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций Π_1 , поэтому на чертеже ее горизонтальная проекция Σ_1 вырождается в прямую, а фронтальная проекция Σ_2 совпадает с фронтальной плоскостью проекций Π_2 (рис. 3.20). Фронтально-проецирующая плоскость Γ перпендикулярна плоскости Π_2 , поэтому на чертеже ее фронтальная проекция Γ_2



вырождается в прямую, а горизонтальная проекция Γ_1 совпадает с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 (рис. 3.21).

Профильно-проецирующая плоскость Θ перпендикулярна плоскости Π_3 , поэтому на чертеже ее профильная проекция Θ_3 вырождается в прямую. Фронтальная проекция Θ_2

вырождается в прямую, а горизонтальная проекция Θ_1 совпадает с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 (рис. 3.21).

совпадает с фронтальной плоскостью проекций Π_2 , а горизонтальная проекция Θ_1 совпадает с Π_1 (рис. 3.22).

Задача 3.13

Через прямую q провести горизонтально-проецирующую плоскость Σ , наклоненную под углом 45° к фронтальной плоскости проекций (рис. 3.23). Через прямую t провести плоскости Δ и Γ , перпендикулярные к плоскостям Π_1 и Π_2 (рис. 3.24). Через прямую g провести профильно-проецирующую плоскость Θ , расположенную под углом 30° к горизонтальной плоскости проекций (рис. 3.25).

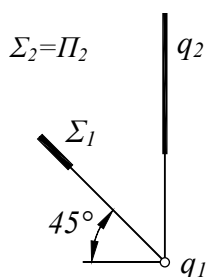


Рис. 3.23

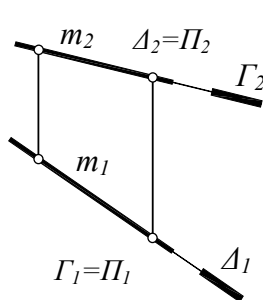


Рис. 3.24

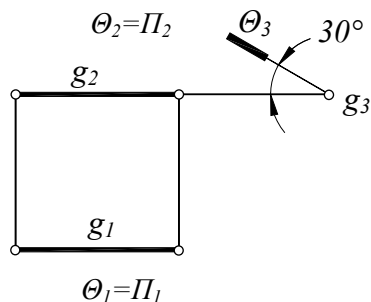


Рис. 3.25

Решение. На рис. 3.23 показана проецирующая прямая $q \perp \Pi_1$, через которую проходит искомая горизонтально-проецирующая плоскость Σ . Горизонтальная проекция плоскости Σ выродилась в прямую, наклоненную к осям координат под заданным углом 45° . Фронтальная проекция плоскости Σ совпадает с Π_2 . Проецирующую плоскость отмечают на чертеже утолщенной черточкой. Задача имеет два решения (второе решение найти самостоятельно).

На рис. 3.24 через прямую общего положения t проведены две разные плоскости – фронтально-проецирующая плоскость Γ и горизонтально-проецирующая плоскость Δ . Пересекаются ли между собой плоскости Γ и Δ ? Если пересекаются, то по какой линии?

На рис. 3.25 показана проецирующая прямая $g \perp \Pi_3$, через которую проходит профильно-проецирующая плоскость Θ . Профильная проекция плоскости Θ выродилась в прямую, наклоненную к оси u под заданным углом 30° . Задача имеет два решения (показать второе решение на рис. 3.25 самостоятельно).

Задача 3.14

В плоскости уровня Σ построить точку D , равноудаленную от лежащих в этой плоскости точек A, B, C (рис. 3.26).

Решение. Через три точки A, B, C , лежащие в одной плоскости, проходит единственная окружность. Центр этой окружности равноудален от заданных точек A, B, C . Следовательно, для решения задачи надо в плоскости Σ построить окружность, проходящую через точки A, B, C . Эта окружность изображается на горизонтальной плоскости проекций Π_1 без искажения, так как Σ параллельна Π_1 . Через середины O и O' отрезков AB и BC проводим перпендикуляры к этим отрезкам, которые пересекаются в искомой точке D . Задача решена.

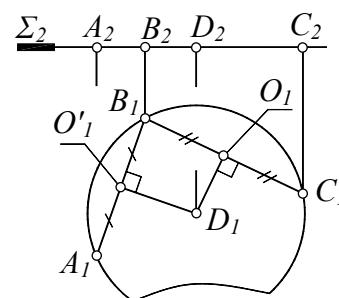


Рис. 3.26

Задача 3.15 (рис. 3.27)

Построить главные линии горизонтально-проецирующей плоскости $\Sigma(ABC)$.

Решение. Чтобы в плоскости $\Sigma(ABC)$ начертить горизонталь, надо отметить в этой плоскости пару каких-либо точек, находящихся на одном уровне относительно горизонтальной плоскости. Например, точки A и I (см. рис. 3.27) находятся на одной высо-

те, поэтому прямая $h=A-I$ – горизонталь, лежащая в плоскости $\Sigma(ABC)$. Горизонтальная проекция h_1 горизонтали совпадает с горизонтальной проекцией плоскости Σ .

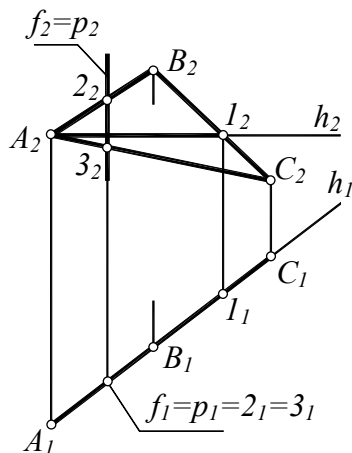


Рис. 3.27

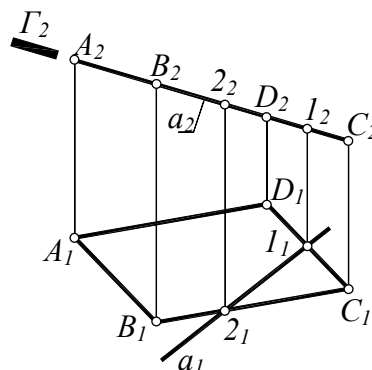


Рис. 3.28

Любая вертикальная прямая, лежащая в плоскости Σ , является как фронталью f , так и профильной прямой p одновременно (*почему?*). Отмечаем в плоскости Σ пару горизонтально-конкурирующих точек 2, 3 и проводим через них прямую $f=p$.

Задача 3.16 (рис. 3.28)

Построить произвольную прямую a , принадлежащую плоскости $\Gamma(ABCD)$.

Решение. Фронтально-проецирующая плоскость Γ задана плоской геометрической фигурой – параллелограммом $ABCD$. Отметим две произвольные точки 1, 2 на сторонах параллелограмма и проведем через них прямую a . Эта прямая принадлежит плоскости Γ . Фронтальная проекция a_2 прямой a совпадает с фронтальной проекцией плоскости Γ .

Задача 3.17

Определить положение точек A, B, C относительно фронтально-проецирующей плоскости Γ (рис. 3.29). **Определить положение точек D, E, F относительно горизонтально-проецирующей плоскости Σ** (рис. 3.30).

Решение. Точка A выше плоскости Γ . Точка B ниже плоскости Γ . Точка C принадлежит плоскости Γ (см. рис. 3.29).

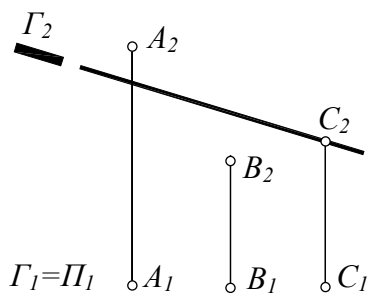


Рис. 3.29

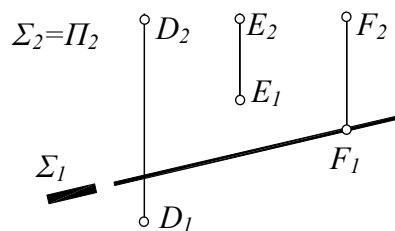


Рис. 3.30

Точка D перед плоскостью Σ . Точка E находится за плоскостью Σ . Точка F принадлежит плоскости Σ (см. рис. 3.30).

Тема 4

ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Задачи, в которых надо определить общие элементы геометрических фигур, заданных на чертеже, называют позиционными задачами. *Первая позиционная задача*: определение точки (или точек) пересечения произвольной кривой линии с произвольной поверхностью. В простейшем случае надо найти *точку пересечения прямой с плоскостью* (прямая – это простейшая линия, а плоскость – простейшая поверхность). *Вторая позиционная задача*: построение линии пересечения двух произвольных поверхностей. В простейшем случае надо найти *линию пересечения двух плоскостей* [1, лекция 3].

4.1. Простейшая позиционная задача

При решении позиционных задач используют проецирующие плоскости. Проецирующая плоскость – это вспомогательный “инструмент”, применяемый при решении позиционных задач. Рассмотрим простейшую позиционную задачу.

Построить линию пересечения плоскости $\Gamma(a \cap b)$ и проецирующей плоскости Σ (рис. 4.1). **Построить линию пересечения плоскости $\Delta(m \cap n)$ и проецирующей плоскости Θ** (рис. 4.2). **Построить линию пересечения плоскости $\Omega(c \cap d)$ и проецирующей плоскости Ψ** (рис. 4.3).

Решение. Фронтально-проецирующая плоскость Σ пересекает прямые a и b в точках 1 и 2 , которые вполне определяют искомую линию пересечения плоскости $\Gamma(a \cap b)$ и проецирующей плоскости Σ (см. рис. 4.1).

Фронтально-проецирующая плоскость Θ пересекает заданную плоскость $\Delta(m \cap n)$ по прямой линии l , параллельной прямой n . Проекции параллельных прямых параллельны, поэтому на чертеже достаточно отметить только одну точку $l = \Theta \cap m$ и провести через нее искомую линию l параллельно данной прямой n (см. рис. 4.2).

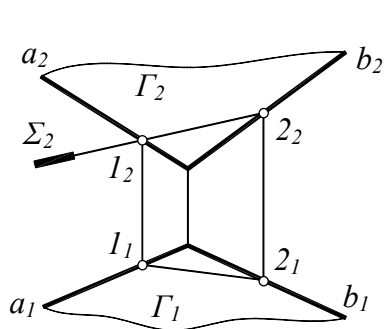


Рис. 4.1

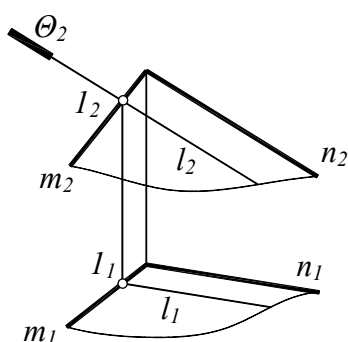


Рис. 4.2

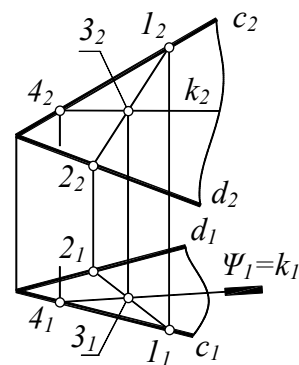


Рис. 4.3

Чтобы построить линию пересечения плоскостей $\Omega(c \cap d)$ и Ψ , в плоскости Ω проведена произвольная вспомогательная прямая $l-2$ (см. рис. 4.3). Проецирующая плоскость Ψ пересекает прямую $l-2$ и прямую c в точках 3 и 4 соответственно. Через эти точки проходит искомая линия $k=3-4$ пересечения плоскостей Ω и Ψ . Задача решена.

Примечание. В случае, представленном на рис. 4.3, для решения задачи проведена вспомогательная прямая $l-2$, лежащая в заданной плоскости, так как плоскость Ψ не пересекла начерченный участок прямой d . Но любая прямая – бесконечна. Поэтому можно *продлить* прямую d и найти точку $5=d \cap \Psi$ пересечения продленной прямой d с плоскостью Ψ . Тогда искомая

линия k пересечения плоскостей Ω и Ψ будет проведена через точки 4 и 5. Оба решения $k=3-4$ и $k=5-4$ тождественно совпадают (проверить самостоятельно).

4.2. Первая позиционная задача

Задача 4.1

Построить точку K пересечения прямой a с плоскостью $\Sigma(m||n)$. Определить видимость проекций (рис. 4.4).

Решение. Для построения точки пересечения прямой линии a с плоскостью общего положения $\Sigma(m||n)$ надо через прямую a провести вспомогательную проецирующую плоскость Ψ , затем найти линию пересечения $\Sigma \cap \Psi$ и отметить искомую точку K на пересечении найденной линии и заданной прямой a [1, п. 3.1.2]. Указанную последовательность действий записывают в виде алгоритма:

1. $a \subset \Psi \perp \Pi_1$ (через прямую a проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Ψ);
2. $\Sigma \cap \Psi = I-2$ (строим линию $I-2$ пересечения данной плоскости $\Sigma(m||n)$ и вспомогательной плоскости Ψ);
3. $a \cap (I-2) = K$ (отмечаем искомую точку K).

Задача решена (см. рис. 4.4).

Для определения видимости фронтальной проекции прямой a отмечаем пару фронтально-конкурирующих точек 4-5. Точка 4, лежащая на прямой a , находится *перед* точкой 5, лежащей на прямой m . Следовательно, точка 4 и прилегающий к ней участок прямой a будет виден на Π_2 . Смена видимости происходит в точке K .

Аналогичным образом, пара горизонтально-конкурирующих точек 2-3 позволяет определить видимость горизонтальной проекции прямой a . Точка 2, лежащая на прямой m , располагается *выше* точки 3, лежащей на прямой a , поэтому точка 3 и прилегающий к ней участок прямой a не виден на Π_1 .

Задача 4.2

Построить точку K пересечения прямой l с плоскостью $\Delta(ABC)$. Определить видимость проекций (рис. 4.5).

Решение. Проекции прямой l параллельны проекциям сторон треугольника ABC , но прямая l не параллельна ни одной из сторон этого треугольника (*почему?*).

Для поиска точки пересечения прямой l с плоскостью Δ выполняем три действия:

1. $l \subset \Gamma \perp \Pi_2$ (через прямую l проводим фронтально-проецирующую плоскость Γ);
2. $\Gamma \cap \Delta = g$ (строим линию g пересечения данной плоскости $\Delta(ABC)$ и вспомогательной плоскости Γ). Секущая плоскость Γ параллельна прямой AB , поэтому “линия разреза” g также параллельна AB . Для

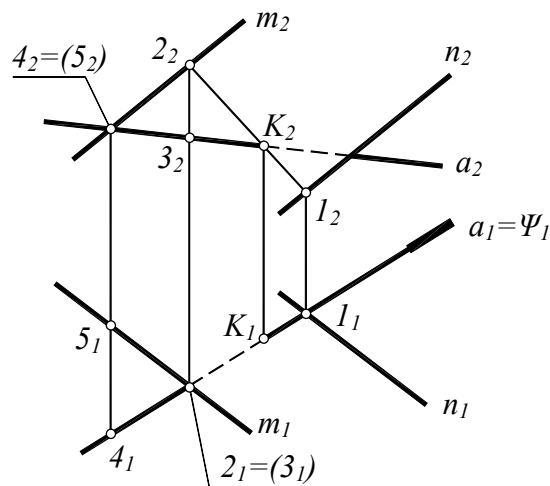


Рис. 4.4

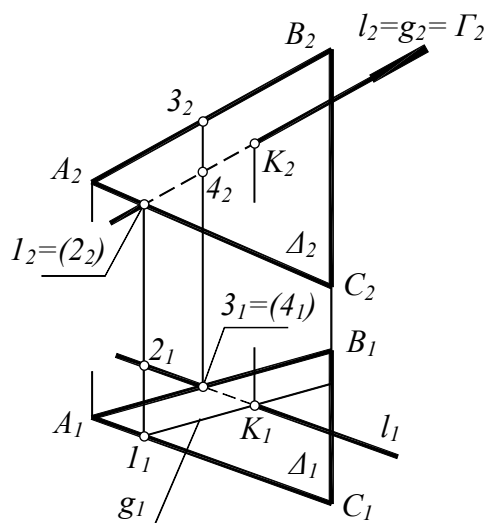


Рис. 4.5

построения горизонтальной проекции этой линии на чертеже отмечена точка $l = AC \cap \Gamma$ (см. рис. 4.5).

3. $l \cap g = K$ (отмечаем искомую точку K). Задача решена.

Для определения видимости фронтальной проекции прямой l отмечаем пару фронтально-конкурирующих точек 1-2. Точка 1, лежащая на прямой AC , находится *перед* точкой 2, лежащей на прямой l . Следовательно, точка 2 и прилегающий к ней участок прямой l невидимы на Π_2 (закрыты от зрителя плоскостью треугольника ABC). Смена видимости происходит в точке K .

Аналогично, пара горизонтально-конкурирующих точек 3-4 позволяет определить видимость горизонтальной проекции прямой l . Точка 3, лежащая на прямой AB , располагается *выше* точки 4, лежащей на прямой l , поэтому точка 4 и прилегающий к ней участок прямой l не виден на Π_1 (закрыт от зрителя плоскостью ABC).

Задача 4.3

Построить точку K пересечения фронтально-проецирующей прямой i с плоскостью $\Sigma(h \cap f)$ (рис. 4.6).

Решение. Задача содержит две особенности: 1) плоскость общего положения Σ задана не прямыми общего положения, а горизонталью и фронталью; 2) фронтальная проекция прямой i выродилась в точку. Несмотря на это, задача решается по общей схеме: через прямую i проводим вспомогательную секущую плоскость $\Psi \perp \Pi_2$, находим “линию разреза” $l-2 = \Sigma \cap \Psi$ и отмечаем искомую точку K на пересечении прямой i с линией 1-2. Очевидно, фронтальная проекция точки K совпадает с фронтальной проекцией всей прямой i (*почему?*).

Для выявления видимости на чертеже отмечены горизонтально-конкурирующие точки 3 и 4 (см. рис. 4.6). Точка 3, лежащая на прямой i , *выше* точки 4, лежащей в плоскости Σ . Значит, в окрестности точки 3 горизонтальная проекция прямой i *видима*.

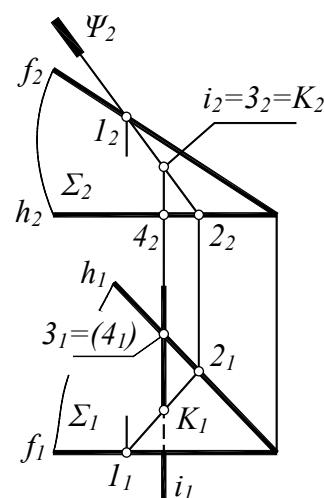


Рис. 4.6

Примечание. Вспомогательная секущая плоскость Ψ на рис. 4.6 выбрана фронтально-проецирующей. Можно было бы использовать горизонтально-проецирующую плоскость, проходящую через i , но тогда пришлось бы строить третью проекцию данных фигур (*почему?*).

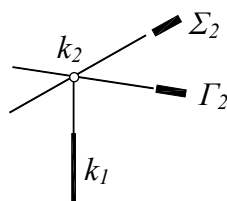
4.3. Вторая позиционная задача

Задача 4.4

Построить линии пересечения проецирующих плоскостей Σ и Γ , Δ и Θ , Ψ и Ω .

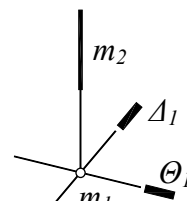
Решение (рис. 4.7).

1. Фронтально-проецирующие плоскости Σ и Γ пересекаются по фронтально-проецирующей прямой k . Фронтальная проекция k_2 прямой k вырождается в точку, лежащую на пересечении фронтальных проекций плоскостей Σ и Γ (см. рис. 4.7, а).

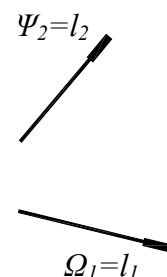


а)

2. Горизонтально - проецирующие плоскости Θ и Δ пересекаются по горизонтально-проецирующей прямой m . Горизонтальная проекция m_1 прямой m вырождается в точку, лежащую на пересечении горизонтальных проекций плоскостей Θ и Δ (см. рис. 4.7, б).



б)



в)

Рис. 4.7

3. Фронтальные проекции всех прямых, лежащих в плоскости Ψ , совпадают с фронтальной проекцией Ψ_2 плоскости Ψ (*почему?*). Горизонтальные проекции всех прямых, лежащих в плоскости Ω , совпадают с горизонтальной проекцией Ω_1 плоскости Ω (*почему?*). Прямая l , по которой пересекаются плоскости Ψ и Ω , лежит как в плоскости Ψ , так и в плоскости Ω . Следовательно, фронтальная проекция l_2 линии l должна совпадать с Ψ_2 , а горизонтальная проекция l_1 этой линии должна совпадать с Ω_1 (см. рис. 4.7, в).

Задача 4.5

Построить линию пересечения плоскостей $\Gamma(A, a)$ и $\Delta(B, b)$ (рис. 4.8).

Решение. Плоскости Γ и Δ пересекаются по прямой линии l , для построения которой надо найти две общие точки L, L' данных плоскостей. Искомая прямая l проходит через эти точки [1, п. 3.2].

Для построения точки L на чертеже (см. рис. 4.8) выполняем три действия:

1. $\Sigma \perp \Pi_l$ (проводим горизонтально-проецирующую плоскость Σ). Для упрощения дальнейших построений эта плоскость проведена через точки A и B .

2. $\Sigma \cap \Gamma = m$; $\Sigma \cap \Delta = n$ (определяем линии разреза $m = l-A$ и $n = 2-B$ заданных плоскостей Γ и Δ секущей плоскостью Σ).

3. $m \cap n = L$ (отмечаем точку пересечения найденных линий разреза). Точка L принадлежит обеим заданным плоскостям Γ, Δ .

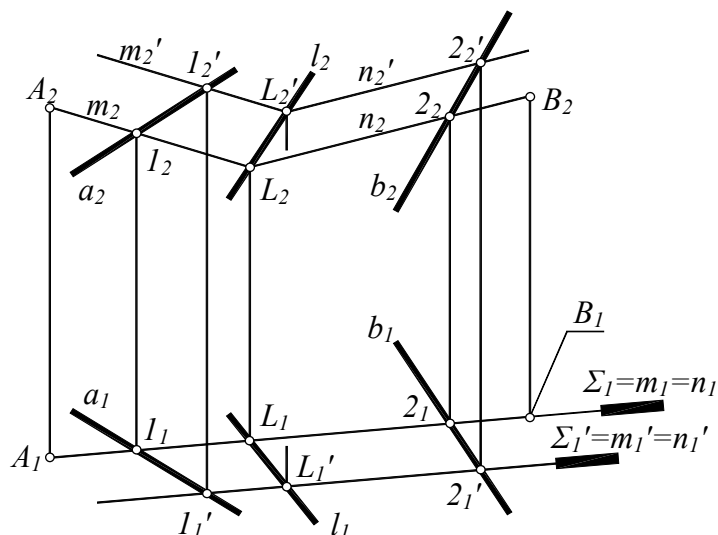


Рис. 4.8

Вторая общая точка L' данных плоскостей определяется аналогично: проводим еще одну вспомогательную секущую плоскость Σ' и снова повторяем действия 1...3. Для упрощения построений плоскость Σ' на рис. 4.8 проведена параллельно плоскости Σ . При этом новые линии разреза $m' = \Sigma' \cap \Gamma$ и $n' = \Sigma' \cap \Delta$ параллельны ранее построенным линиям m и n . Искомая линия l пересечения заданных плоскостей Γ и Δ проходит через найденные точки L и L' (см. рис. 4.8).

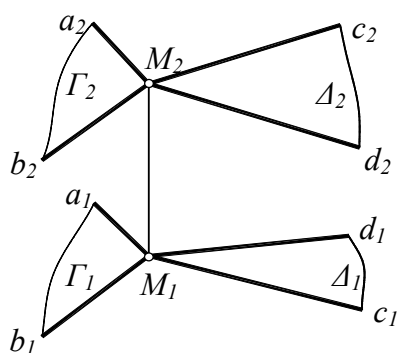


Рис. 4.9

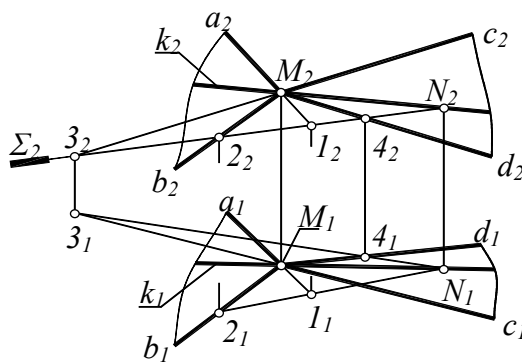


Рис. 4.10

Задача 4.6

Построить линию k пересечения плоскостей $\Gamma(a \cap b)$ и $\Delta(c \cap d)$ (рис. 4.9).

Решение. На чертеже уже указана одна общая точка данных плоскостей (точка M на рис. 4.9), поэтому достаточно найти еще одну их общую точку N . Искомая линия k пересечения плоскостей Γ и Δ пройдет через точки M, N .

Алгоритм построения точки N (рис. 4.10).

1. Проводим какую-либо вспомогательную секущую плоскость Σ (на рис. 4.10 эта плоскость выбрана фронтально-проецирующей): $\Sigma \perp P_2$.

2. Определяем линии разреза 1-2 и 3-4 плоскостей Γ и Δ секущей плоскостью Σ : $\Sigma \cap \Gamma(a \cap b) = 1-2$; $\Sigma \cap \Delta(c \cap d) = 3-4$. Чтобы на чертеже можно было отметить точки 1, 3 пересечения прямых a и c с плоскостью Σ , эти прямые пришлось продлить (см. рис. 4.10).

3. Отмечаем точку пересечения найденных линий 1-2 и 3-4: $N = (1-2) \cap (3-4)$.

Точка N принадлежит обоим заданным плоскостям Γ , Δ . Для окончательного решения задачи проводим искомую прямую $k = \Gamma \cap \Delta$ через точки M , N (см. рис. 4.10).

Задача 4.7

Построить линию пересечения плоскостей общего положения $\Delta(h \cap f)$ и $\Delta'(h' \cap f')$ (рис. 4.11).

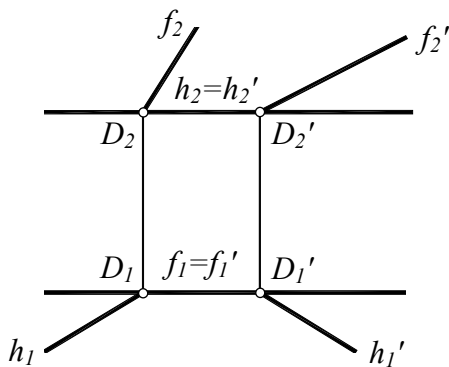


Рис. 4.11

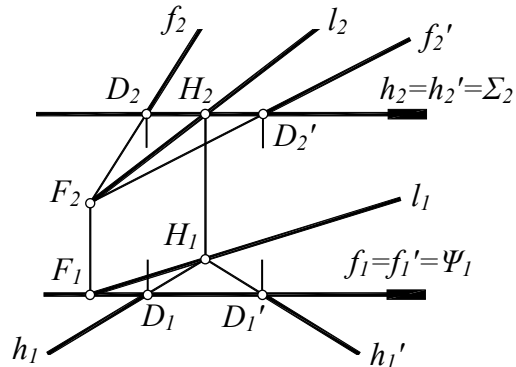


Рис. 4.12

Решение. Каждая из плоскостей задана горизонталью и фронталью. Фронтальные проекции горизонталей совпадают ($h_2 = h_2'$). Горизонтальные проекции фронталей также совпадают ($f_1 = f_1'$). Это вовсе не означает, что горизонтали h , h' или фронталы f , f' совпадают в пространстве (*почему?*).

Согласно условию задачи, горизонтали h и h' лежат в одной и той же горизонтальной плоскости уровня (плоскость Σ на рис. 4.12), следовательно, они должны пересекаться. Для построения на чертеже точки H пересечения горизонталей достаточно продлить их до пересечения в точке $H = h \cap h'$ (см. рис. 4.12).

Фронталы f и f' , согласно условию, лежат в одной и той же фронтальной плоскости уровня (плоскость Ψ на рис. 4.12), следовательно, они пересекаются. Для построения точки $F = f \cap f'$ достаточно продлить фронталы f и f' до их взаимного пересечения.

Точки H и F принадлежат обоим заданным плоскостям Δ и Δ' , поэтому искомая линия l пересечения этих плоскостей проходит через точки H и F .

Примечание. Решение, представленное на рис. 4.12, выполнено в полном соответствии с состоящей из трех действий схемой решения второй позиционной задачи [1, п. 3.2]. Действительно, для построения точки H выполнены три действия: 1) проведена вспомогательная секущая плоскость Σ ; 2) определены линии разреза h и h' заданных плоскостей вспомогательной секущей плоскостью Σ ; 3) отмечена точка $H = h \cap h'$ пересечения найденных линий разреза. Аналогично выполнено построение точки F : проведена секущая плоскость Ψ , найдены линии разреза f и f' , отмечена точка $F = f \cap f'$ пересечения найденных линий разреза.

Задача 4.8

Построить линию пересечения треугольника ABC и параллелограмма $KLMN$.

Решение (рис. 4.13). Плоские фигуры пересекаются по прямой линии, для построения которой надо найти две общие точки этих фигур. Напомним, что для построе-

ния общей точки плоских фигур следует провести вспомогательную секущую плоскость, начертить линии разреза данных фигур, затем отметить точку пересечения найденных линий разреза.

Для построения еще одной общей точки надо провести еще одну вспомогательную секущую плоскость, которая может быть проведена вполне произвольно. Например, на рис. 4.13 секущая плоскость Σ проведена через сторону AC треугольника ABC . Плоскость Σ “разрезала” плоскость параллелограмма по линии $I-2$. На пересечении линии $I-2$ со стороной AC отмечена точка E – точка пересечения стороны AC с плоскостью параллелограмма. Запишем алгоритм построения точки E .

1. $AC \subset \Sigma \perp P_2$ (через AC проведена фронтально-проецирующая плоскость Σ).
2. $\Sigma \cap KLMN = I-2$ (найдена линия $I-2$ пересечения параллелограмма и плоскости Σ).
3. $E = AC \cap (I-2)$ (отмечена точка E пересечения стороны AC с плоскостью параллелограмма).

Точка D пересечения стороны BC с плоскостью параллелограмма определяется аналогично (через BC проведена вспомогательная плоскость Δ , найдена линия разреза $\Delta \cap KLMN = 3-4$, отмечена точка $D = BC \cap KLMN$). Через точки D и E проходит искомая линия пересечения треугольника ABC и параллелограмма $KLMN$ (см. рис. 4.13). Обе плоские фигуры считаются непрозрачными, поэтому на чертеже требуется определить видимость их проекций.

Определение видимости проекций фигур на плоскости P_2 : отмечаем пару каких-нибудь фронтально-конкурирующих точек, например, точки 2 и 5. Точка 5, лежащая на стороне AC , расположена в пространстве *перед* точкой 2, лежащей на стороне LM . Следовательно, точка 5 и прилегающий к ней участок прямой AC будет виден на плоскости P_2 . Смена видимости происходит в точке E . Как определить видимость всех остальных сторон треугольника и параллелограмма на плоскости P_2 ? Надо ли для этого использовать дополнительные пары конкурирующих точек?

Видимость фигур на горизонтальной плоскости проекций определена с помощью пары горизонтально-конкурирующих точек 6 и 7. Точка 6, лежащая на KL , *выше*, чем точка 7, лежащая на AC , поэтому на плоскости P_1 проекция прямой KL – видима, а проекция стороны AC – невидима. Как определить видимость горизонтальных проекций остальных сторон треугольника и параллелограмма?

Примечание. Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных проекциями треугольника и параллелограмма – это *вторая* позиционная задача. Но в рассмотренном примере для решения второй позиционной задачи была дважды использована схема решения *первой* позиционной задачи.

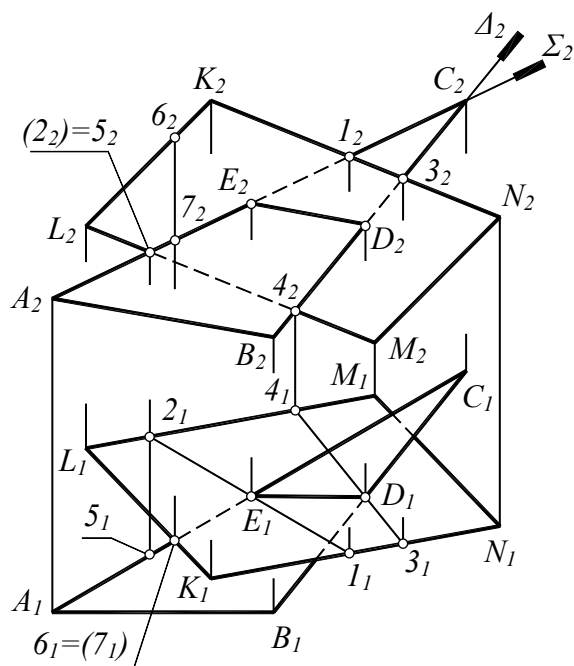


Рис. 4.13

Тема 5

СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Способ замены плоскостей проекций основан на изменении положения системы координат относительно заданных неподвижных геометрических фигур. Замена плоскостей проекций позволяет: 1. преобразовать прямую общего положения в прямую уровня; 2. преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую; 3. преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость; 4. преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня. При этом решение многих геометрических задач, как метрических, так и позиционных, заметно упрощается [1, лекция 5].

Задача 5.1

Преобразовать прямую общего положения AB в проецирующую прямую (рис. 5.1).

Решение. Для решения задачи требуется выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены прямая общего положения AB преобразуется в прямую уровня. В результате второй замены прямая уровня преобразуется в проецирующую прямую.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой AB и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 . В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая AB становится прямой уровня (см. рис. 5.1).

Плоскость Π_4 перпендикулярна плоскости Π_1 , поэтому высоты точек A и B (расстояния от этих точек до плоскости Π_1) в новой системе координат Π_1/Π_4 равны высотам этих точек в исходной системе координат Π_2/Π_1 . Используя это инвариантное свойство, находим проекции A_4, B_4 точек A и B на плоскости проекций Π_4 (переносим координаты точек A и B с плоскости Π_2 на плоскость Π_4). В новой системе координат Π_1/Π_4 отрезок AB стал занимать положение прямой уровня ($AB \parallel \Pi_4$), поэтому на новую плоскость проекций Π_4 весь отрезок проецируется в натуральную величину.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5 , перпендикулярную прямой AB . В новой системе координат Π_4/Π_5 прямая AB становится проецирующей прямой. Задача решена (см. рис. 5.1).

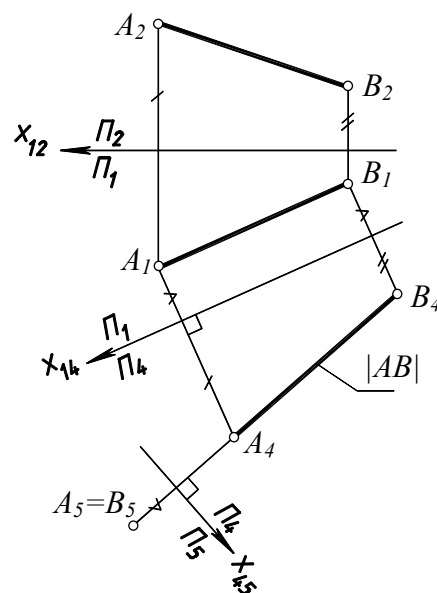


Рис. 5.1

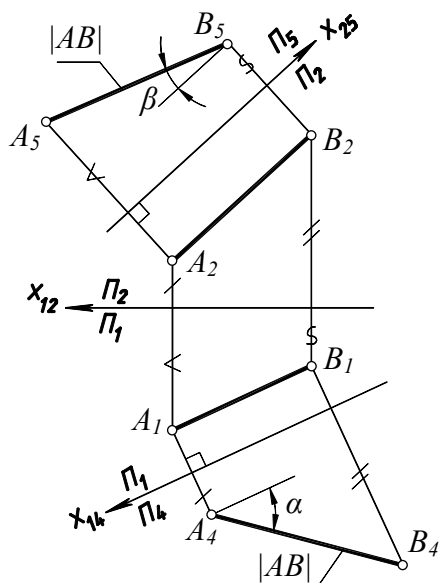


Рис. 5.2

Задача 5.2

Способом замены плоскостей проекций определить длину отрезка AB и углы наклона этого отрезка к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 (рис. 5.2).

Решение. Располагая новой плоскостью проекций Π_4 параллельно отрезку и перпендикулярно плоскости Π_1 , получаем чертеж отрезка AB в новой системе координат Π_1/Π_4 . Отрезок проецируется на плоскость Π_4 “в натуральную величину” (почему?). Истинный угол α наклона отрезка AB к гори-

горизонтальной плоскости проекций измеряется на плоскости Π_4 как угол между проекцией A_4B_4 отрезка AB и осью x_{14} (*почему?*).

Аналогично определяется угол наклона отрезка к плоскости Π_2 : вводим в рассмотрение плоскость проекций Π_5 , параллельную отрезку и перпендикулярную плоскости Π_2 . В новой системе координат Π_2/Π_5 отрезок AB становится “прямой уровня”, что позволяет отметить на чертеже угол наклона β прямой AB к плоскости Π_2 (см. рис. 5.2).

Проверка. Если чертеж выполнен правильно, то $|A_4B_4| = |A_5B_5| = |AB|$ (*почему?*). Рекомендуется также решить эту задачу способом прямоугольного треугольника и сравнить полученные результаты.

Задача 5.3

Найти истинную форму треугольника ABC и величину угла при вершине B .

Решение. Для определения истинной формы любой плоской фигуры надо ввести в рассмотрение новую плоскость проекций, расположенную параллельно этой фигуре, и ортогонально спроецировать фигуру на новую плоскость проекций (рис. 5.3).

Рассматриваемая задача упрощается тем, что, согласно условию, плоскость треугольника ABC занимает проецирующее положение (плоскость ABC перпендикулярна плоскости Π_1). Поэтому можно сразу указать новую плоскость проекций Π_4 , параллельную плоскости треугольника. При этом новая плоскость проекций Π_4 будет располагаться перпендикулярно к плоскости Π_1 (*почему?*).

В новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость треугольника ABC становится плоскостью уровня, параллельной плоскости Π_4 . Весь треугольник проецируется на Π_4 “в натуральную величину”. Угол при вершине B равен 90° .

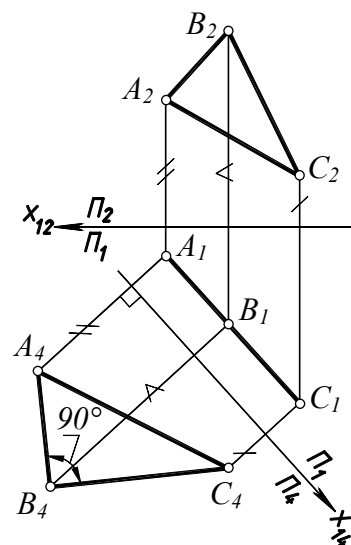


Рис. 5.3

Задача 5.4

Построить истинную фигуру параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.4).

Решение. В отличие от предыдущей задачи, плоскость параллелограмма занимает не проецирующее, а общее положение в пространстве. Поэтому потребуются выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены плоскость общего положения $ABCD$ преобразуется в проецирующую плоскость. В результате второй замены проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

Первая замена плоскостей проекций.

Вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно горизонтали h , лежащей в плоскости Σ . Вместо чертежа в системе координат Π_2/Π_1 получаем чертеж в новой системе координат Π_4/Π_1 . Напомним, что координата точки на новой плоскости проекций Π_4 равна координате этой точки на заменяемой плоскости проекций Π_2 [1, лекция 5]. Например, координата точки C

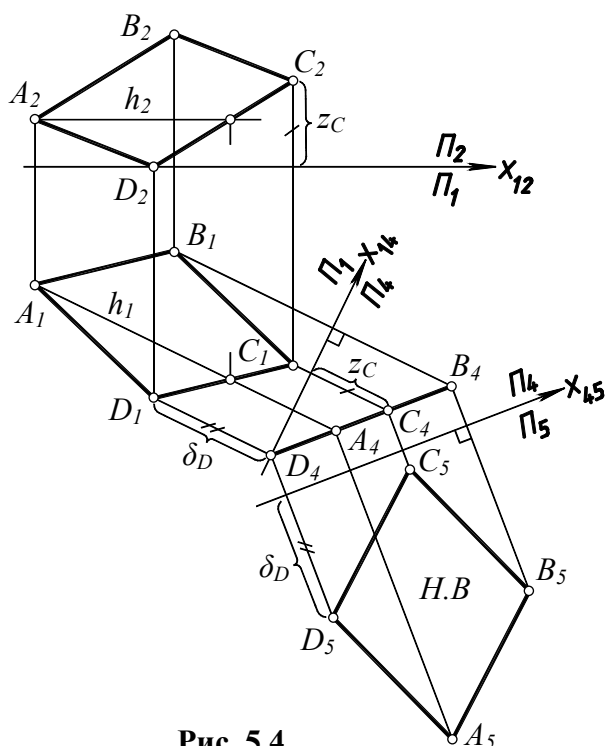


Рис. 5.4

на плоскости проекций Π_4 равна координате z_C точки C на плоскости Π_2 . В новой системе координат Π_4/Π_1 плоскость $ABCD$ заняла проецирующее положение (*почему?*). Проекция параллелограмма $A_4B_4C_4D_4$ на плоскость Π_4 выродилась в прямую линию.

Вторая замена плоскостей проекций. Вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_5 , расположив ее параллельно плоскости $ABCD$. Получаем чертеж в новой системе координат Π_4/Π_5 . Координата любой точки на новой плоскости проекций Π_5 равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций Π_1 . Например, координата точки D_5 на плоскости проекций Π_5 равна координате δ_D точки D_1 на плоскости Π_1 . Проекция $A_5B_5C_5D_5$ – натуральная величина (Н.В) параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 5.4).

Задача 5.5

Построить горизонтальную проекцию окружности ρ с центром O , лежащей во фронтально-проецирующей плоскости Σ . Радиус окружности равен R (рис. 5.5).

Решение. Чтобы использовать способ замены плоскостей проекций, следует от исходного *безосного* чертежа (см. рис. 5.5) перейти к *осному* чертежу. Для этого надо начертить ось x_{12} перпендикулярно вертикальной линии связи O_1-O_2 (в любом месте между проекциями). Указав ось x_{12} исходной системы координат Π_1/Π_2 , вводим в рассмотрение

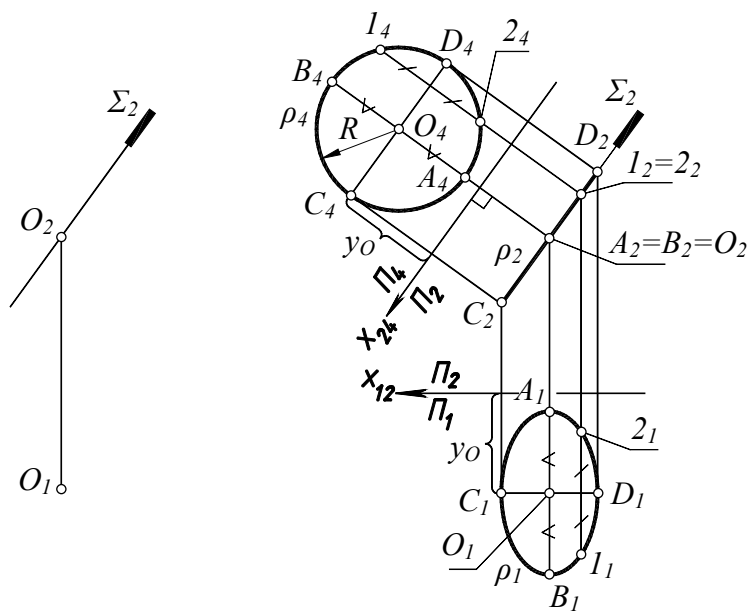


Рис. 5.5

Рис. 5.6

новую плоскость проекций Π_4 , размещая ее параллельно плоскости Σ (рис. 5.6). Получаем чертеж окружности в новой системе координат Π_2/Π_4 , причем плоскость Σ , содержащая окружность, в новой системе координат стала плоскостью уровня. Ортогональная проекция ρ_4 окружности ρ на плоскость Π_4 – окружность заданного радиуса R (*почему?*). Координата y_O центра окружности на новой плоскости проекций Π_4 равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций Π_1 (*почему?*).

В новой системе координат Π_2/Π_4 отмечаем характерные точки A, B, C, D окружности. Находим проекции этих точек на плоскости Π_1 исходной системы координат Π_1/Π_2 , используя известное правило: *координата точки на новой плоскости проекций равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций* (координата точки – это расстояние от ее проекции до оси координат) [1, лекция 5]. Например, координата y_O точек O, C, D на новой плоскости Π_4 равна координате этих точек на заменяемой плоскости Π_1 (см. рис. 5.6).

Ортогональная проекция ρ_1 окружности ρ на плоскость Π_1 – эллипс. Чтобы возможно точнее построить этот эллипс, надо использовать не только проекции A_1, B_1, C_1, D_1 характерных точек, но также найти проекции дополнительных (промежуточных) точек окружности ρ . На рис. 5.6 показано построение проекций дополнительных точек $1, 2$, лежащих на окружности ρ . Задача решена.

Задача 5.6

Построить проекции и определить длину перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую a общего положения (рис. 5.7).

Решение. Если прямая a занимает проецирующее положение, например, $a \perp \Pi_1$ (см. рис. 5.7, а), то задача решается без затруднений, поскольку в этом случае взаимно перпендикулярные прямые KA и a изображаются на Π_2 сторонами прямого угла, а горизонтальная проекция K_1A_1 отрезка KA равна его истинной длине (*почему?*).

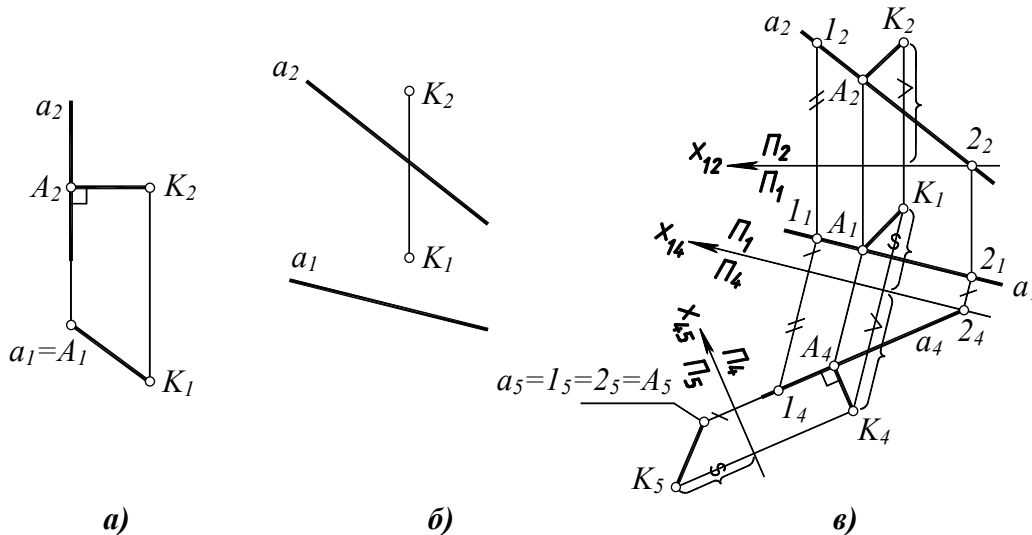


Рис. 5.7

Если прямая a занимает общее положение (рис. 5.7, б), то надо предварительно преобразовать данную прямую в проецирующую. Для этого необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены прямая общего положения преобразуется в прямую уровня. В результате второй замены прямая уровня преобразуется в проецирующую прямую.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой a и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 (рис. 5.7, в). В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая a становится прямой уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5 , перпендикулярную прямой a . В новой системе координат Π_4/Π_5 прямая a становится проецирующей, что позволяет провести к ней перпендикуляр из точки K (также, как это было сделано на рис. 5.7, а).

В системе координат Π_4/Π_5 отмечаем точку основание A перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую a , затем с помощью линий связи “возвращаем” точку A в исходную систему координат Π_2/Π_1 (см. рис. 5.7, в). Истинная длина перпендикуляра AK равна длине его проекции A_5K_5 . Длина перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую a , указывает кратчайшее расстояние между точкой и прямой, которое называют *расстоянием от точки до прямой*.

Задача 5.7

Определить расстояние $|AB|$ между параллельными прямыми a и b (рис. 5.8, а). Построить проекции отрезка AB в исходной системе координат Π_2/Π_1 .

Решение. Преобразуем данные параллельные прямые a, b общего положения в проецирующие прямые. Для этого надо выполнить две замены плоскостей проекций.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямым a, b и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 (рис. 5.8, б). В новой системе координат Π_1/Π_4 прямые a, b становятся прямыми уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5 , перпендикулярную прямым a, b . В новой системе координат Π_4/Π_5 прямые a, b становятся проецирующими прямыми.

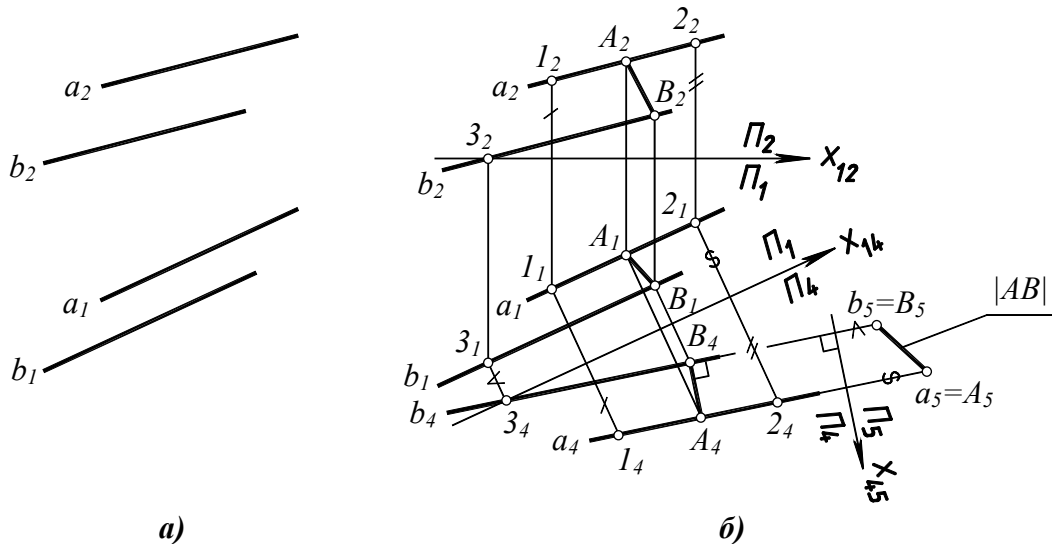


Рис. 5.8

Для решения задачи надо измерить расстояние между проекциями a_5, b_5 данных прямых a, b . Общий перпендикуляр AB к данным прямым изображается на плоскости Π_4 отрезком A_4B_4 , перпендикулярным к проекциям a_4, b_4 прямых a, b (почему?). Построив проекции отрезка AB в системе координат Π_4/Π_5 , “возвращаем” его с помощью линий связи в исходную систему координат Π_2/Π_1 .

Задача 5.8

Определить расстояние $|AK|$ от точки A до плоскости $\Sigma(BCD)$ общего положения (рис. 5.9). Построить проекции отрезка AK в исходной системе координат.

Решение. Преобразуем чертеж так, чтобы плоскость общего положения $\Sigma(BCD)$ заняла проецирующее положение. Для этого вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно горизонтали h , лежащей в плоскости $\Sigma(BCD)$.

В новой системе координат Π_1/Π_4 проекция $B_4C_4D_4$ плоскости $\Sigma(BCD)$ вырождается в прямую линию. Из точки A_4 опускаем перпендикуляр A_4K_4 на вырожденную проекцию $B_4C_4D_4$ плоскости $\Sigma(BCD)$. Искомое расстояние от точки A до плоскости Σ равно длине отрезка A_4K_4 .

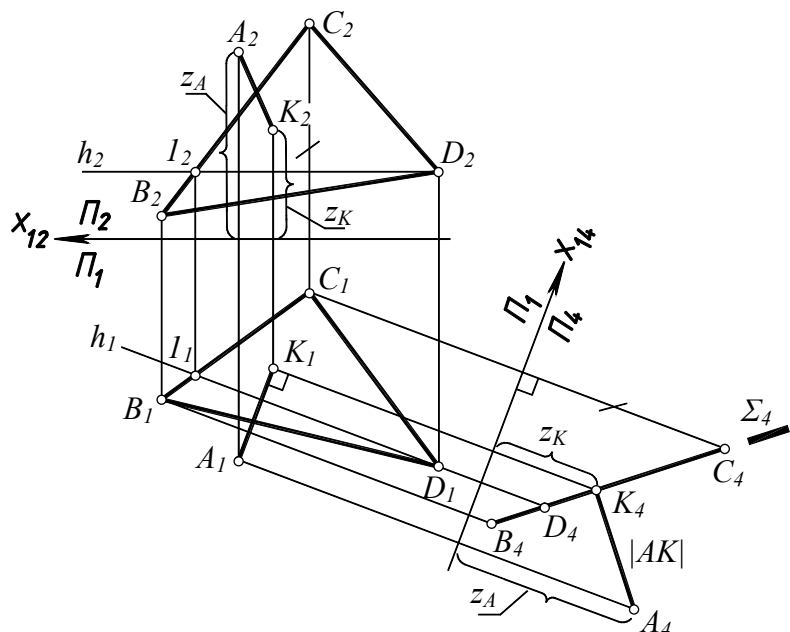


Рис. 5.9

Как построить проекции отрезка AK в исходной системе координат? В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая AK является прямой уровня (прямая AK параллельна плоскости Π_4), поэтому проекция A_1K_1 отрезка параллельна координатной оси x_{14} . С учетом этого находим проекцию K_1 точки K . Чтобы найти фронтальную проекцию точки K в исходной системе координат Π_2/Π_1 , используем условие принадлежности точки K к плоскости треугольника BCD .

Проверка. Если чертеж выполнен верно, то координата z_K точки K на заменяемой плоскости проекций (то есть на Π_2) должна быть равна координате этой же точки на новой плоскости проекций (то есть на Π_4). Это инвариантное свойство чертежа позволяет построить фронтальную проекцию K_2 точки K без использования условия принадлежности точки K к плоскости треугольника (как?).

Задача 5.9

Определить расстояние $|KL|$ между скрещивающимися прямыми AB и CD .

Решение. Чтобы определить расстояние между непересекающимися прямыми, надо построить их *общий перпендикуляр* $d=KL$. Прямая d перпендикулярна к обеим заданным прямым и пересекает их в точках K, L . Длина отрезка KL есть кратчайшее расстояние между данными скрещивающимися прямыми.

Пусть одна из прямых, например, прямая CD – горизонтально-проецирующая прямая. В этом случае искомый общий перпендикуляр d прямых AB и CD располагается в пространстве параллельно горизонтальной плоскости проекций (рис. 5.10).

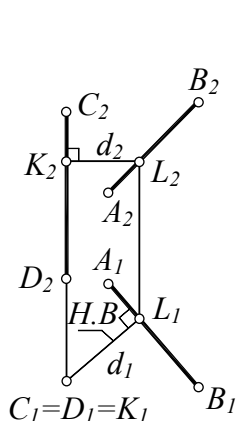


Рис. 5.10

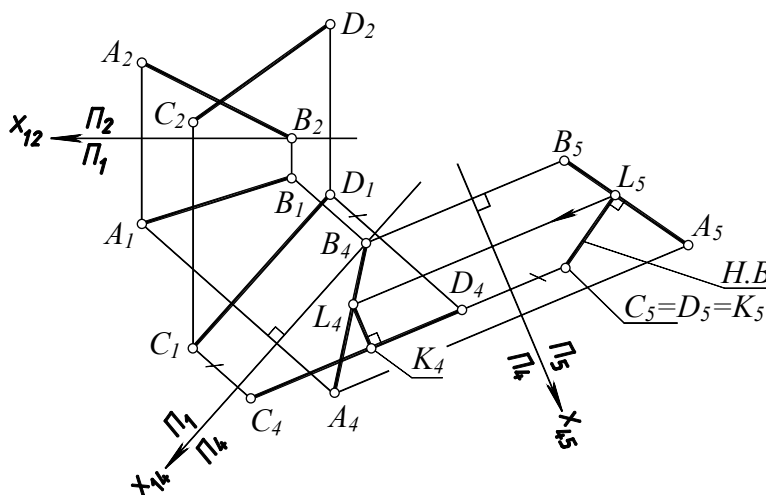


Рис. 5.11

Прямая d перпендикулярна к AB , то есть d и AB – стороны прямого угла. Прямой угол, образованный горизонталью d и прямой общего положения AB , проецируется на Π_1 прямым углом (в соответствии с теоремой о проекциях прямого угла [1, п. 4.2]). Поэтому на чертеже (см. рис. 5.10) горизонтальная проекция $d_1=K_1L_1$ общего перпендикуляра d проведена перпендикулярно к горизонтальной проекции A_1B_1 прямой AB . Длина отрезка K_1L_1 равна искомому расстоянию (Н.В) между прямыми AB и CD . Таким образом, если одна из прямых занимает проецирующее положение, то задача легко решается (см. рис. 5.10).

Пусть требуется определить расстояние между двумя прямыми AB и CD общего положения (рис. 5.11). В этом случае надо предварительно преобразовать чертеж так, чтобы одна из прямых заняла проецирующее положение. Затем задача будет решена так, как показано на рис. 5.10. Например, преобразуем чертеж так, чтобы прямая CD стала проецирующей прямой. Для этого надо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой CD и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 (см. рис. 5.11). В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая CD становится прямой уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5 , перпендикулярную прямой CD . Плоскость Π_5 располагается перпендикулярно к плоскости Π_4 . В новой системе координат Π_4/Π_5 прямая CD становится проецирующей прямой.

В системе координат Π_4/Π_5 задача решается так, как показано на рис. 5.10. Проекция K_5L_5 общего перпендикуляра данных прямых проведена перпендикулярно к проекции A_5B_5 прямой общего положения AB . Проекция K_4L_4 параллельна оси x_{45} (см. рис. 5.11). Истинный размер $|KL|$ отрезка KL (расстояние между прямыми AB и CD) измеряется на плоскости проекций Π_5 : $|KL|=K_5L_5$. Задача решена.

Задача 5.10

Построить проекции центра O окружности, проходящей через вершины заданного треугольника ABC (рис. 5.12).

Решение. Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы плоскость общего положения ABC заняла положение плоскости уровня. Для этого потребуется выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены плоскость общего положения ABC преобразуется в проецирующую плоскость. В результате второй замены проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно горизонтали $h=A-I$, лежащей в плоскости ABC . В новой системе координат Π_4/Π_1 плоскость ABC стала занимать проецирующее положение, ее проекция на Π_4 выродилась в прямую линию.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_5 , параллельную плоскости ABC . В новой системе координат Π_4/Π_5 плоскость ABC становится плоскостью уровня, треугольник ABC проецируется на Π_5 “в натуральную величину”.

На плоскости Π_5 вычерчиваем проекцию r_5 окружности r , проходящей через вершины треугольника (как?), и в системе координат Π_4/Π_5 отмечаем проекции O_4, O_5 центра этой окружности.

Чтобы найти проекции центра O в системе координат Π_4/Π_1 , используем инвариантное свойство чертежа: координата точки O на плоскости проекций Π_5 (то есть расстояние от оси x_{45} до точки O_5) равно координате этой же точки на плоскости Π_1 (то есть расстоянию от оси проекций x_{14} до точки O_1). Построение проекции O_2 точки O выполняется либо из условия принадлежности этой точки к плоскости треугольника ABC , либо с учетом равенства координат проекций точки O на плоскостях проекций Π_4 и Π_2 . Задача решена.

Примечание. Проекции r_1, r_2 окружности r в исходной системе координат – эллипсы (почему?). Для их построения надо отметить несколько вспомогательных точек на начерченной проекции r_5 окружности r , затем перенести эти точки на исходный чертеж (в систему координат Π_2/Π_1) и соединить найденные точки плавной кривой. На рис. 5.12 показано построение характерной (“опорной”) точки D , принадлежащей окружности r . Отрезок O_1D_1 – малая полуось

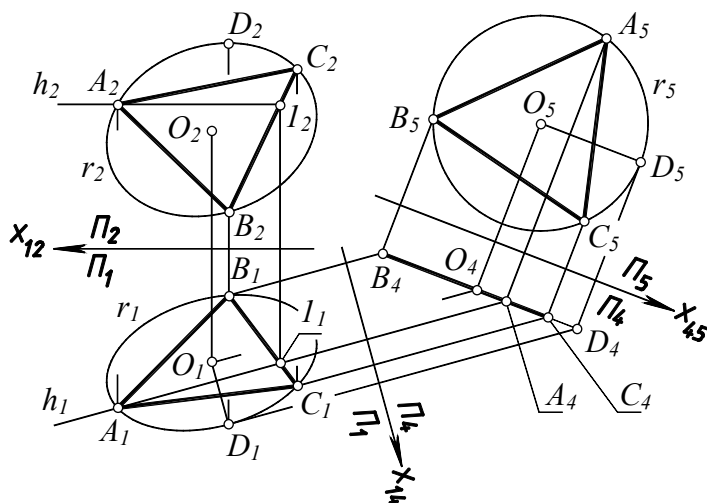


Рис. 5.12

эллипса r_1 . Точка D_2 – фронтальная проекция наивысшей точки окружности r в системе координат Π_2/Π_1 . Большие оси эллипсов r_1 и r_2 равны между собой и равны диаметру окружности r_3 (почему?).

Задача 5.11

Построить множество точек, равноудаленных от сторон двугранного угла, образованного плоскостями $\Gamma(ABC)$ и $\Delta(BCD)$ (рис. 5.13).

Решение. Пусть в пространстве “начерчен” двугранный угол, образованный пересекающимися по прямой BC плоскостями $\Gamma(ABC)$ и $\Delta(BCD)$ (рис. 5.13). Все точки пространства, равноудаленные от плоскостей Γ и Δ , лежат в *биссекторной плоскости* Θ двугранного угла $\Gamma \cap \Delta$, проходящей через ребро BC этого угла и делящей его пополам.

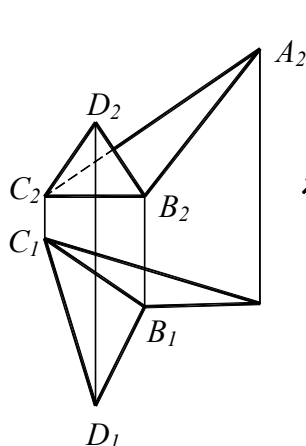


Рис. 5.13

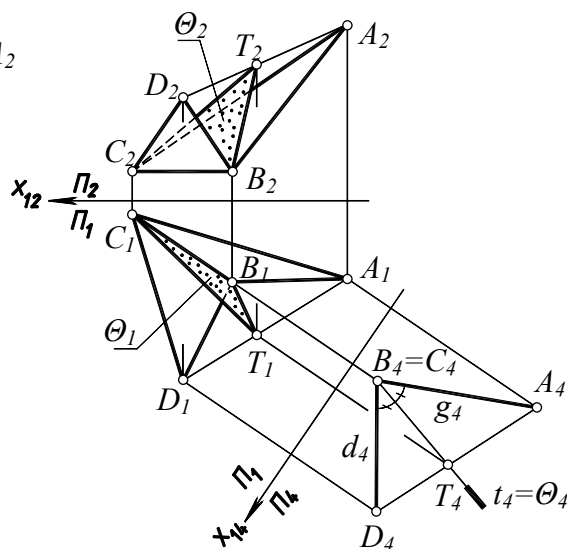


Рис. 5.14

Как построить биссекторную плоскость на чертеже? Преобразуем ребро BC в проецирующую прямую. Для этого достаточно выполнить всего одну замену плоскостей проекций, так как, согласно условию задачи, ребро BC – прямая уровня (горизонталь). Введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно горизонтали BC (рис. 5.14).

В новой системе координат Π_4/Π_1 плоскости Γ и Δ (стороны двугранного угла) стали занимать проецирующее положение. Проекция всего двугранного угла на плоскости Π_4 выродилась в прямые g_4 и d_4 , пересекающиеся в точке $B_4=C_4$ (см. рис. 5.14). Проекция Θ_4 искомой биссекторной плоскости Θ выродилась в биссектрису t_4 угла $g_4 \cap d_4$.

Чтобы указать положение биссекторной плоскости в исходной системе координат Π_2/Π_1 , на чертеже отмечена точка $T=AD \cap \Theta$ пересечения вспомогательной прямой AD с биссекторной плоскостью Θ . Искомая плоскость вполне определена точками B, C, T .

Для определения видимости проекций отрезков AC, BD, TC в исходной системе координат были использованы пары конкурирующих точек, не показанные на рис. 5.14.

Задача 5.12

Определить величину двугранного угла φ при ребре AB , образованного скатами крыши здания (рис. 5.15).

Решение. Преобразуем чертеж так, чтобы прямая AB в новой системе координат стала проецирующей прямой. Для этого требуется выполнить две последовательные замены плоскостей проекций.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой AB и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 . В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая AB становится прямой уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5 , перпендикулярную прямой AB . Плоскость Π_5 располагается перпендикулярно к плоскости Π_4 (*почему?*). В новой системе координат Π_4/Π_5 прямая AB становится проецирующей прямой, а проекция всего двугранного угла φ на плоскости Π_5 вырождается в две пересекающиеся прямые, угол между которыми определяет истинную величину двугранного угла φ при ребре AB .

Примечание. При выполнении геометрических преобразований, показанных на рис. 5.15, были использованы точки 1 и 2, произвольно отмеченные на ребрах крыши, образующих искомым двугранный угол φ .

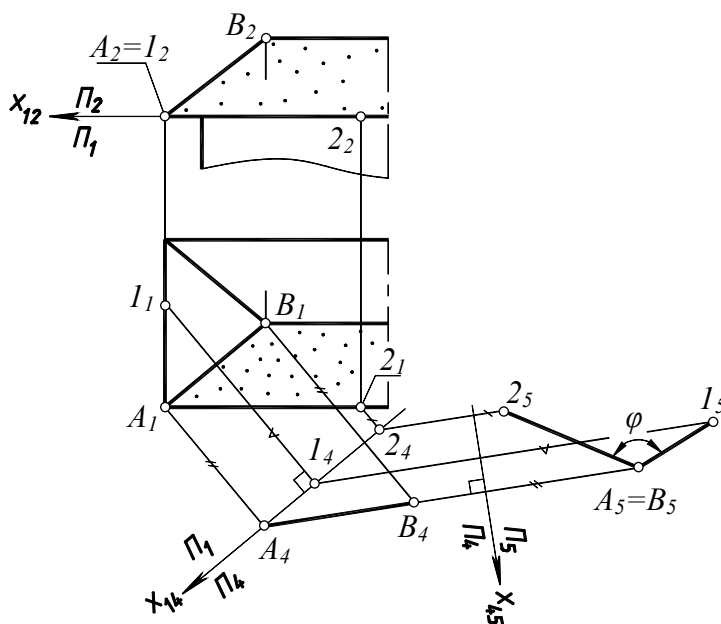


Рис. 5.15

Тема 6

ТОЧКИ И ЛИНИИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Во многих задачах начертательной геометрии требуется выполнить построение (на проекционном чертеже) точек и линий, принадлежащих заданной поверхности. Решение подобных задач выполняют на основании “*признаков принадлежности*”:

- линия принадлежит поверхности, если все точки этой линии принадлежат поверхности;
- точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии на этой поверхности.

Если чертеж поверхности выполнен правильно, то на чертеже могут быть указаны проекции точек и линий, принадлежащих поверхности. *Поверхность на чертеже считается заданной, если по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, можно построить ее вторую проекцию* [1, п. 6.2].

6.1. Многогранники

Многогранник – пространственная геометрическая фигура, со всех сторон ограниченная плоскими многоугольниками (гранями). Примеры многогранников – призма, пирамида.

Задача 6.1

Построить недостающие проекции точек A , B , C на поверхности пирамиды. Построить профильную проекцию пирамиды (рис. 6.1).

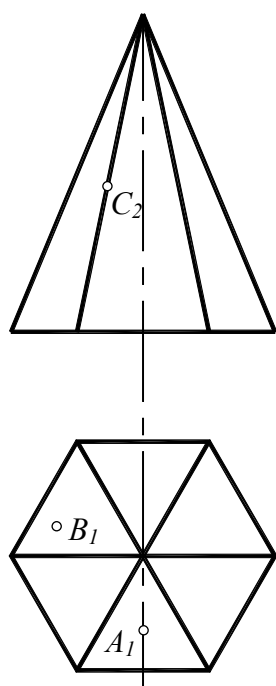


Рис. 6.1

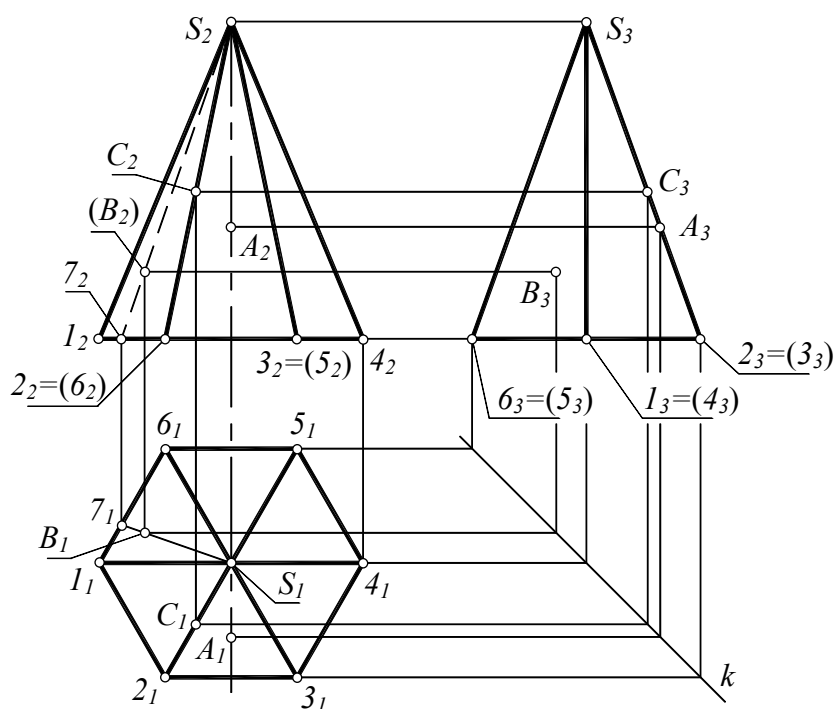


Рис. 6.2

Решение. Указываем профильную проекцию S_3 вершины S пирамиды. Линия связи S_2-S_3 – горизонтальная. Расстояние между проекциями S_2 и S_3 выбирается произвольно. Линия преломления k проходит через точку излома ломаной линии связи S_1-S_3 (рис. 6.2). Обозначив точки в основании пирамиды (точки $1...6$), находим их профильные

проекция с помощью линии преломления и с учетом условий связи между проекциями точек на комплексном чертеже.

Точка A принадлежит профильно-проецирующей грани $S23$, профильная проекция которой вырождается в прямую линию. С помощью линии преломления находим профильную проекцию точки A , затем с помощью горизонтальной линии связи находим ее фронтальную проекцию.

Точка B лежит на грани $S16$. Проводим через B вспомогательную прямую $S-7$, что позволяет найти фронтальную проекцию точки B . Профильная проекция точки B определяется с помощью линии преломления k и условий связи между проекциями.

Точка C принадлежит ребру $S-2$ пирамиды; ее недостающие проекции определяются с помощью линий связи.

Примечание. При решении задачи с многогранником рекомендуется предварительно присвоить буквенно-цифровые обозначения вершинам или ребрам многогранника.

Задача 6.2

Построить недостающие проекции линии a и точек L, K , лежащих на поверхности треугольной пирамиды (рис. 6.3). **Проекции искомых элементов, показанные на чертеже – видимы.**

Решение. Построение точки L . В соответствии с условием задачи, точка L находится на грани ABS . Проведем в плоскости ABS через точку L какую-либо вспомогательную прямую, например, прямую SL' . Недостающая горизонтальная проекция L_1 точки L находится на горизонтальной проекции $S_1L'_1$ прямой SL' и определяется с помощью вертикальной линии связи (рис. 6.4).

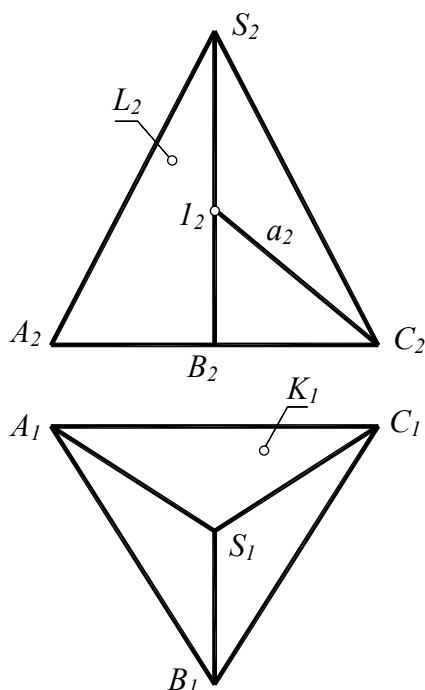


Рис. 6.3

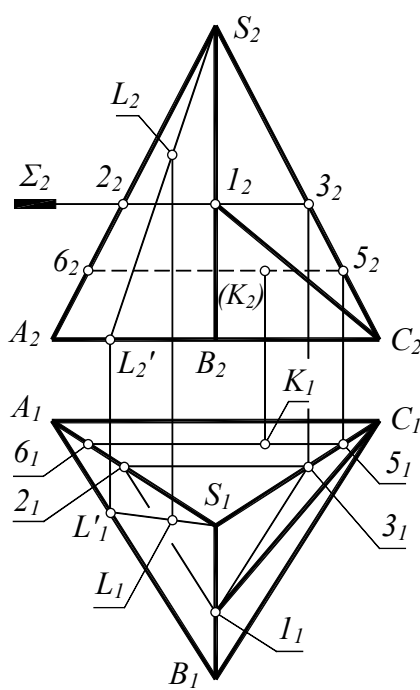


Рис. 6.4

Построение точки K . Точка K принадлежит грани ACS . Проводим в плоскости ACS через точку K какую-нибудь вспомогательную прямую, например, прямую $5-6$, параллельную ребру AC . Находим фронтальную проекцию отрезка $5-6$ и отмечаем на нем недостающую фронтальную проекцию точки K . Почему фронтальная проекция отрезка $5-6$ параллельна фронтальной проекции ребра AC ?

Построение прямой a . Прямая $a=C-1$ принадлежит грани BCS . Чтобы полностью указать отрезок $C-1$ на чертеже, надо найти недостающую горизонтальную проекцию

точки I , лежащей на ребре BS . Высота точки I известна, поэтому через нее можно провести вспомогательную горизонтальную плоскость уровня Σ . В сечении пирамиды плоскостью Σ получаем треугольник 123 , подобный треугольнику ABC , лежащему в основании пирамиды (почему треугольники 123 и ABC подобны?). Стороны этих треугольников параллельны, что позволяет построить горизонтальную проекцию треугольника 123 , найдя тем самым недостающую горизонтальную проекцию точки I . Соединяя отрезком прямой точки I_1 и C_1 , получаем недостающую горизонтальную проекцию прямой a . Задача решена.

Задача 6.3

Построить недостающую горизонтальную проекцию треугольной пирамиды $KLMS$, если на чертеже указаны четыре (видимые на фронтальной проекции) точки S, A, B, C , лежащие на ее поверхности (рис. 6.5).

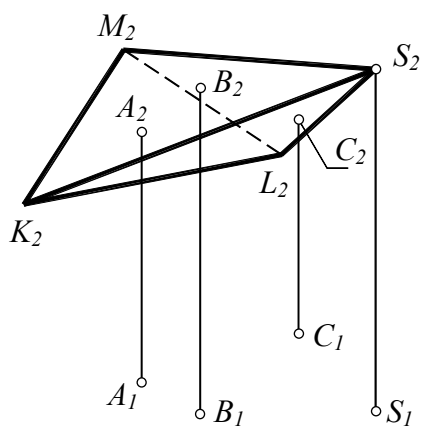


Рис. 6.5

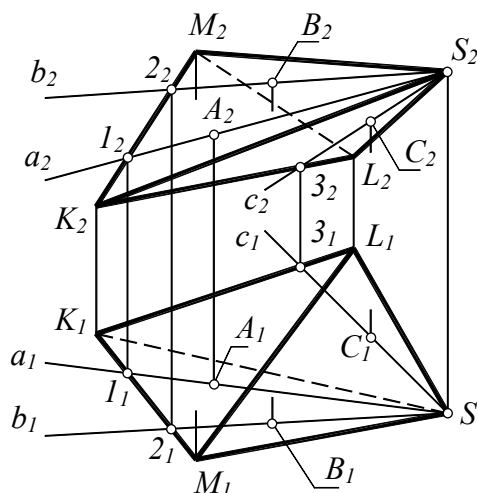


Рис. 6.6

Решение. Точки A и B , согласно условию задачи, принадлежат одной и той же грани KMS пирамиды. Проведем в этой грани прямые $a=AS$ и $b=BS$ (рис. 6.6). Отметив точки 1 и 2 пересечения этих прямых с ребром KM , получаем возможность начертить горизонтальную проекцию K_1M_1 ребра KM (как?).

Точка C , согласно условию, принадлежит грани KLS пирамиды. Проведем в этой грани прямую $c=SC$. Отметив точку $3=c \cap KL$ пересечения прямой SC с ребром KL , находим горизонтальную проекцию K_1L_1 ребра KL . Видимость горизонтальных проекций ребер KS и ML определена с помощью пары горизонтально-конкурирующих точек, не показанных на чертеже (каких?).

6.2. Поверхности вращения (конус, цилиндр, тор, сфера)

Задача 6.4

Построить недостающие проекции точек и линий, принадлежащих конической поверхности вращения (рис. 6.7).

Решение. Построение точки A (рис. 6.8). Вспомогательная горизонтальная плоскость уровня Σ , проведенная через точку A , пересекает конус по окружности a . Недостающая горизонтальная проекция точки A находится на горизонтальной проекции a_1 этой окружности.

Построение точки B . Горизонтальная секущая плоскость Σ' , проведенная через точку B , пересекает конус по окружности b . Недостающая горизонтальная проекция точки B находится на горизонтальной проекции b_1 этой окружности. Для проверки точности построения проведем через точку B прямолинейную образующую SN конуса. Горизон-

тальная проекция B_1 точки B находится на горизонтальной проекции S_1N_1 этой образующей (см. рис. 6.8).

Построение линии CD . Точка C лежит на прямолинейной образующей DS конуса, поэтому CD – отрезок прямой линии (см. рис. 6.8).

Построение линии $e=EF$. Согласно условию задачи, горизонтальная проекция e_1 линии e – участок окружности. Окружность e располагается в горизонтальной плоскости уровня. Для построения участка EF этой окружности достаточно отметить фронтальную проекцию E_2 очерковой точки E , через которую проходит искомая (невидимая) фронтальная проекция E_2F_2 линии $e=EF$ (см. рис. 6.8). Почему фронтальная проекция E_2F_2 не видима? Почему фронтальную плоскость уровня Φ , показанную на рис. 6.6, называют плоскостью смены видимости на Π_2 ?

Построение линии $g=KL$ (рис. 6.9). Линию g , лежащую на поверхности конуса, можно рассматривать как результат пересечения поверхности конуса плоскостью Ψ .

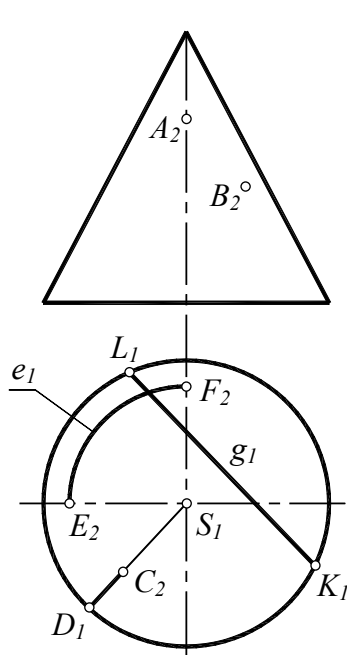


Рис. 6.7

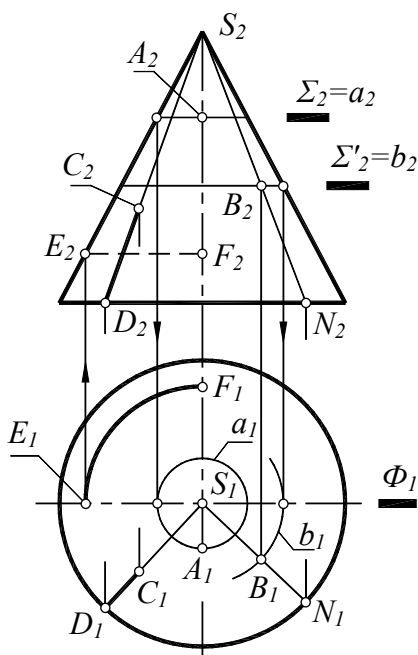


Рис. 6.8

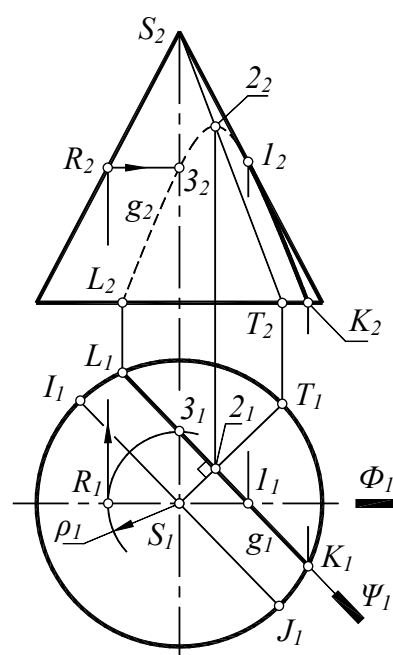


Рис. 6.9

Плоскость Ψ пересекает все прямолинейные образующие конуса, кроме двух образующих SI и SJ , параллельных этой плоскости. Следовательно, линия $g=KL$ – участок гиперболы [1, п. 7.3].

Для построения фронтальной проекции линии g отмечаем на ней, кроме точек K, L , дополнительные точки $1, 2, 3$ и находим их фронтальные проекции из условия принадлежности этих точек поверхности конуса.

Построение точки 1. Фронтальная проекция 1_2 точки 1 лежит на фронтальном очерке конуса. По какой линии плоскость Φ пересекает поверхность конуса?

Построение точки 2. Точка 2 – вершина гиперболы g (ее самая высокая точка). Для построения точки 2 проведена образующая ST , горизонтальная проекция S_1T_1 которой перпендикулярна горизонтальной проекции Ψ_1 плоскости Ψ . На пересечении проекций S_1T_1 и Ψ_1 отмечена проекция 2_1 точки 2 . Фронтальная проекция точки 2 найдена из условия принадлежности этой точки поверхности конуса. Из всех точек, принадлежащих гиперболы g , точка 2 – ближайшая к вершине S (почему?).

Построение точки 3. Точка 3 принадлежит горизонтальной окружности ρ , лежащей на поверхности конуса. Для построения фронтальной проекции этой окружности использована вспомогательная точка R (см. рис. 6.9).

Построение гиперболы g . Через фронтальные проекции точек $K, I, 2, 3, L$ проводим плавную кривую линию с вершиной в точке 2 – фронтальную проекцию g_2 гиперболы g . Видимость линии g_2 меняется в *точке смены видимости* I , лежащей на фронтальном очерке конуса (почему точка смены видимости лежит на очерке конуса?).

Задача 6.5 (рис. 6.10)

Построить профильную проекцию линии ABC , лежащей на поверхности цилиндра вращения.

Решение. Линию ABC , лежащую на поверхности цилиндра, можно рассматривать как результат пересечения поверхности цилиндра наклонной проецирующей плоскостью Σ , проходящей через точки A, B, C (см. рис. 6.10). В сечении цилиндра плоскостью Σ получается эллипс (*почему?*). Искомая линия ABC – участок эллипса.

Для повышения точности графического решения рекомендуется построить профильную проекцию всего эллипса, возникающего в сечении цилиндра плоскостью Σ , а затем выделить (увеличенной толщиной линии) искомый участок ABC .

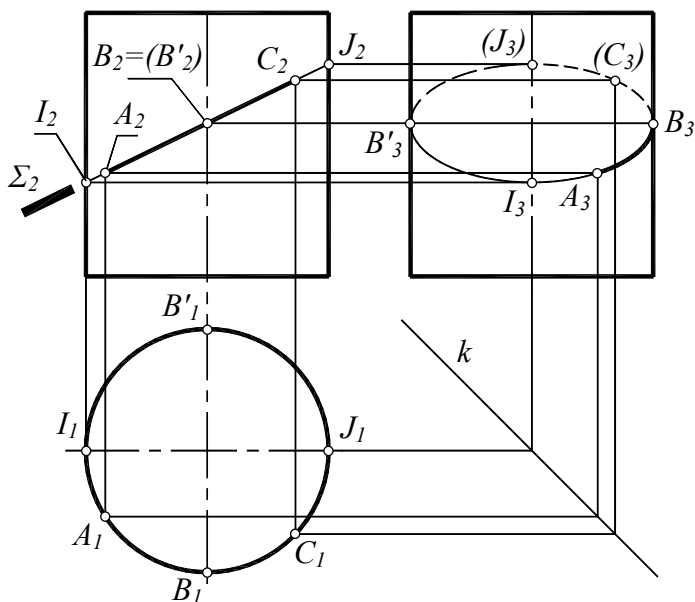


Рис. 6.10

Сечение цилиндра проецирующей плоскостью Σ изображается на фронтальной плоскости проекций отрезком прямой линии I_2J_2 . На горизонтальной плоскости проекций это сечение совпадает с очерком цилиндра. На профильной плоскости проекций сечение цилиндра плоскостью Σ изображается эллипсом с большой осью $B_3B'_3$, равной диаметру цилиндра, и с малой осью I_3J_3 , равной разности высот точек I и J . Почему в точках B_3 и B'_3 меняется видимость начерченного эллипса?

Задача 6.6

Построить недостающие проекции точек A, B, C, D , принадлежащих поверхности тора (рис. 6.11).

Решение. Тор – поверхность, образованная вращением окружности R_K вокруг оси i , лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр (см. рис. 6.11). Поверхность тора – алгебраическая поверхность четвертого порядка [1, п. 6.2.5.3]. В сечении тора плоскостью в общем случае получается кривая четвертого порядка.

Частные случаи. В сечении тора плоскостью Σ , перпендикулярной его оси вращения, получаем кривую четвертого порядка, распадающуюся на две окружности: “наружную” (большую) окружность радиуса R и “внутреннюю” (малую) окружность радиуса r . Если секущая плоскость Φ проходит через ось тора, то в сечении получаем кривую четвертого порядка, распадающуюся на две окружности одинакового радиуса R_K .

Построение горизонтальной проекции точки A . Согласно условию задачи, фронтальная проекция точки A видима, следовательно, точка A находится на “наружной” поверхности тора. Проводим через точку A вспомогательную секущую плоскость Ψ , перпендикулярную оси вращения тора (рис. 6.12). Плоскость Ψ пересекает “наружную” поверхность тора по окружности радиуса r_A , на которой располагается точка A . Начер-

тив горизонтальную проекцию этой окружности, отмечаем горизонтальную проекцию точки A из условия принадлежности ее к окружности радиуса r_A .

Построение фронтальной проекции точки B . На поверхности тора начертим окружность радиуса r_B , проходящую через точку B (см. рис. 6.12). Горизонтальная проекция этой окружности проходит через заданную в условии задачи горизонтальную проекцию B_1 точки B . С помощью вспомогательной точки I находим фронтальную проекцию окружности радиуса r_B и отмечаем фронтальную проекцию точки B из условия принадлежности точки B к этой окружности.

Построение фронтальных проекций точек C и D . Точки C и D , согласно условию задачи, принадлежат окружностям радиусов R и r , полученным в сечении тора плоскостью Σ . Следовательно, точки C, D находятся в плоскости Σ , что позволяет отметить их фронтальные проекции из условия принадлежности этих точек к плоскости Σ . Точки C и D невидимы на плоскости Π_2 (*почему?*).

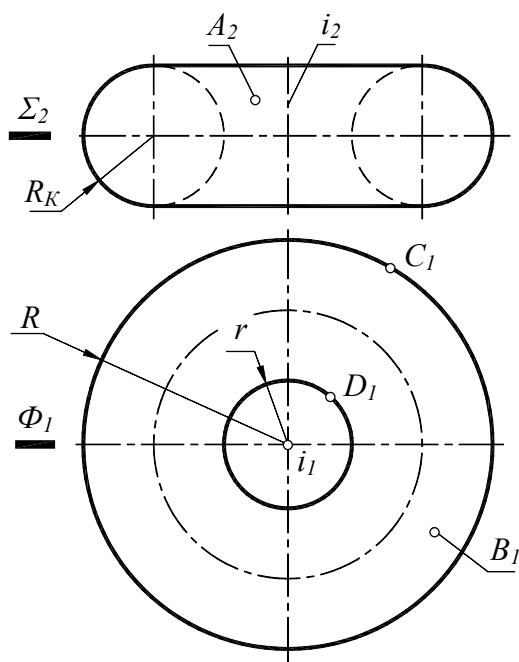


Рис. 6.11

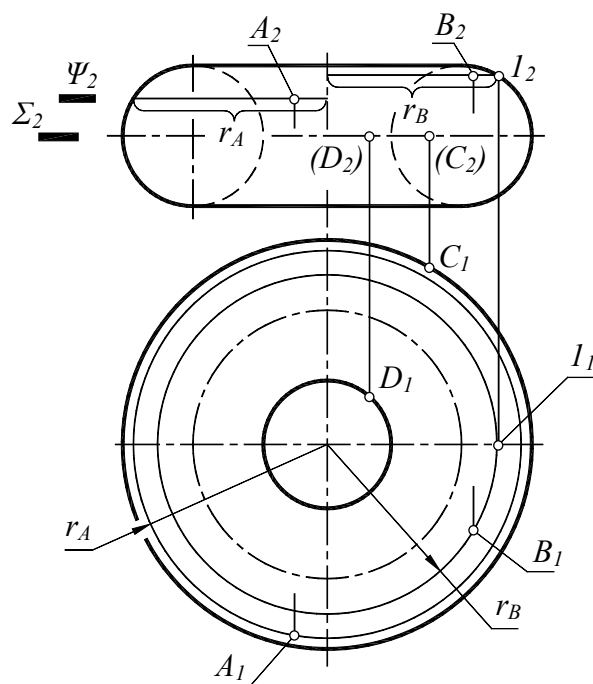


Рис. 6.12

Задача 6.7

Построить недостающие проекции линии ABC и точек D, E, M , принадлежащих поверхности сферы (рис. 6.13).

Решение. Условно полагая сферу моделью земного шара, назовем точку N “северным”, а точку S – “южным” полюсом. Тогда большую окружность e сферы (заданную на рис. 6.13 своими проекциями e_1, e_2) следует назвать “экватором”, а окружность m , проходящую через полюсы N и S – “меридианом”. Верхняя половина сферы, расположенная выше экваториальной плоскости Σ – “северное полушарие”, нижняя половина – “южное полушарие” (см. рис. 6.13). Горизонтальные проекции полюсов совпадают, причем проекция S_1 южного полюса S не видима (*почему?*).

Построение линии ABC . Точки A, B, C расположены в одной плоскости Θ , поэтому линия ABC может считаться частью линии пересечения сферы горизонтальной плоскостью уровня Θ . В сечении сферы плоскостью получается окружность, следовательно, линия ABC – часть окружности с радиусом $r_A = A_2B_2$ (рис. 6.14).

Построение точки D . Проводим через точку D вспомогательную секущую плоскость Ψ , параллельную плоскости Π_2 . В сечении сферы плоскостью Ψ получаем окружность радиуса r_D (см. рис. 6.14). Фронтальную проекцию точки D находим из условия принадлежности точки D этой окружности. Точка D на плоскости Π_2 невидима.

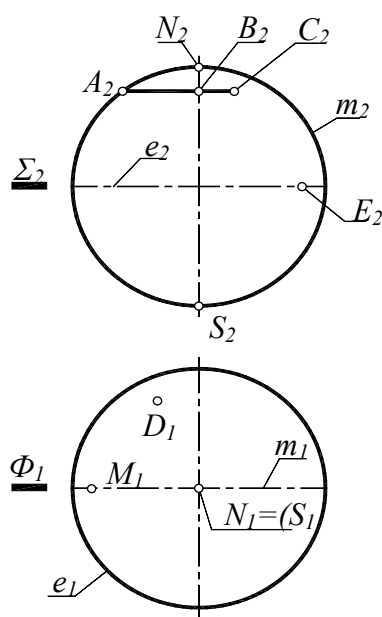


Рис. 6.13

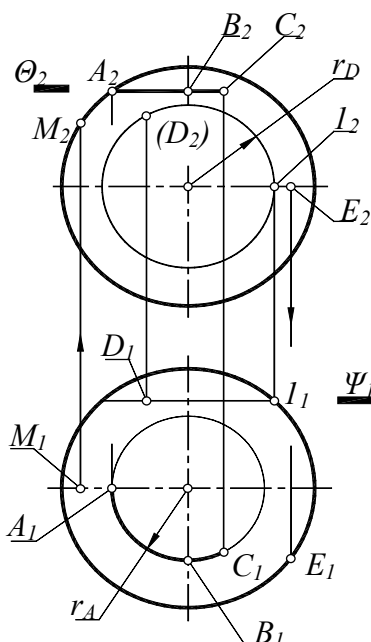


Рис. 6.14

Построение точек E и M . Точка E , согласно условию задачи, находится на “экваторе” e , что позволяет отметить недостающую горизонтальную проекцию E_1 точки E на горизонтальной проекции e_1 “экватора”. Точка M принадлежит “меридиану” m , поэтому недостающую фронтальную проекцию M_2 точки M надо отметить на фронтальной проекции m_2 “меридиана” m (см. рис. 6.14).

Примечание. Сфера – поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и проходящей через ее центр. Можно ли считать сферу “предельным” случаем тора? Почему? О каком пределе идет речь?

6.3. Линейчатые поверхности

Задача 6.8

Построить недостающие проекции точек A и B , принадлежащих поверхности эллиптического конуса (рис. 6.15).

Решение. Поверхность эллиптического конуса образована движением прямолинейной образующей, проходящей через точку S и пересекающей направляющую кривую – горизонтальную окружность с центром O . Любое сечение этой поверхности горизонтальной плоскостью – окружность с центром на линии OS .

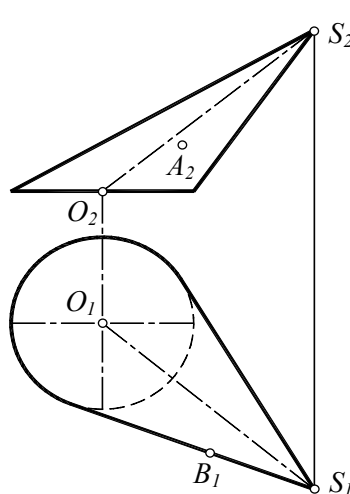


Рис. 6.15

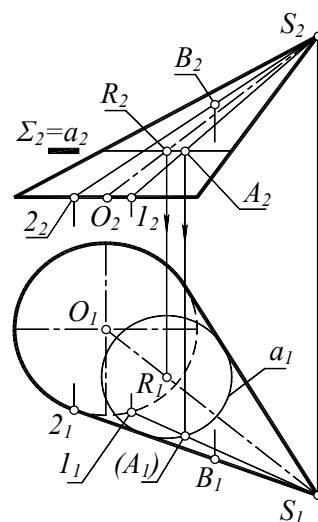


Рис. 6.16

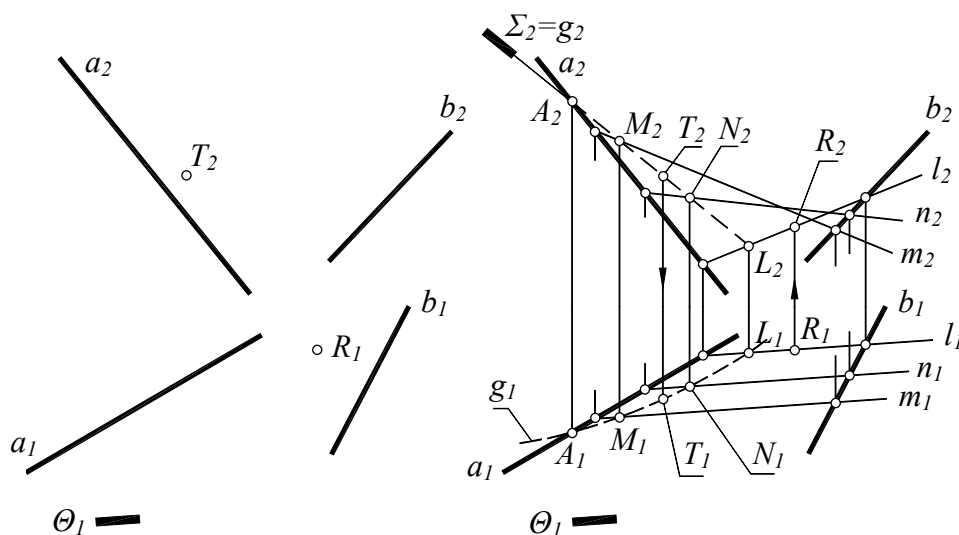
Построение точки A . Через точку A проведем вспомогательную горизонтальную плоскость уровня Σ , пересекающую поверхность конуса по окружности a с центром R , лежащим на центральной линии OS . Искомая горизонтальная проекция A_1 точки A принадлежит горизонтальной проекции a_1 сечения a (рис. 6.16).

Недостающая проекция точки A может быть построена не только с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ , но и из условия ее принадлежности к прямолинейной образующей $S-I$, проходящей через A . Оба построения дают одинаковый результат. Почему горизонтальная проекция точки A взята в скобки?

Построение точки B . Недостающая фронтальная проекция B_2 точки B определяется из условия принадлежности этой точки к горизонтальной очерковой образующей $S-2$ конуса. Построив фронтальную проекцию образующей $S-2$, отмечаем на ней искомую проекцию B_2 точки B (см. рис. 6.16). Что называют очерком поверхности? [1, п. 6.2.5].

Задача 6.9

Построить недостающие проекции точек R и T , принадлежащих линейчатой поверхности Ψ , заданной скрещивающимися прямолинейными направляющими a, b и плоскостью параллелизма Θ (рис. 6.17).



Задача 6.10

Построить недостающую фронтальную проекцию точки D , принадлежащей линейчатой поверхности Ω , заданной криволинейными направляющими a, b и плоскостью параллелизма Σ (рис. 6.19).

Решение. Построим сетку образующих $l, m, n, \dots$ и через точку D проведем вспомогательную секущую плоскость Δ . Плоскость Δ пересекает линейчатую поверхность по линии $1 \dots 5$, показанной на рис. 6.20 штриховой линией. Точка D принадлежит этой линии, поэтому недостающая фронтальная проекция D_2 точки D определяется с помощью вертикальной линии связи (см. рис. 6.20).

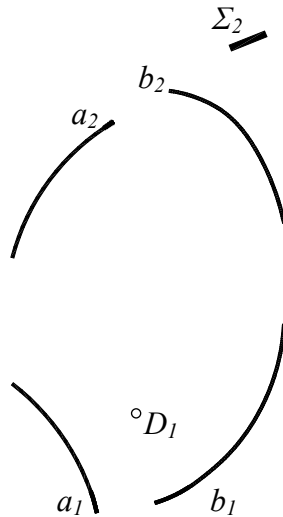


Рис. 6.19

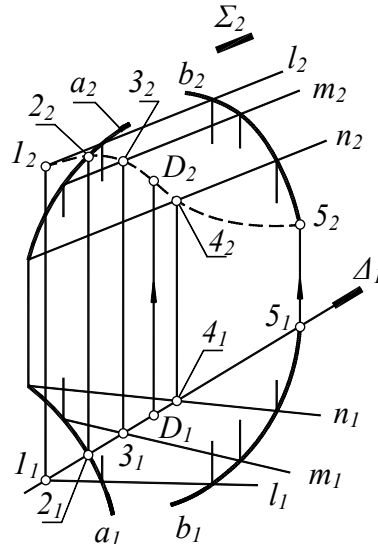


Рис. 6.20

Примечание 1. Для построения недостающей проекции точки D не обязательно вводить в рассмотрение вспомогательную секущую плоскость Δ . Достаточно начертить горизонтальную проекцию произвольной кривой, лежащей на данной линейчатой поверхности и проходящей через точку D . Построив фронтальную проекцию этой кривой, отмечаем на ней искомую фронтальную проекцию точки D .

Примечание 2. Если обе направляющие линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма – кривые линии, то поверхность называется *цилиндроидом* (см. рис. 6.19). Если одна из направляющих кривая линия, а другая направляющая – прямая линия, то поверхность называют *коноидом* (см. следующую задачу).

Задача 6.11

Сконструировать стенной проем, заключенный между параллельными плоскостями Σ и Σ' , в виде линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма Π_1 и направляющими n, i , где n – линия, состоящая из отрезков прямых $1-2, 4-5$ и полуокружности $2-3-4$ с центром O , а i – горизонтально-проецирующая прямая (рис. 6.21).

Решение. Первый отсек конструируемой поверхности образован движением горизонтальной прямолинейной образующей, пересекающей вертикальную направляющую i и параллельные ей прямолинейные участки $1-2, 4-5$ направляющей n . При движении горизонтальной образующей, “скользящей” по параллельным прямым i и $1-2$, образуется участок плоскости, ограниченный прямоугольником $1-2-2'-1'$ (рис. 6.22). Другой участок плоскости, заметаемый прямолинейной образующей при ее скольжении по направляющим i и $4-5$, расположен симметрично участку $1-2-2'-1'$.

Таким образом, первый отсек боковой поверхности конструируемого стенного проема расположен *ниже* уровня точки O и образован двумя симметричными прямоуголь-

ными участками вертикальных плоскостей, проходящих через направляющие i , $1-2$, $4-5$. Один из этих участков (прямоугольник $1-2-2'-1'$) показан как на ортогональном чертеже (см. рис. 6.22), так и на наглядном аксонометрическом изображении (рис. 6.23).

Второй отсек конструируемой поверхности – коноид (“*прямой клин*”), образованный скольжением горизонтальной прямолинейной образующей по направляющей полуокружности $2-3-4$, лежащей в плоскости Σ , и вертикальной направляющей i . В сечении клина плоскостью Σ' , параллельной плоскости Σ , образуется эллипс e [1, п. 6.2.4].

Построение произвольной образующей AB прямого клина. На направляющей полуокружности $2-3-4$ отмечаем произвольную точку A , через которую проводим горизонтальную образующую $A-I$ до пересечения (в точке I) с направляющей прямой i . Отмечаем точку B пересечения образующей $A-I$ с плоскостью Σ' . Образующая AB построена. Эта образующая показана (выделена утолщенным отрезком AB) на аксонометрическом чертеже стеного проема (см. рис. 6.23).

Многokrатно повторяя указанное построение, находим множество прямолинейных образующих конструируемой боковой поверхности стеного проема. Получена кусочно-гладкая (не имеющая изломов) линейчатая поверхность, составленная из отсека коноида (выше уровня точки O) и двух симметрично расположенных вертикальных плоскостей, пересекающихся на направляющей i (ниже уровня точки O).

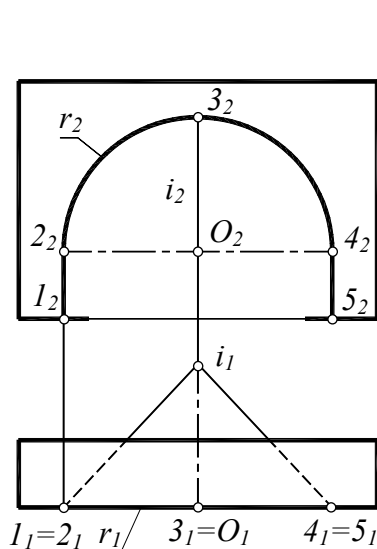


Рис. 6.21

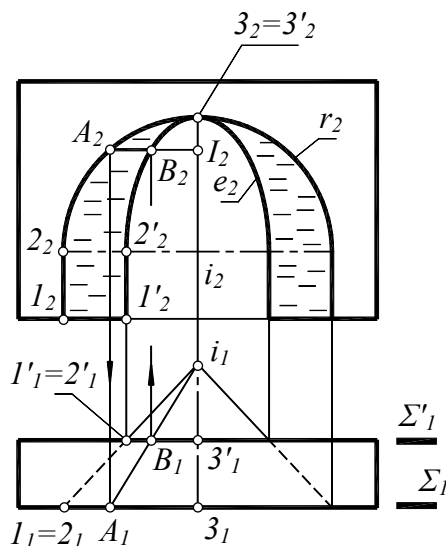


Рис. 6.22

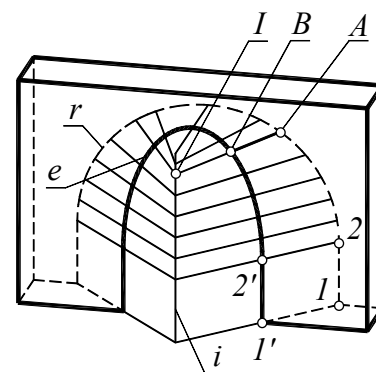


Рис. 6.23

Примечание. На аксонометрическом чертеже (см. рис. 6.23) выбрана точка зрения, показывающая стеной проем со стороны выхода (“вид сзади”).

Тема 7

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕЦИРУЮЩИМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Плоскость, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций, называется *проецирующей плоскостью*. Проекция линии пересечения произвольной поверхности проецирующей (“секущей”) плоскостью вырождается в прямую линию на той плоскости проекций, к которой перпендикулярна эта секущая плоскость.

7.1. Пересечение многогранника проецирующими плоскостями

Линия пересечения многогранника секущей плоскостью – плоская ломаная линия. Вершины этой ломаной линии называют опорными точками. Для построения линии пересечения многогранника какой-нибудь плоскостью находят опорные точки и соединяют их ломаной линией. При соединении опорных точек следует соблюдать правило: *отрезками прямой соединяются только те опорные точки, которые лежат на одной и той же грани многогранника (почему?)*.

Задача 7.1

Построить линию пересечения пирамиды фронтально-проецирующими плоскостями Σ , Δ , Ψ (рис. 7.1).

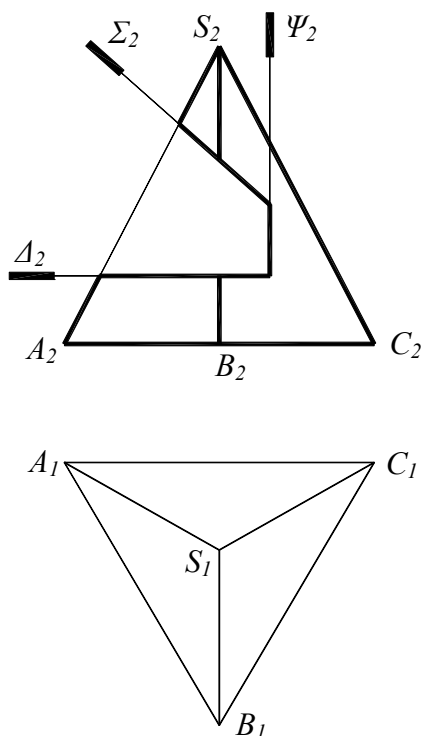


Рис. 7.1

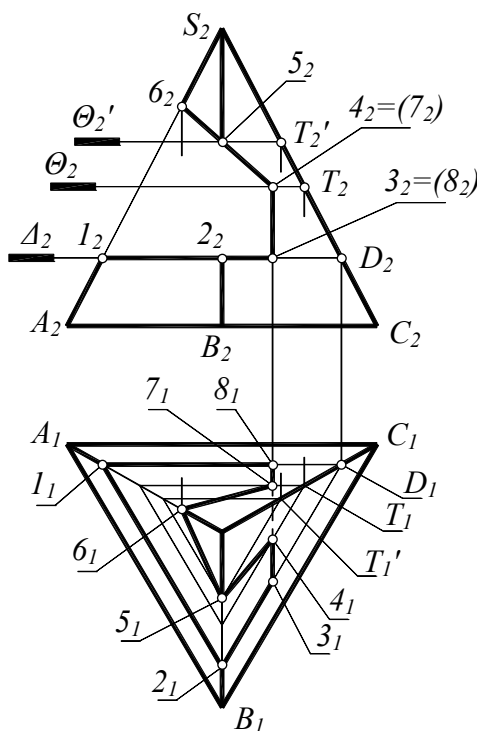


Рис. 7.2

Решение. Плоскость Δ пересекает пирамиду по треугольнику $12D$ (рис. 7.2). Секущая плоскость Δ параллельна основанию ABC пирамиды, поэтому треугольник $12D$ подобен треугольнику ABC . Вершины $1, 2$ треугольника $12D$ – опорные точки. Точки $3, 8$ также называют “опорными”, хотя эти точки находятся не на ребрах, а на гранях многогранника. Почему точки $3, 8$ называют опорными? Почему фронтальная проекция точки 8 взята в скобки?

Через точки 4 и 7 проведем вспомогательную горизонтальную плоскость Θ , пересекающую пирамиду по треугольнику с вершиной $T = CS \cap \Theta$. На горизонтальной проек-

ции этого треугольника отмечаем горизонтальные проекции опорных точек 4, 7. Почему фронтальная проекция точки 7 взята в скобки? Треугольник, полученный в сечении пирамиды плоскостью Θ , подобен основанию ABC пирамиды (*почему?*).

Опорные точки 5 и 6 отмечаем на пересечении плоскости Σ с ребрами BS и AS пирамиды. Чтобы найти горизонтальную проекцию точки 5, проводим через нее вспомогательную горизонтальную плоскость Θ' , пересекающую пирамиду по треугольнику с вершиной $T' = CS \cap \Theta'$. На горизонтальной проекции этого треугольника отмечаем горизонтальную проекцию точки 5. Треугольник, полученный в сечении пирамиды плоскостью Θ' , подобен основанию ABC пирамиды.

Соединяя опорные точки, лежащие на одной и той же грани, отрезками прямых, получаем замкнутую ломаную линию 1-2-3-4-5-6-7-8-1. Задача решена (см. рис. 7.2).

Задача 7.2

Построить горизонтальную и профильную проекции пирамиды со сквозным вырезом (рис. 7.3).

Решение. Сквозной вырез образован четырьмя фронтально-проецирующими плоскостями, две из которых (верхняя плоскость Σ и нижняя плоскость Δ) параллельны основанию, а две другие – параллельны ребрам AS и CS пирамиды.

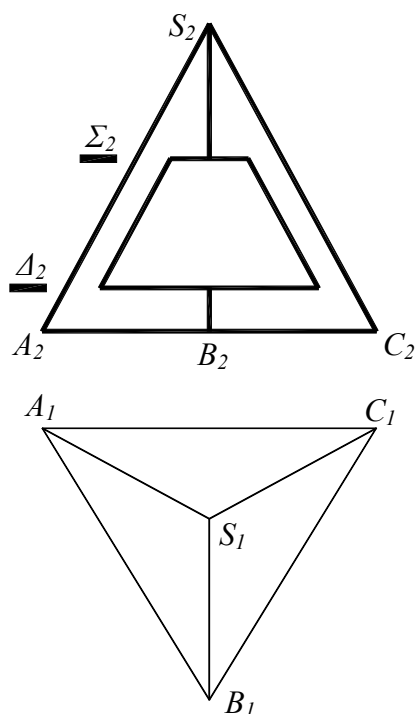


Рис. 7.3

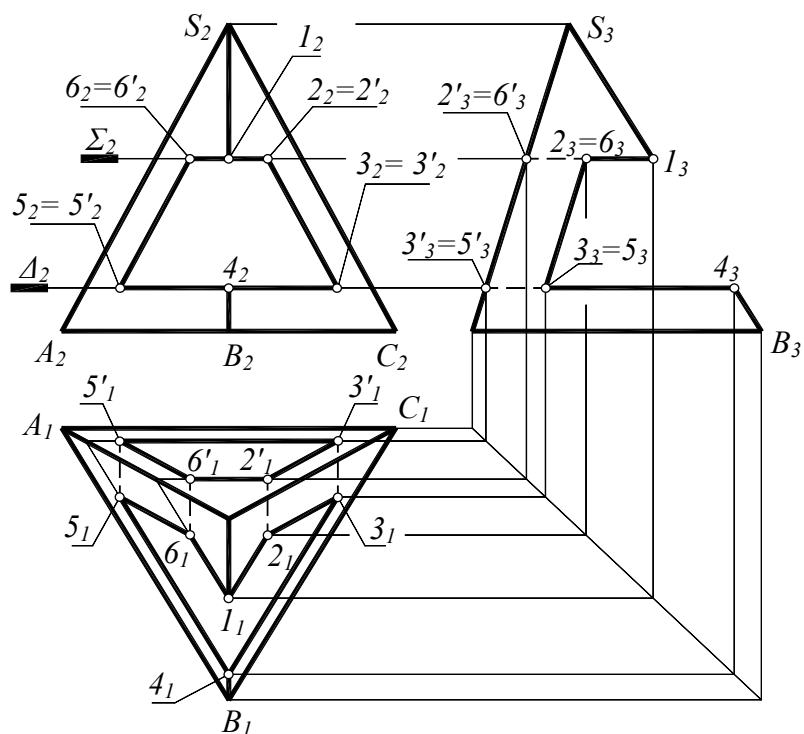


Рис. 7.4

Плоскости Σ и Δ пересекают ребро BS пирамиды в точках 1 и 4, а всю пирамиду – по треугольникам с вершинами в точках 1 и 4 соответственно (рис. 7.4). Эти треугольники подобны треугольнику ABC , лежащему в основании пирамиды (*почему?*).

В плоскости Σ отмечаем симметрично расположенные опорные точки 2, 6, лежащие на гранях BCS и ABS пирамиды, и точки 2', 6', лежащие на грани ACS . Горизонтальные и профильные проекции этих точек находим по их принадлежности к треугольнику (с вершиной в точке 1), полученному в сечении пирамиды плоскостью Σ (см. рис. 7.4).

В плоскости Δ отмечаем симметрично расположенные опорные точки 3 и 5, лежащие на гранях BCS и ABS пирамиды, и точки 3', 5', лежащие на грани ACS . Горизонтальные и профильные проекции этих точек находим по их принадлежности к треугольнику (с вершиной в точке 4), полученному в сечении пирамиды плоскостью Δ .

Проверка. Проекции боковых сторон выреза 2-3, 5-6, 2'-3', 5'-6' должны быть параллельны соответствующим проекциям ребер AS и CS пирамиды (*почему?*).

Задача 7.3

Построить горизонтальную и профильную проекции пирамиды с прорезом в форме прямоугольного “туннеля” (рис. 7.5).

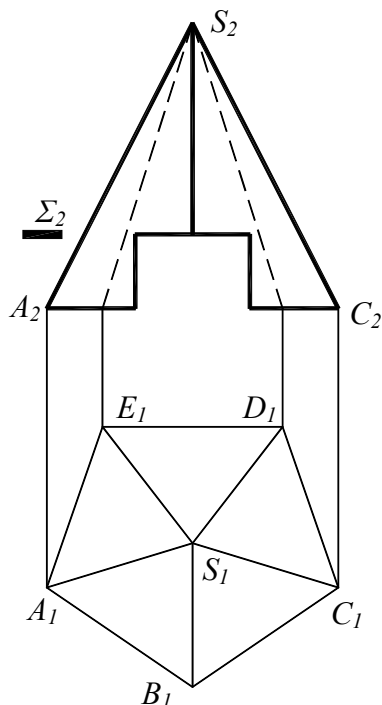


Рис. 7.5

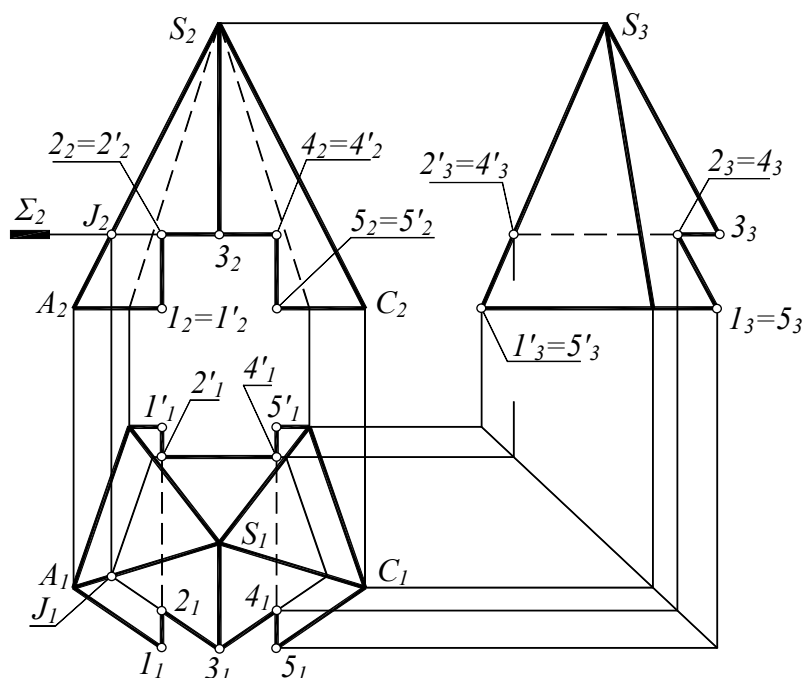


Рис. 7.6

Решение. Прорез в пирамиде образован двумя вертикальными “боковыми стенами” и горизонтальной плоскостью Σ – “потолком” туннеля. Плоскость Σ пересекает ребро AS в точке J , ребро BS – в точке 3 , а всю пирамиду – по пятиугольнику (с вершинами в точках J и 3), подобному пятиугольнику $ABCDE$, лежащему в основании пирамиды (рис. 7.6).

На пятиугольнике $ABCDE$ отмечаем опорные точки $1, 5$ и $1', 5'$, указывающие границы туннеля по ширине и длине на уровне основания пирамиды. На плоскости Σ отмечаем опорные точки $2, 4$ и $2', 4'$, которые, совместно с точкой 3 , определяют конфигурацию “потолка” туннеля, ограниченного замкнутой ломаной линией 2-3-4-4'-2'-2.

Проверка. “Вход в туннель” образован ломаной линией 1-2-3-4-5. Отрезки 1-2 и 4-5 этой линии (боковые границы входа) параллельны ребру BS пирамиды. “Выход из туннеля” образован плоской ломаной линией 1'-2'-4'-5', целиком лежащей на грани DES пирамиды. Профильная проекция “линии выхода” совпадает с профильной проекцией грани DES , выродившейся в прямую линию.

Задача 7.4

Построить профильную проекцию призмы с вырезом, образованным фронтально-проецирующими плоскостями Ψ, Σ и Δ (рис. 7.7).

Решение (рис. 7.8). Отмечаем группу опорных точек $1, 2, 2', 5, 5'$, в которых проецирующие плоскости пересекаются с ребрами a, b, c призмы. Другая группа опорных точек (точки $3, 3', 4, 4'$) лежит не на ребрах, а на гранях призмы. Еще две опорные точки 6 и $6'$ отмечаем на пересечении пятиугольного основания призмы с проецирующей плоскостью Δ . Профильные проекции опорных точек находим с помощью условий свя-

зи между проекциями. Соединяя отрезками прямых опорные точки, лежащие на одной и той же грани призмы, получаем решение задачи (см. рис. 7.8).

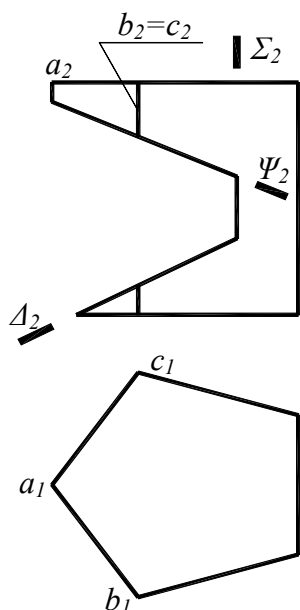


Рис. 7.7

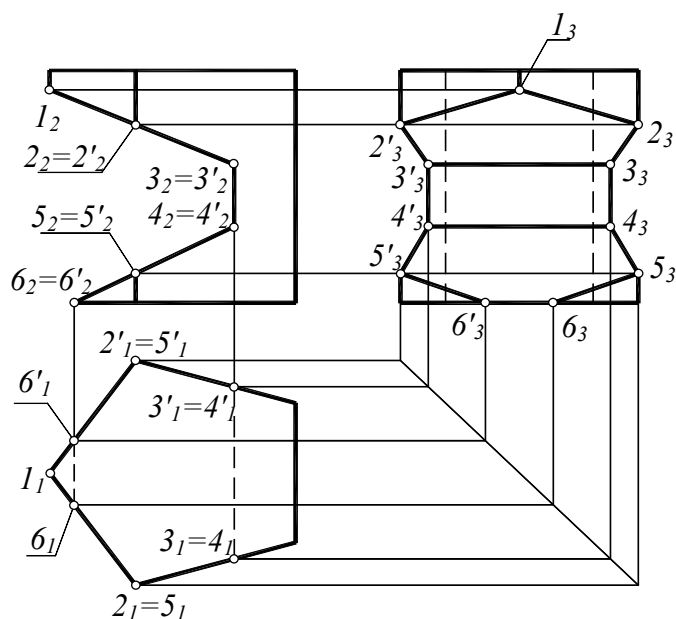


Рис. 7.8

7.2. Пересечение прямого кругового конуса проецирующими плоскостями

В сечении конуса плоскостью могут быть получены: *окружность, эллипс, гипербола, парабола, две прямые*.

Если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения кругового конуса, то в сечении получаем окружность. Если секущая плоскость расположена произвольно, но пересекает *все* образующие конуса – получаем эллипс. Если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса, то в сечении получаем кривую с двумя бесконечными “ветками” – гиперболу. Если секущая плоскость параллельна какой-либо одной образующей конуса, то в сечении получаем параболу. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса – в сечении получаем две прямые [1, п. 7.3].

Задача 7.5

Построить линию пересечения кругового конуса фронтально-проецирующей плоскостью Ψ , пересекающей все образующие конуса (рис. 7.9).

Решение. Плоскость Ψ пересекает *все* прямолинейные образующие конуса, поэтому в сечении получаем эллипс e . Фронтальная проекция e_2 сечения e совпадает с вы-

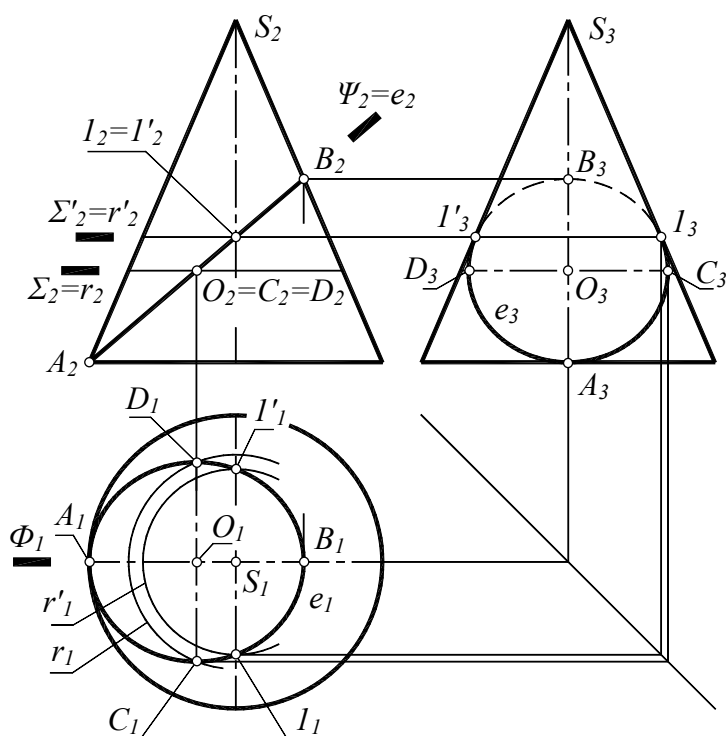


Рис. 7.9

рожденной фронтальной проекцией Ψ_2 секущей плоскости Ψ .

Плоскость Ψ и поверхность конуса имеют *общую плоскость симметрии* Φ , поэтому все точки эллипса e располагаются симметрично относительно плоскости Φ . Отсюда следует, что одна из главных осей эллипса (ось AB) лежит в плоскости Φ , другая главная ось (ось CD) перпендикулярна плоскости Φ и проходит через середину O главной оси AB . Для построения точек C, D использована вспомогательная плоскость Σ , пересекающая конус по окружности a . Точки C и D лежат на этой окружности.

Профильные проекции точек I и I' лежат на профильной очерковой линии конуса (*почему?*). Чтобы найти эти точки на Π_1 и Π_3 , достаточно использовать условия связи между проекциями. Для проверки точности построения горизонтальные проекции точек I и I' найдены не только с помощью условий связи, но и с помощью вспомогательной плоскости Σ' , пересекающей конус по окружности b . Точки I и I' лежат на этой окружности. В точках I, I' меняется видимость профильной проекции e_3 эллипса e .

Дополнительные точки эллипса определяются из условия принадлежности этих точек поверхности конуса.

Задача 7.6

Построить линию пересечения кругового конуса плоскостью Σ , параллельной двум образующим конуса (рис. 7.10).

Решение. Плоскость Σ пересекает обе полости конуса и все его образующие, кроме двух образующих $a'=AS$ и $b'=BS$, параллельных этой плоскости. Образующие a', b' лежат в плоскости $\Sigma' \parallel \Sigma$, проходящей через вершину S конуса. В сечении конуса плоскостью Σ получаем гиперболу с асимптотами, параллельными образующим a', b' .

Фронтальные проекции $2_2, 3_2$ вершин $2, 3$ гиперболы лежат на фронтальном очерке конуса. Центр O гиперболы – середина отрезка $2-3$. Асимптоты a и b гиперболы, параллельные образующим a', b' , проходят через точку O .

Профильные проекции точек 4 и $4'$ лежат на профильном очерке конуса. Чтобы найти проекции этих точек на Π_1 и Π_3 , достаточно использовать условия

связи между проекциями. В точках $4, 4'$ меняется видимость профильной проекции гиперболы.

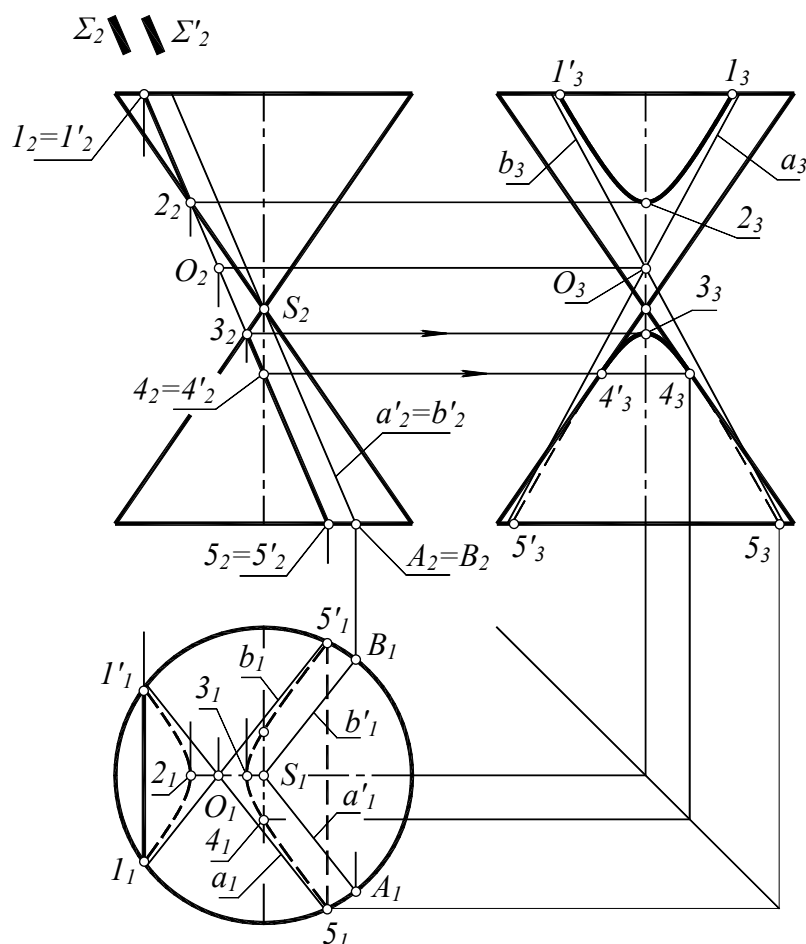


Рис. 7.10

Точки $1, 1'$ и $5, 5'$ гиперболы определяются из условия их принадлежности к верхнему и нижнему круговым сечениям конуса. Любое количество дополнительных точек гиперболы может быть найдено из условия их принадлежности к поверхности конуса.

Задача 7.7

Построить линию пересечения кругового конуса фронтально-проецирующей плоскостью T , параллельной одной образующей конуса (рис. 7.11).

Решение. Плоскость T параллельна фронтальной очерковой образующей t конуса, то есть плоскость T пересекает образующую t в ее несобственной точке. Следовательно, в сечении конуса плоскостью T получается кривая второго порядка, имеющая одну бесконечно удаленную (несобственную) точку. Такую кривую называют параболой.

Фронтальная проекция 1_2 вершины 1 параболы лежит на фронтальном очерке конуса. Профильная проекция 2_3 точки 2 лежит на профильной очерковой линии конуса и является точкой смены видимости профильной проекции параболы (*почему?*). Промежуточная точка 3 параболы построена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ , пересекающей конус по окружности a . Горизонтальная проекция 3_1 точки 3 принадлежит горизонтальной проекции a_1 сечения a . Точка 4 построена по ее принадлежности круговому основанию конуса.

У конуса и секущей плоскости T существует общая плоскость симметрии Φ , поэтому имеются точки $2', 3', 4'$ параболы, симметричные найденным точкам $2, 3, 4$ относительно плоскости Φ . Точки $2', 3', 4'$ на рис. 7.11 условно не показаны (указать эти точки самостоятельно). Любое количество дополнительных точек параболы может быть найдено из условия принадлежности этих точек поверхности конуса.

Задача 7.8 (рис. 7.12)

Построить горизонтальную и профильную проекции конуса с вырезом.

Решение. Вырез образован фронтально-проецирующими плоскостями T, Θ, Σ . Плоскость T пересекает все образующие конуса, кроме фронтальной очерковой образующей a , расположенной параллельно плоскости T . Следовательно, в сечении конуса плоскостью T получаем параболу (см. предыдущую задачу). Плоскость Θ пересекает все без исключения образующие конуса, поэтому в сечении получается эллипс (см. задачу 7.5). Плоскость Σ пересекает конус по гиперболе (см. задачу 7.6).

Для построения проекций конуса с вырезом надо построить проекции всех трех перечисленных линий, после чего выделить (толщиной или цветом) те участки построенных линий, которые указывают истинную границу выреза.

В сечении конуса плоскостью Θ получаем эллипс, большая ось AB которого лежит в плоскости симметрии Φ , а малая ось CD перпендикулярна этой плоскости (рис. 7.13). Центр O эллипса, не отмеченный на рис. 7.13, находится на пересечении главных осей AB и CD (укажите центр эллипса самостоятельно).

На рис. 7.13 указаны характерные (опорные) точки $3, 4, 5$ эллиптического сечения конуса. Точки $3', 4', 5'$, симметричные точкам $3, 4, 5$, на чертеже не обозначены (указать

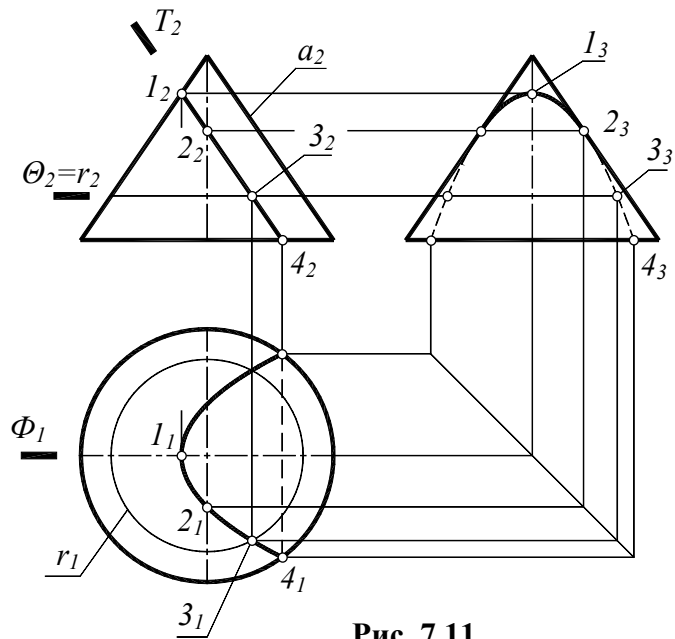


Рис. 7.11

эти точки самостоятельно). Любое количество дополнительных точек эллипса можно построить из условия их принадлежности к поверхности конуса (*как?*).

В сечении конуса плоскостью T получаем параболу, вершина 1 которой лежит в плоскости симметрии Φ . Профильная проекция точки 2 параболы лежит на профильном очерке конуса (*почему?*). Точка 3 (угловая точка выреза) была найдена ранее. В точке 3 граница выреза имеет излом, так как в этой точке пересекаются разные кривые: парабола, лежащая в плоскости T , и эллипс, лежащий в плоскости Θ . Точки $1', 2', 3'$,

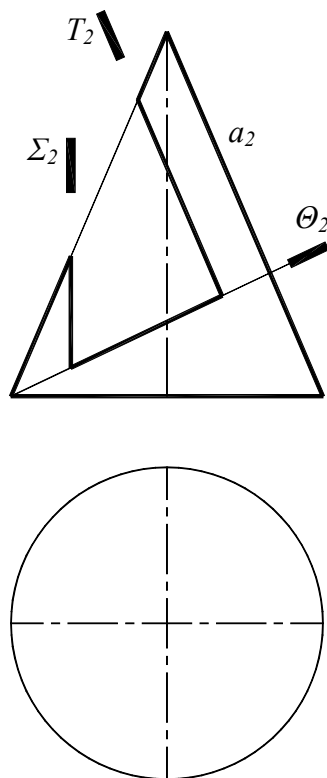


Рис. 7.12

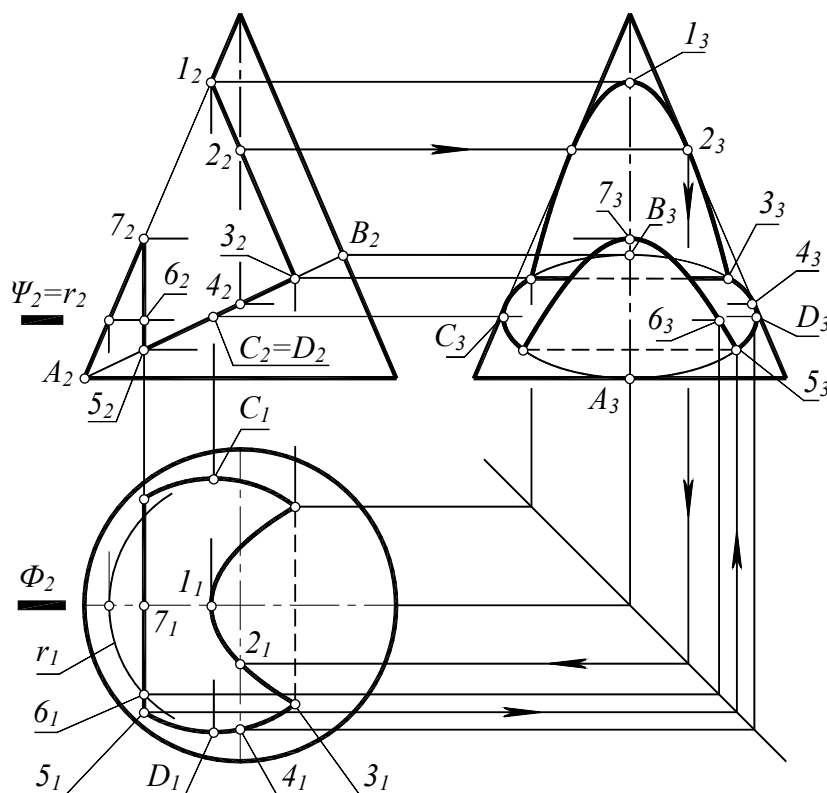


Рис. 7.13

симметричные точкам $1, 2, 3$ относительно плоскости симметрии Φ , на рис. 7.13 условно не обозначены (покажите их самостоятельно).

В сечении конуса плоскостью Σ получаем гиперболу с вершиной в точке 7 , лежащей в плоскости симметрии Φ (см. предыдущую задачу). Угловая точка 5 выреза была найдена ранее. В точке 5 граница выреза имеет излом.

Любое количество дополнительных точек гиперболы можно построить из условия их принадлежности к поверхности конуса. Например, для построения промежуточной точки 6 гиперболы проведена вспомогательная секущая плоскость Ψ , пересекающая поверхность конуса по окружности r . Точка 6 лежит на r .

Таким образом, граница выреза составлена из участка параболы (в плоскости T), участка эллипса (в плоскости Θ) и участка гиперболы (в плоскости Σ). Участки указанных кривых стыкуются между собой в угловых точках $3, 3'$ и $5, 5'$ (напомним, что точки $3', 5'$, симметричные точкам $3, 5$ относительно плоскости Φ , на рис. 7.13 условно не обозначены).

Примечание. В угловых точках $3, 3'$ и $5, 5'$ граница выреза *терпит излом*. В этих точках пересекаются *разные* кривые – эллипс, парабола и гипербола, лежащие в *разных* плоскостях. Поэтому при построении проекций линии выреза на ортогональном чертеже не надо пытаться “сгладить” изломы проекций линии выреза в угловых точках этой линии. Например, на про-

фильной проекции конуса (см. рис. 7.13) в точке 3_3 имеется излом, так как в этой точке пересекаются профильные проекции двух совершенно разных линий – параболы и эллипса.

Задача 7.9 (рис. 7.14)

Построить горизонтальную и профильную проекции конуса с вырезом.

Решение. Вырез образован тремя фронтально-проецирующими плоскостями Δ , Σ и Θ . Плоскость Δ , проходящая через вершину конуса, пересекает его по двум прямолинейным образующим. Плоскость Σ пересекает конус по гиперболе (*почему?*). Плоскость Θ , перпендикулярная оси вращения конуса, пересекает его по окружности (см. рис. 7.14).

Чтобы полностью решить задачу, надо построить все три перечисленные линии, после чего выделить (толщиной или цветом) участки построенных линий, указывающие границу выреза.

Сечение конуса плоскостью Θ . В сечении получаем окружность r , на которой отмечаем точки $1, 2, 3$ (рис. 7.15). Конус с вырезом симметричен относительно плоскости Φ , поэтому имеются точки $1', 2'$ и $3'$, условно не обозначенные на рис. 7.15, симметричные точкам $1, 2, 3$ (покажите точки $1', 2', 3'$ на рис. 7.15 самостоятельно). Участки $1-2-3$ и $1'-2'-3'$ окружности r , заключенные между точками $1, 3$ и $1', 3'$, указывают границу выреза, лежащую в плоскости Θ . Профильные проекции точек 2 и $2'$ принадлежат профильному очерку конуса.

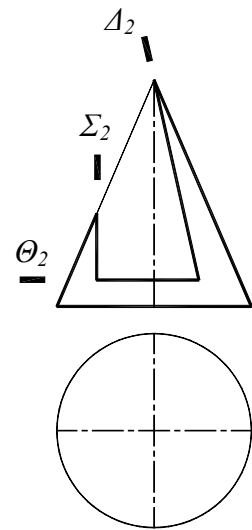


Рис. 7.14

Сечение конуса плоскостью Δ . В плоскости Δ получаем два отрезка прямых линий: участок $S-1$ и симметричный ему относительно плоскости Φ участок $S-1'$ (напомним, что точку $1'$, не отмеченную на рис. 7.15, надо указать самостоятельно).

Сечение конуса плоскостью Σ . Плоскость Σ пересекает все образующие конуса, кроме двух образующих, расположенных параллельно секущей плоскости Σ (покажите эти образующие на чертеже).

Отметим также, что плоскость Σ пересекает *обе* полости конуса (“верхняя” полость конуса на рис. 7.15 условно не показана).

Любое из отмеченных свойств позволяет сделать вывод, что в сечении поверхности конуса плоскостью Σ получается гипербола. Вершина гиперболы – точка 5 , лежащая в плоскости симметрии Φ на фронтальном очерке конуса. Промежуточная точка 4 гиперболы найдена с помощью вспомогательной плоскости Θ' , пересекающей конус по окружности r' . Точка 4 лежит на r' . Угловая точка 3 , принадлежащая как круговому сечению r , так и гиперболе, была найдена ранее. Любое количество дополнительных точек гиперболы можно построить из условия их принадлежности к поверхности конуса (тема 6, задача 6.3).

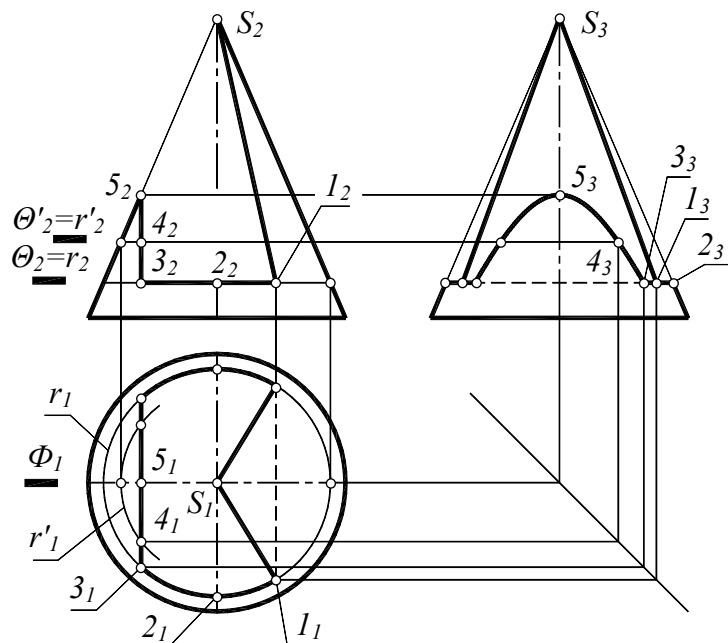


Рис. 7.15

Таким образом, граница выреза составлена из двух участков окружности r , участка гиперболы и двух прямых линий $S-I$ и $S-I'$ – образующих конуса.

Задача 7.10

Построить горизонтальную и профильную проекции конуса с вырезом, образованным фронтально-проецирующими плоскостями Δ , Ψ , Θ (рис. 7.16).

Решение. Плоскость Δ , проходящая через вершину конуса, пересекает его по двум прямолинейным образующим SN и SN' (рис. 7.17). Точки N и N' лежат на круговом основании конуса и расположены симметрично относительно плоскости Φ (точка N' на рис. 7.17 условно не отмечена – указать ее самостоятельно).

Плоскость Ψ пересекает поверхность конуса по окружности r , на которой отмечены опорные точки 1, 2, 3. Профильная проекция точки 2 лежит на профильном очерке конуса (*почему?*). Точка 3 – угловая точка линии выреза. В этой точке окружность r пересекается с образующей SN . Точка 3', симметричная точке 3 относительно плоскости Φ , на чертеже условно не обозначена (отметить ее самостоятельно).

Плоскость Θ пересекает поверхность конуса по эллипсу, главная ось AB которого лежит в плоскости симметрии Φ (*почему?*). Центр O эллипса – середина оси AB . Другая главная ось эллипса (ось CD) перпендикулярна плоскости Φ , поэтому фронтальные проекции точек O , C , D совпадают. Горизонтальные проекции точек C и D найдены из условия принадлежности этих точек к поверхности конуса (это построение на рис. 7.17 условно не показано).

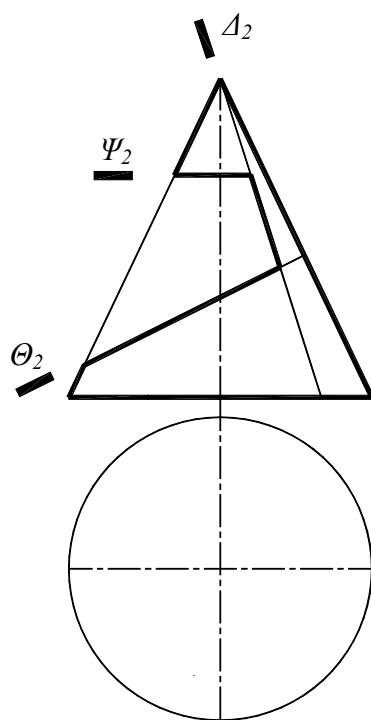


Рис. 7.16

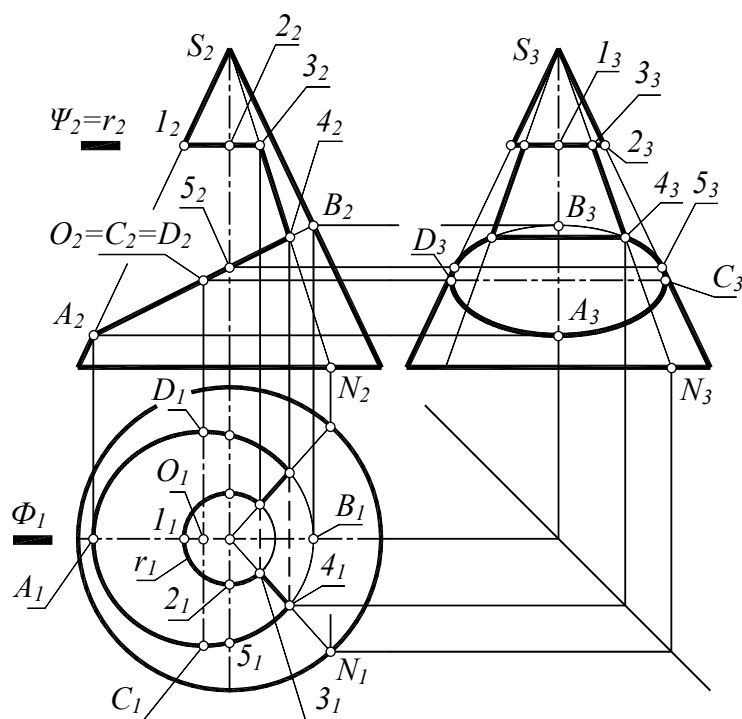


Рис. 7.17

Таким образом, граница выреза составлена из дуги окружности r , прямолинейных участков двух образующих и участка эллипса. Участки указанных кривых стыкуются между собой в угловых точках 3, 3' и 4, 4' (точки 3', 4', симметричные точкам 3, 4 относительно плоскости Φ , на рис. 7.17 условно не отмечены). В этих точках граница выреза терпит излом.

7.3. Пересечение сферы проецирующими плоскостями

В сечении сферы плоскостью всегда получается окружность (*почему?*). Если секущая плоскость проходит через центр сферы, то радиус кругового сечения равен радиусу сферы, а центр кругового сечения совпадает с центром сферы. Если секущая плоскость не проходит через центр сферы, то центр кругового сечения совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость (*почему?*).

Если секущая плоскость параллельна какой-либо плоскости проекций, то круговое сечение проецируется на эту плоскость проекций окружностью, радиус которой равен истинному радиусу сечения. Если секущая плоскость наклонена к плоскости проекций, то круговое сечение сферы изображается на этой плоскости проекций эллипсом.

Задача 7.11 (рис. 7.18)

Построить сечение полусферы фронтально-проецирующей плоскостью Δ .

Решение. В сечении сферы плоскостью Δ получаем окружность r . Для построения центра R этой окружности надо опустить перпендикуляр из центра O сферы к секущей плоскости Δ . На пересечении этого перпендикуляра с плоскостью Δ отмечают центр R кругового сечения r .

Проекция кругового сечения r на Π_1 – эллипс r_1 с главными осями A_1B_1 и C_1D_1 . Длина главной оси C_1D_1 эллипса r_1 равна диаметру окружности r (*почему?*). Для построения горизонтальной проекции точек C и D использована вспомогательная секущая плоскость Θ , пересекающая полусферу по окружности α . Точки C, D лежат на α .

Проекция кругового сечения r на Π_3 – эллипс r_3 с главными осями A_3B_3 и C_3D_3 . Длина главной оси C_3D_3 эллипса r_3 равна диаметру окружности r (*почему?*). Для построения профильной проекции точек C и D использована вспомогательная секущая плоскость Ψ , пересекающая полусферу по окружности ρ . Точки C, D лежат на ρ .

Любое количество дополнительных точек сечения r может быть построено из условия принадлежности всех точек этого сечения к поверхности полусферы.

Задача 7.12

Построить проекции сферы с вырезом, образованным фронтально-проецирующими плоскостями Δ, Ψ, Θ (рис. 7.19).

Решение. В сечении сферы плоскостью Θ получаем окружность α (как построен центр O' этой окружности?). На плоскости Π_1 окружность α изображается эллипсом α_1 , на плоскости Π_3 – эллипсом α_3 . На чертеже отмечены проекции характерных точек 1, 2, 3, 4 этой окружности (см. рис. 7.19). Точка 1 – наивысшая, точки 2 и 3 – очерковые (профильная проекция точки 2 лежит на профильном очерке сферы, горизонтальная проекция точки 3 лежит на горизонтальном очерке сферы). В точке 3 меняется видимость горизонтальной проекции окружности r (*почему?*). Точка 4 – угловая точка выреза.

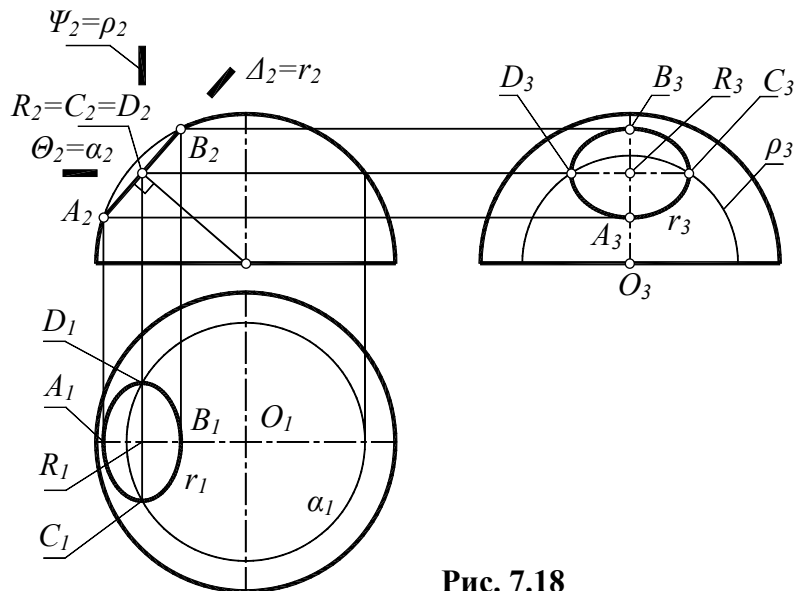


Рис. 7.18

В сечении сферы горизонтальной плоскостью уровня Ψ получаем окружность с радиусом r_c , дуга 4-5-6 которой образует границу выреза, лежащую в Ψ . Окружность с проецируется на плоскость Π_1 “в натуральную величину” – окружностью радиуса r_c .

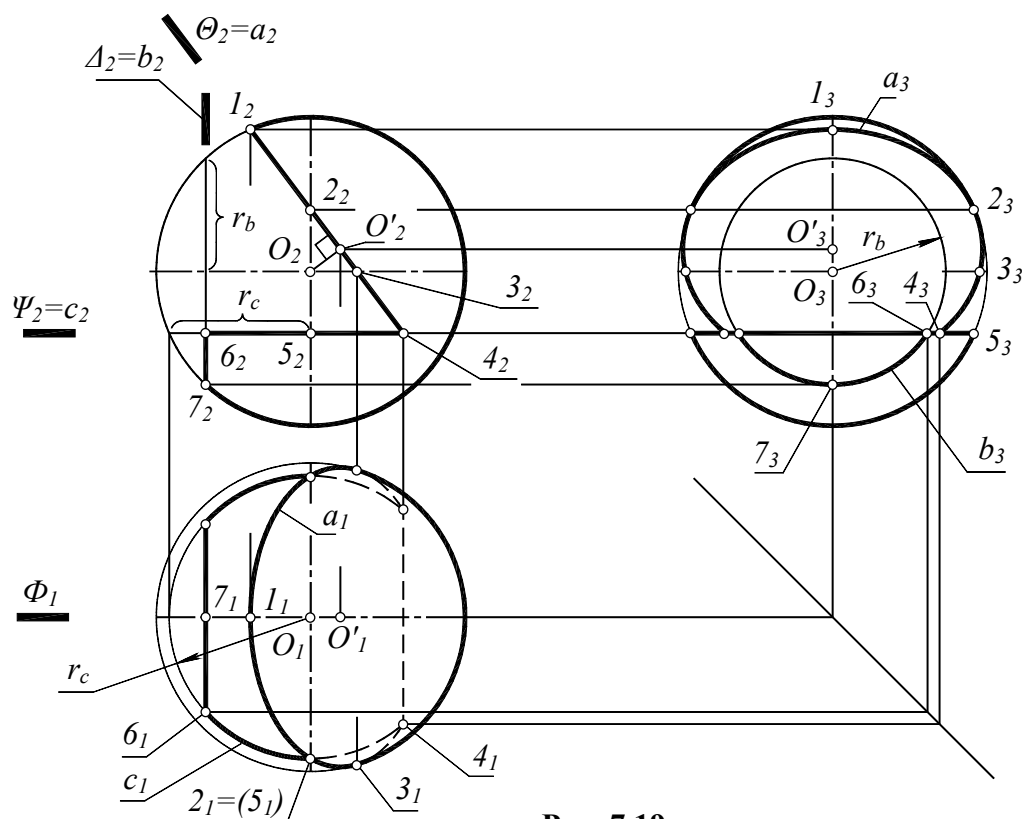


Рис. 7.19

В сечении сферы профильной плоскостью уровня Δ получаем окружность b радиуса r_b , которая проецируется на Π_3 окружностью b_3 радиусом r_b . Дуга 6-7-6' окружности b образует границу выреза, лежащую в Δ (см. примечание). Точка 7 – низшая точка границы выреза.

Примечание. Сфера с вырезом, показанная на рис. 7.19, обладает плоскостью симметрии Φ , относительно которой все точки выреза расположены симметрично. Поэтому на рис. 7.19 условно не обозначены опорные точки 2', 3', 4', 5', 6', симметричные опорным точкам 2, 3, 4, 5, 6 (указать их самостоятельно).

Задача 7.13 (рис. 7.20)

Сфера с прямоугольным вырезом усечена наклонной фронтально-проецирующей плоскостью Σ . Прямоугольный вырез образован горизонтально-проецирующими плоскостями. Построить границу выреза и линию сечения сферы плоскостью Σ .

Решение. Прямоугольный вырез образован горизонтально-проецирующими плоскостями Ψ , Ψ' и Δ (см. рис. 7.20). Плоскости Ψ и Ψ' параллельны плоскости Π_2 . Плоскость Δ параллельна плоскости Π_3 .

Плоскости Ψ и Ψ' , расположенные симметрично относительно плоскости симметрии Φ , пересекают сферу по окружностям b и b' одинакового радиуса r_b . Окружности b и b' проецируются на плоскость Π_2 в натуральную величину (окружностью b_2). Дуга 22-32-42 окружности b_2 – фронтальная проекция линии разреза сферы плоскостью Ψ .

Линия разреза сферы плоскостью Δ – окружность c . Дуга 2-1-2' этой окружности ограничивает вырез сверху, дуга 4-5-4' ограничивает вырез снизу.

Построение линии сечения сферы плоскостью Σ . Плоскость Σ пересекает сферу по окружности a . Фронтальная проекция a_2 окружности a совпадает с вырожденной про-

екцией Σ_2 секущей плоскости Σ . Горизонтальная проекция a_1 кругового сечения a – эллипс a_1 с главными осями A_1B_1 и C_1D_1 . Для построения центра O' кругового сечения a надо провести перпендикуляр из центра O сферы к секущей плоскости Σ . На пересечении перпендикуляра с плоскостью Σ отмечаем центр O' кругового сечения a .

Таким образом, на горизонтальной плоскости проекций наклонное круговое сечение a сферы изображается эллипсом a_1 . Центр O' кругового сечения a проецируется в центр O'_1 эллипса a_1 . Главные оси эллипса A_1B_1 и C_1D_1 – проекции диаметров AB и CD окружности a . Почему большая ось C_1D_1 эллипса a_1 равна диаметру окружности a ?

7.4. Пересечение кругового цилиндра проецирующими плоскостями

Задача 7.14 (рис. 7.21)

Построить сечение прямого кругового цилиндра наклонной плоскостью Θ .

Решение. Цилиндр вращения можно рассматривать как круговой конус (конус вращения), у которого вершина “удалена в бесконечность”. Действительно, если взять обычный конус вращения и мысленно увеличивать его высоту (не увеличивая при этом диаметр основания конуса), то конус будет все больше “походить” на цилиндр. В пределе, когда вершина конуса совпадет с несобственной (бесконечно удаленной) точкой оси конуса, получаем круговой цилиндр. Таким образом, цилиндр есть частный случай конической поверхности, а именно: *цилиндр – это конус с несобственной вершиной*.

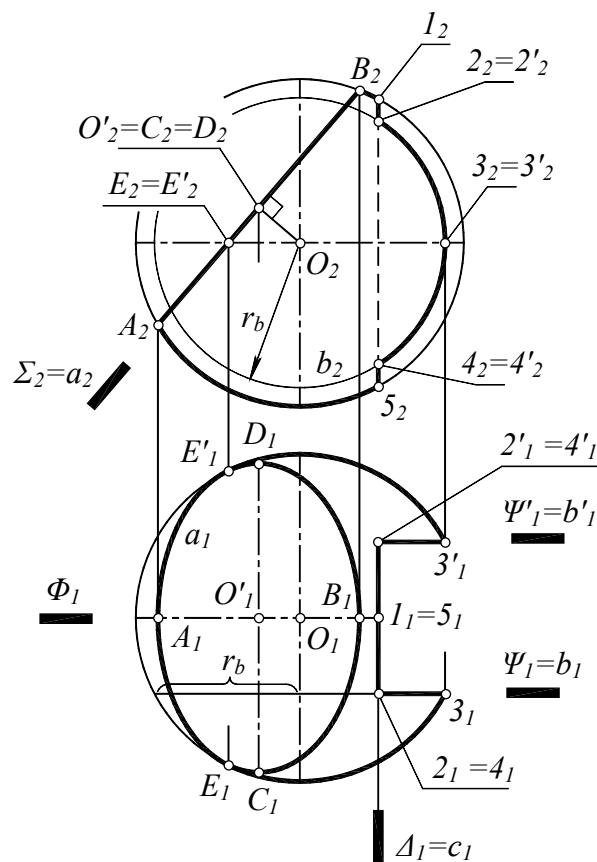


Рис. 7.20

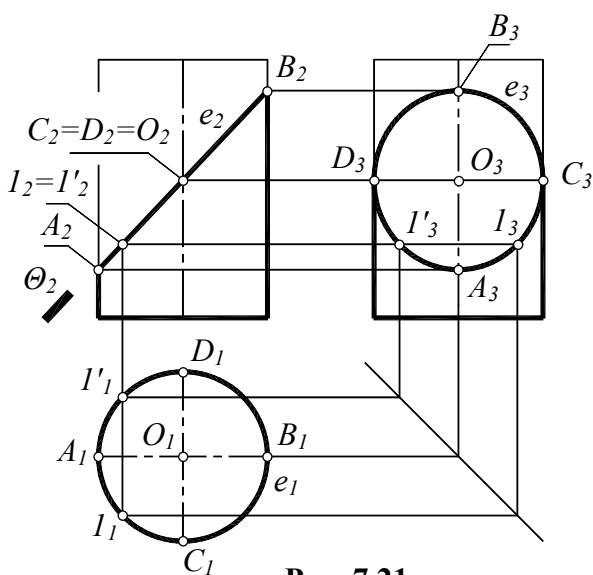


Рис. 7.21

Наклонная плоскость Θ на рис. 7.21 пересекает *все* образующие цилиндра. Напомним, что если секущая плоскость пересекает *все* образующие конуса, то в сечении получаем эллипс [1, п. 7.3]. Но цилиндр – частный случай конуса, поэтому в сечении цилиндра плоскостью Θ также получаем эллипс e .

Фронтальная проекция e_2 сечения e совпадает с вырожденной фронтальной проекцией Θ_2 секущей плоскости Θ . Весь эллипс e находится на поверхности цилиндра, поэтому горизонтальная проекция e_1 эллипса e совпадает с горизонтальной проекцией цилиндрической поверхности. Профильная проекция сечения e – эллипс e_3 с главными осями A_3B_3 и C_3D_3 . Чему

Рис. 7.21

равна истинная величина большой и малой оси эллипса e , полученного в сечении цилиндра плоскостью Θ ?

Дополнительные точки эллиптического сечения e определяются из условия его принадлежности поверхности цилиндра. Например, на рис. 7.21 показано построение дополнительных точек l и l' эллипса e .

Задача 7.15

Построить проекции прямого кругового цилиндра с вырезом, образованным фронтально-проецирующими плоскостями Δ , Σ , Θ (рис. 7.22).

Решение. Плоскость Σ , перпендикулярная оси вращения цилиндра, пересекает его по окружности. На рис. 7.22 отмечены точки 1 , 2 , $2'$ этой окружности.

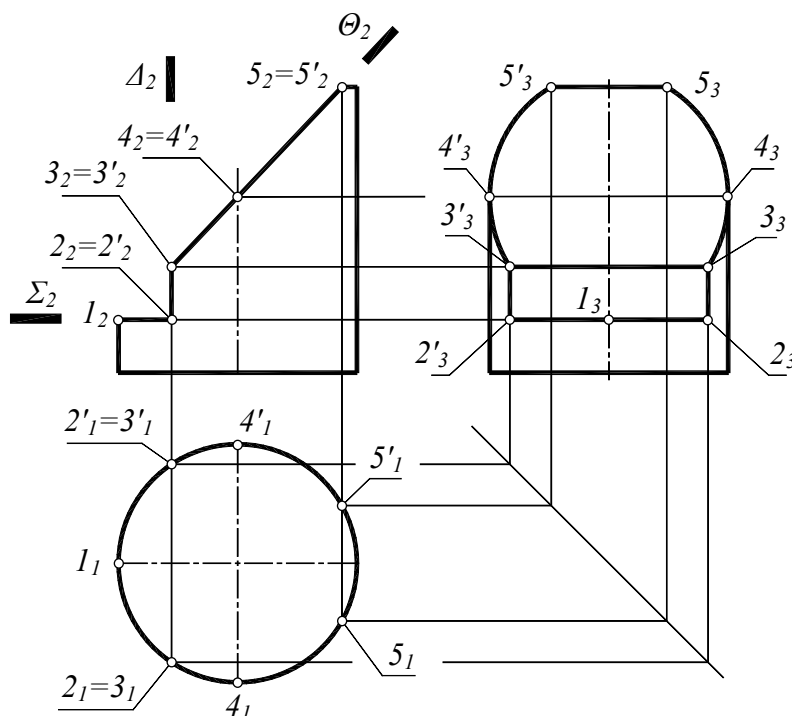


Рис. 7.22

Плоскость Δ параллельна оси вращения цилиндра, то есть проходит через несобственную точку оси цилиндра. Напомним, что цилиндр – это “конус с несобственной вершиной”. Плоскость Δ проходит через эту несобственную вершину. Но в сечении конуса плоскостью, проходящей через вершину, получаем две прямые. Следовательно, плоскость Δ пересекает цилиндр (“конус с несобственной вершиной”) по двум прямым. На рис. 7.22 отмечены участки 2-3 и 2'-3' этих прямых.

Наклонная плоскость Θ пересекает цилиндр по эллипсу (см. предыдущую задачу). На рис. 7.22 отмечены характерные (опорные) точки 3-4-5 и 3'-4'-5' эллиптического сечения. Длина малой оси эллипса равна диаметру цилиндра (отрезок 4-4'). Как определить длину большой оси?

Задача 7.16

Цилиндр с прямоугольным вырезом рассечен наклонной фронтально-проецирующей плоскостью Σ . Прямоугольный вырез образован фронтально-проецирующими плоскостями. Построить границу выреза и линию сечения цилиндра плоскостью Σ (рис. 7.23).

Решение. В сечении цилиндра наклонной плоскостью Σ получаем эллипс с главными осями AB и CD (см. задачу 7.14). Длина малой оси CD равна диаметру цилиндра (почему?). Длина большой оси AB равна длине ее фронтальной проекции A_2B_2 (почему?).

му?). Прямоугольный вырез можно считать “тоннелем” в цилиндре. Граница “въезда в туннель” образована вертикальными прямыми 1-2, 4-5 (боковые стены туннеля) и участком окружности 2-3-4 (потолок туннеля). Граница “выезда из туннеля” симметрична границе “въезда” относительно плоскости симметрии Φ . На рис. 7.23 характерные (опорные) точки границы “выезда” условно не обозначены. Указать их самостоятельно.

Задача 7.17

Построить третью проекцию детали и истинный вид сечения детали фронтально-проецирующей плоскостью Σ . Построить горизонтальную и профильную проекции сечения детали плоскостью Σ (рис. 7.24).

Решение. Деталь состоит из усеченной шестиугольной пирамиды и кругового цилиндра. В цилиндре имеется углубление в форме перевернутого усеченного конуса вращения (углубление показано штриховыми линиями).

Плоскость Σ пересекает внутреннюю поверхность конического углубления и внешнюю поверхность цилиндра по эллипсам (*почему?*), а пирамиду – по ломаной линии. Для решения задачи надо построить проекции этих линий. Построение истинного вида сечения выполняется способом замены плоскостей проекций.

Сечение цилиндра плоскостью Σ . На поверхности цилиндра отмечаем опорные точки A, B, C (рис. 7.25). Точка A принадлежит верхнему круговому основанию цилиндра, точка C – нижнему круговому основанию цилиндра. Профильная проекция точки B принадлежит профильной очерковой линии цилиндра (*почему?*). Точки A', B', C' искомого сечения, симметричные точкам A, B, C относительно плоскости симметрии Φ , на рис. 7.25 условно не отмечены (указать их самостоятельно). Любое количество дополнительных точек линии сечения цилиндра плоскостью Σ можно найти из условия их принадлежности к поверхности цилиндра.

Сечение пирамиды плоскостью Σ . Плоскость Σ “разрезает” пирамиду по ломаной линии $CDEE'D'C'$, где точки E', D', C' , не отмеченные на рис. 7.25, симметричны точкам E, D, C относительно плоскости симметрии Φ . Точки C и C' принадлежат одновременно как поверхности цилиндра, так и верхнему основанию пирамиды. Точка D отмечена на пересечении трех ребер пирамиды (*каких?*). Через точки D, D' , согласно условию задачи, проходит секущая плоскость Σ . Точка E и симметричная ей точка E' находятся на нижнем основании усеченной пирамиды. Линии DE и $D'E'$ – линии разреза наклонных боковых граней пирамиды секущей плоскостью Σ .

Сечение конического углубления плоскостью Σ . На поверхности конического углубления отмечаем точки 1, 2, 3 (см. рис. 7.25). Точка 1 принадлежит верхнему круговому основанию конического углубления, точка 3 – нижняя точка эллиптического сечения. Точка 2 – промежуточная точка искомого эллиптического сечения. Любое коли-

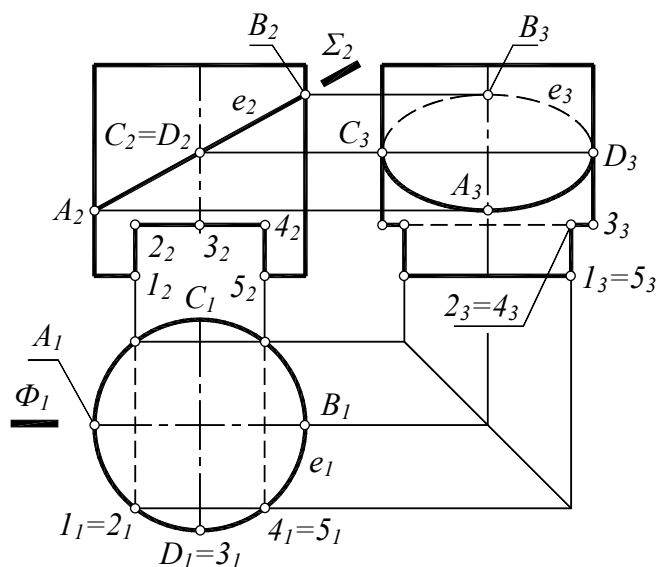


Рис. 7.23

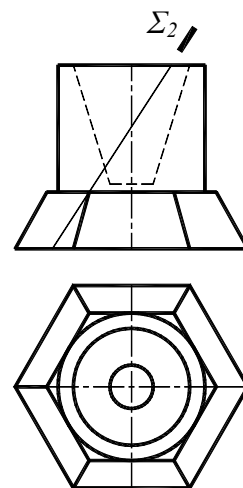


Рис. 7.24

чество дополнительных точек этого сечения можно найти из условия их принадлежности конической поверхности. Деталь имеет плоскость симметрии Φ , поэтому на чертеже (см. рис. 7.25) следует отметить точки $1'$, $2'$, симметричные точкам 1 , 2 относительно плоскости симметрии Φ (сделать это самостоятельно).

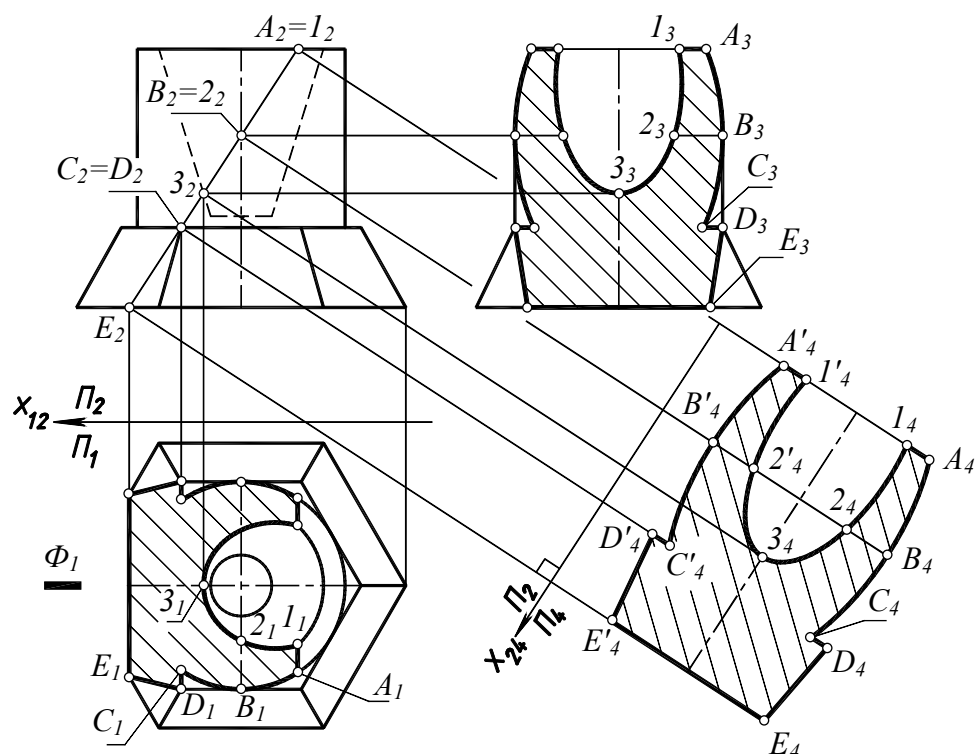


Рис. 7.25

Истинный вид сечения. Построение выполняется способом замены плоскостей проекций. Вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , параллельную секущей плоскости Σ . Плоскость Σ в системе координат Π_2/Π_4 становится плоскостью уровня ($\Sigma \parallel \Pi_4$), поэтому сечение детали, лежащее в плоскости Σ , изображается на плоскости Π_4 “в натуральную величину”.

Чтобы построить истинный вид сечения детали, находим на новой плоскости Π_4 проекции опорных точек 1 , 2 , 3 , A , B , C , D , E . Координаты этих точек без изменений переносятся с плоскости Π_1 на новую плоскость Π_4 .

Проекции 1_4 , 2_4 , 3_4 , $1'_4$, $2'_4$ точек 1 , 2 , 3 , $1'$, $2'$ соединяем плавной кривой. Получаем дугу эллипса – сечение конического углубления плоскостью Σ (см. рис. 7.25).

Проекции точек A , B , C и симметрично расположенных точек A' , B' , C' также “переносим” на плоскость Π_4 и соединяем плавной кривой. Получаем две симметрично расположенные дуги одного и того же эллипса – дугу $A_4B_4C_4$ и симметричную ей дугу $A'_4B'_4C'_4$.

Соединяя на плоскости Π_4 проекции точек C , D , E и симметричных им точек C' , D' , E' , получаем ломаную линию – истинный вид сечения пирамиды плоскостью Σ .

Наглядное аксонометрическое изображение сечения пирамиды плоскостью Σ представлено на рис. 7.26.

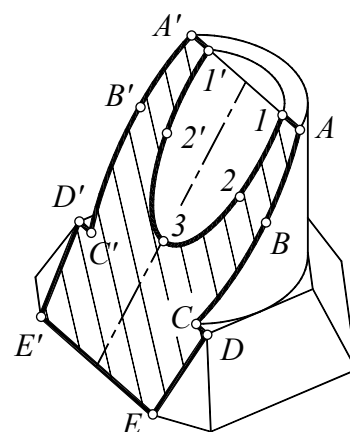


Рис. 7.26

Тема 8

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Задачи, в которых надо определить общие элементы геометрических фигур, заданных на чертеже, называют позиционными задачами. Построение точки (или точек) пересечения произвольной кривой линии с произвольной поверхностью называют *первой позиционной задачей*. В простейшем случае определяется точка пересечения прямой линии с плоскостью.

В данной теме рассматриваются примеры решения первой позиционной задачи для общего случая, когда требуется найти точку (или точки) пересечения линии с произвольной поверхностью. Линия может быть как прямой, так и произвольной плоской или пространственной кривой.

8.1. Пересечение прямой линии с поверхностью

Напомним схему решения первой позиционной задачи [1]. Для построения точек пересечения поверхности Φ с прямой m надо выполнить три действия:

1. Через прямую m провести вспомогательную секущую плоскость Σ ;
2. Построить линию l разреза поверхности Φ секущей плоскостью Σ ;
3. Отметить точки пересечения прямой m с линией разреза l .

Отмеченные точки являются искомыми (*почему?*).

Задача 8.1

Построить точки пересечения прямой линии общего положения m с поверхностью пирамиды $MNKS$ (рис. 8.1).

Решение. Через данную прямую m проводим какую-либо вспомогательную секущую плоскость. Вспомогательная плоскость может быть выбрана проецирующей. Например, на рис. 8.1 через прямую m проведена фронтально-проецирующая плоскость Σ . Разумеется, такой выбор вспомогательной плоскости не является обязательным. Обязательным является требование, чтобы вспомогательная секущая плоскость проходила через прямую m . Вычерчиваем линию разреза пирамиды секущей плоскостью Σ . Благодаря тому, что плоскость Σ занимает проецирующее положение, нетрудно отметить точки 1, 2, 3 пересечения ребер пирамиды плоскостью Σ . Треугольник 123 – линия разреза поверхности пирамиды плоскостью Σ . Отмечаем точки A , B пересечения данной прямой m и линии разреза 123 . Точки A , B находятся как на прямой m , так и на поверхности пирамиды. Следовательно, A и B – искомые точки пересечения прямой m с поверхностью пирамиды. Участок AB линии m – невидимый, так как находится внутри пирамиды.

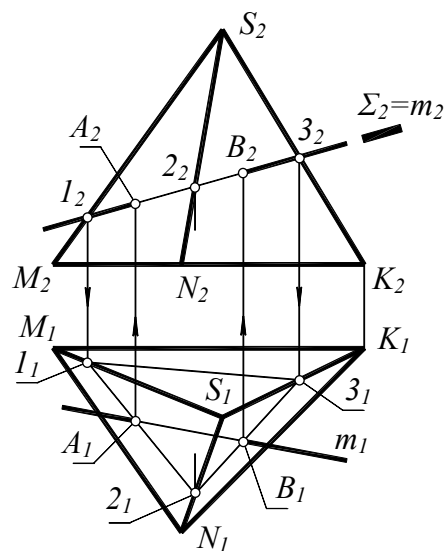


Рис. 8.1

Задача 8.2

Построить точки пересечения горизонтально-проецирующей прямой m с поверхностью пирамиды (рис. 8.2).

Решение. В отличие от предыдущей задачи, данная прямая m занимает не общее, а частное положение относительно плоскостей проекций. Это обстоятельство не изменяет последовательность решения задачи.

Через данную прямую m проводим вспомогательную секущую плоскость Σ . В случае, показанном на рис. 8.2, через прямую m целесообразно провести горизонтально-проецирующую плоскость Σ . Вычерчиваем линию 123 разреза пирамиды секущей плоскостью Σ . Благодаря тому, что плоскость Σ занимает проецирующее положение, нетрудно найти точки $1, 2, 3$ пересечения ребер пирамиды плоскостью Σ . Отмечаем точки A, B пересечения данной прямой m и линии разреза 123 .

Точки A, B – искомые точки пересечения прямой m с поверхностью пирамиды. Точка B принадлежит основанию пирамиды. Участок AB линии m – невидимый, так как находится внутри пирамиды.

Задача 8.3

Построить точки пересечения прямой линии l с трехгранной призмой.

На рис. 8.3 дана наглядная иллюстрация к схеме решения задачи: прямая l заключена во вспомогательную плоскость Σ , пересекающую призму по ломаной линии 123 . Искомые точки K, L отмечены на пересечении прямой l с ломаной 123 . Рассмотрим решение этой задачи на чертеже (рис. 8.4).

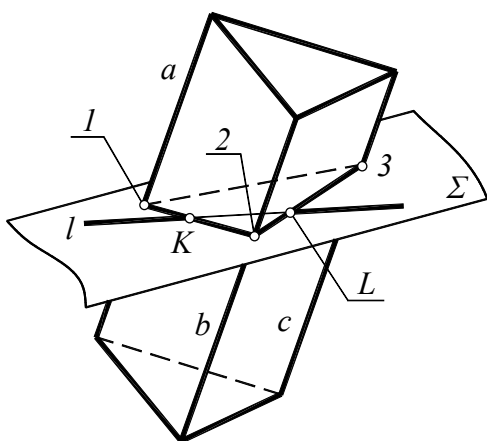


Рис. 8.3

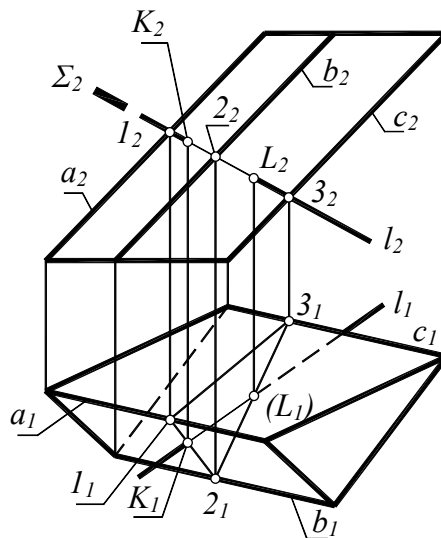


Рис. 8.4

Через данную прямую l проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Σ . Находим линию 123 пересечения плоскости Σ с поверхностью призмы. Отмечаем точки K, L пересечения линии 123 с данной прямой l . Эти точки являются искомыми точками пересечения прямой l с призмой. Видимость проекций прямой l определяют с помощью конкурирующих точек.

Задача 8.4

Построить точки пересечения сферы с прямой линией.

Решение. В соответствии с общей схемой, надо заключить данную прямую во вспомогательную секущую плоскость и построить линию разреза сферы этой плоскостью. Заданная прямая линия пересекается с линией разреза в искомым точках.

Если прямая занимает *частное положение* (прямая уровня или проецирующая), то через нее может быть проведена вспомогательная секущая плоскость уровня. Напри-

мер, пусть требуется построить точки A, B пересечения горизонтали h со сферой (рис. 8.5). Через горизонталь h проводим горизонтальную плоскость уровня Σ , которая пересекает сферу по окружности m . Эта окружность проецируется на Π_1 “в натуральную величину”, то есть окружностью. На пересечении окружности m и горизонтали h отмечаем искомые точки A, B .

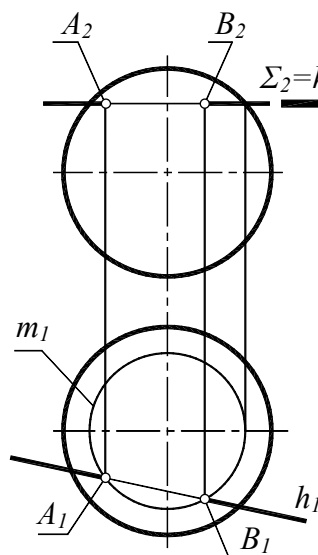


Рис. 8.5

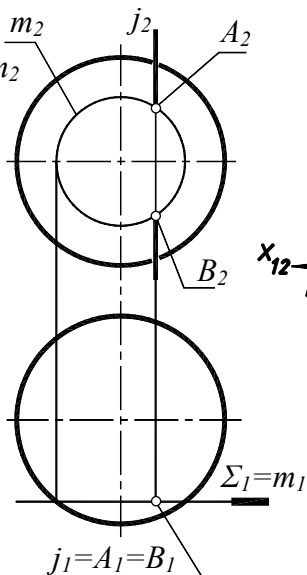


Рис. 8.6

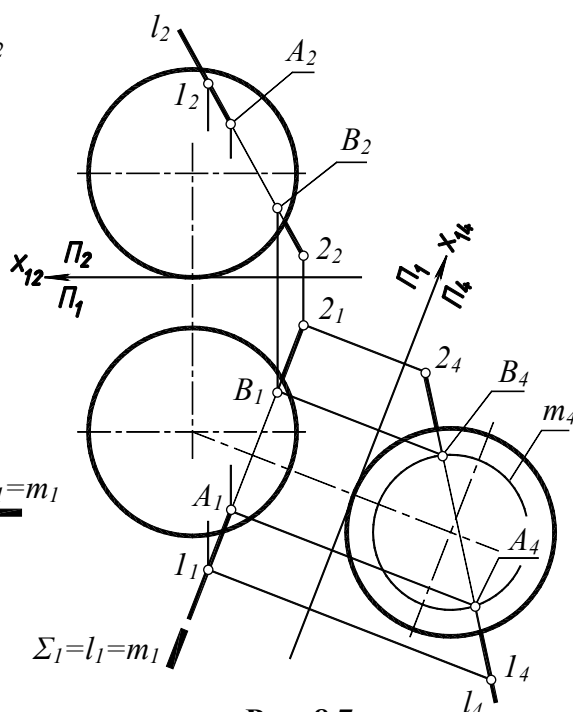


Рис. 8.7

На рис. 8.6 найдены точки пересечения проецирующей прямой j со сферой. Проводим через j вспомогательную фронтальную плоскость уровня Σ , которая пересекает сферу по окружности m . На пересечении окружности m и проецирующей прямой j отмечаем искомые точки.

Пусть прямая l занимает *общее положение* (рис. 8.7). Требуется найти точки A и B пересечения сферы с прямой l . Задача решается преобразованием прямой l общего положения в прямую уровня (способом замены плоскостей проекций). Введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой l . Проведем через прямую l горизонтально-проецирующую плоскость Σ . На плоскости Π_4 построим проекцию l_4 прямой l и проекцию m_4 окружности m , полученной в сечении заданной сферы плоскостью Σ . На пересечении проекций l_4 и m_4 отмечаем проекции A_4 и B_4 искомых точек. Затем с помощью линий связи переносим найденные точки в исходную систему координат Π_1/Π_2 . Задача решена.

Задача 8.5 (рис. 8.8)

Построить точки пересечения поверхности кругового конуса с горизонталью h .

Решение. Через горизонталь h проводим вспомогательную секущую плоскость уровня Σ , которая разрезает поверхность конуса по окружности r . Отмечаем точки A, B пересечения горизонтали с этой окружностью. Точки A, B – искомые точки пересечения горизонтали с поверхностью конуса.

Задача 8.6 (рис. 8.9)

Найти точки пересечения конуса с горизонтально-проецирующей прямой j .

Решение. Способ 1. Проведем через прямую j и через вершину конуса S вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Σ . Поскольку плоскость Σ проходит через вершину конуса, то она пересекает его по треугольнику $IS2$ (*почему?*). Отмечаем

точки A, B пересечения прямой j со сторонами треугольника IS_2 . Точки A, B – искомые точки пересечения проецирующей прямой j с поверхностью конуса. Точка B находится на “дне” конуса.

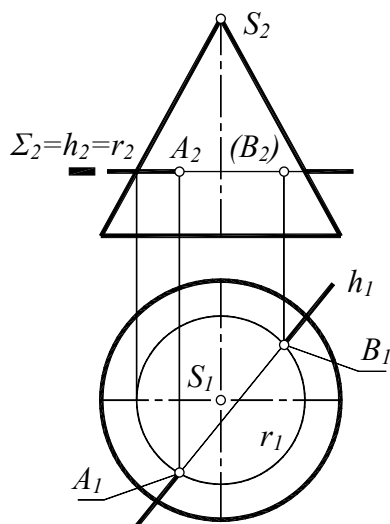


Рис. 8.8

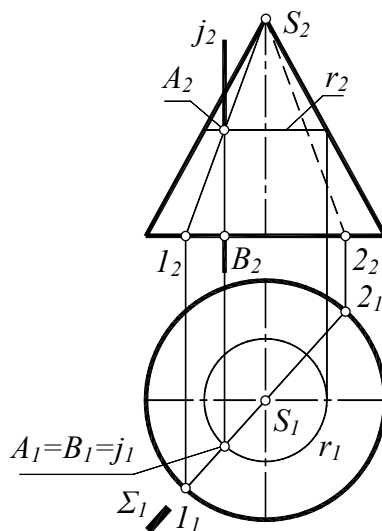


Рис. 8.9

Способ 2. Горизонтальная проекция A_1 искомой точки A совпадает с вырожденной горизонтальной проекцией j_1 прямой j . Поэтому фронтальная проекция A_2 точки A может быть найдена с помощью *признака принадлежности*: точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии на этой поверхности. Начертим на поверхности конуса окружность r , горизонтальная проекция r_1 которой проходит через горизонтальную проекцию A_1 точки A . Найдя фронтальную проекцию r_2 окружности r , отмечаем на ней фронтальную проекцию A_2 точки A . Точка $A(A_2, A_1)$ есть искомая точка пересечения прямой j с поверхностью конуса.

Проверка. Оба способа дают одинаковый результат: точка A находится в точке пересечения прямой $S-I$ и окружности r (см. рис. 8.9).

Задача 8.7

Построить точки пересечения поверхности кругового конуса с прямой общего положения (рис. 8.10).

Решение. В соответствии со схемой решения первой позиционной задачи, надо через данную прямую провести вспомогательную секущую плоскость, построить линию разреза конуса этой плоскостью и отметить искомые точки на пересечении данной прямой с найденной линией разреза. Для упрощения построений следует выбрать вспомогательную секущую плоскость, пересекающую конус по *графически простой линии* (по прямой или окружности).

Среди множества плоскостей, проходящих через m , есть плоскость, которая проходит как через m , так и через вершину конуса S . Обозначим эту плоскость буквой Σ . Плоскость Σ , заданная на чертеже прямой m и вершиной конуса S , пересекает конус по двум прямым линиям (образующим конуса). Поэтому целесообразно выбрать плоскость $\Sigma(S, m)$ в качестве вспомогательной секущей плоскости.

Чтобы построить линию разреза конуса плоскостью Σ , проведем в плоскости Σ произвольную прямую $S-I$ и найдем точку N пересечения этой прямой с плоскостью основания конуса Θ . Прямая m пересекается с плоскостью Θ в точке M . Поэтому прямая MN есть линия разреза плоскости основания конуса Θ секущей плоскостью Σ .

В точках 2 и 3 плоскость Σ пересекает круговое основание конуса. Так как Σ проходит через вершину S конуса, то линия разреза конуса плоскостью Σ – треугольник $S23$.

Искомые точки A, B пересечения конуса с прямой m определяются на пересечении линии $S23$ с прямой m . Задача решена.

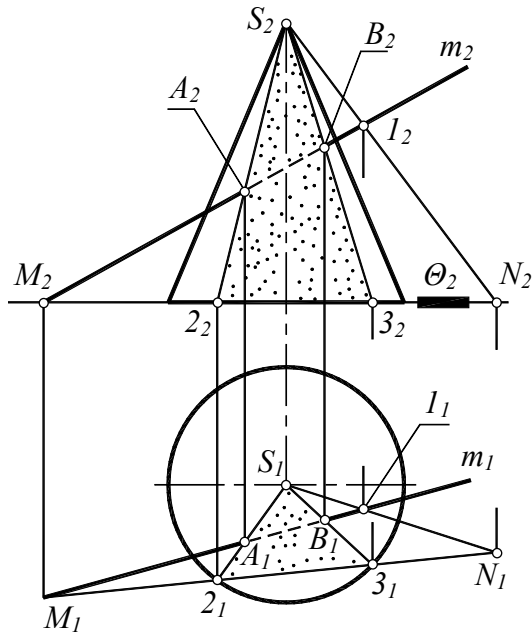


Рис. 8.10

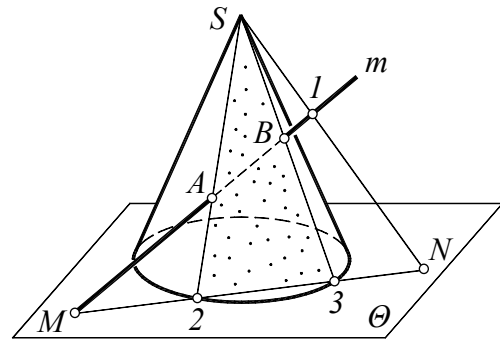


Рис. 8.11

На рис. 8.11 дана наглядная иллюстрация: вспомогательная плоскость общего положения $\Sigma(m, S)$ пересекает конус по треугольнику $S23$. Искомые точки A, B пересечения конуса с прямой m отмечены на пересечении линии $S23$ и прямой m .

Примечание. Решение было найдено не с помощью проецирующей плоскости, а с помощью вспомогательной секущей плоскости *общего положения*. Если в рассмотренной задаче применить вспомогательную проецирующую плоскость, проходящую через m , то она “разрежет” конус либо по эллипсу, либо по гиперболе (*почему?*). Вычерчивание этих линий затруднит решение и сделает его менее точным.

Задача 8.8

Построить точку L пересечения прямой l с линейчатой поверхностью Φ , заданной направляющими a, b и плоскостью параллелизма Γ (рис. 8.12).

Решение. Поверхность Φ образована движением прямолинейной образующей, скользящей по криволинейным направляющим a, b . При этом образующая во всех своих положениях параллельна плоскости Γ . Линейчатую поверхность Φ называют *цилиндроидом* [1, п. 6.2.4]. Плоскость параллелизма Γ занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому фронтальная проекция любой образующей параллельна вырожденной фронтальной проекции Γ_2 плоскости Γ . Например, $A_2B_2 \parallel \Gamma_2$ (рис. 8.13).

Чтобы построить точки пересечения прямой l с поверхностью Φ , надо предварительно начертить *сетку образующих* этой поверхности (*как?*). Далее задача решается в полном соответствии с алгоритмом решения первой позиционной задачи: проводим через прямую l вспомогательную секущую плоскость Σ , строим линию разреза $m = \Phi \cap \Sigma$, отмечаем искомую точку L на пересечении прямой l с линией разреза m .

Линия $m = \Phi \cap \Sigma$ строится “по точкам”: отмечаем на чертеже точки пересечения секущей плоскости Σ с ранее начерченной сеткой образующих, затем полученные точки соединяем плавной кривой линией. Например, точка I , в которой плоскость Σ пересекает образующую AB , принадлежит линии разреза m . Видимость проекций линии l на чертеже определяется с помощью конкурирующих точек.

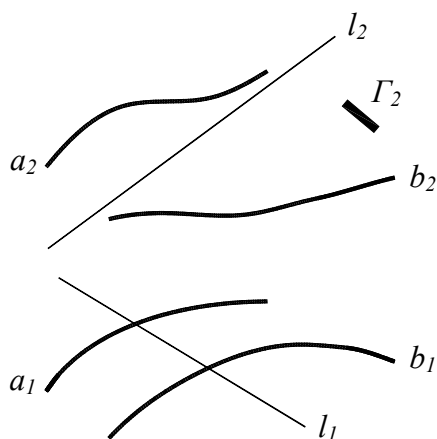


Рис. 8.12

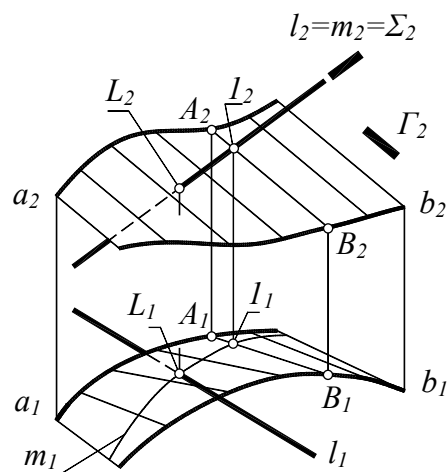


Рис. 8.13

8.2. Пересечение кривой линии с поверхностью

Для построения точек пересечения кривой линии l с поверхностью Φ используется универсальная схема решения первой позиционной задачи, но вместо вспомогательной секущей плоскости используется вспомогательная цилиндрическая поверхность, проходящая через заданную кривую l .

Задача 8.9

Построить точку L пересечения кривой l с плоскостью $\Delta(ABC)$ (рис. 8.14).

Проводим через кривую l фронтально-проецирующую цилиндрическую поверхность Φ . Находим (с помощью вспомогательных секущих плоскостей $\Sigma, \Sigma', \dots$) линию $m = 1-2-3-4$ пересечения цилиндрической поверхности Φ с заданной плоскостью $\Delta(ABC)$. Линии l и m пересекаются, так как они находятся на вспомогательной цилиндрической поверхности Φ . Отмечаем точку L пересечения линий l и m . Точка L – искомая. Видимость линии l на чертеже определяется обычным образом (с помощью конкурирующих точек).

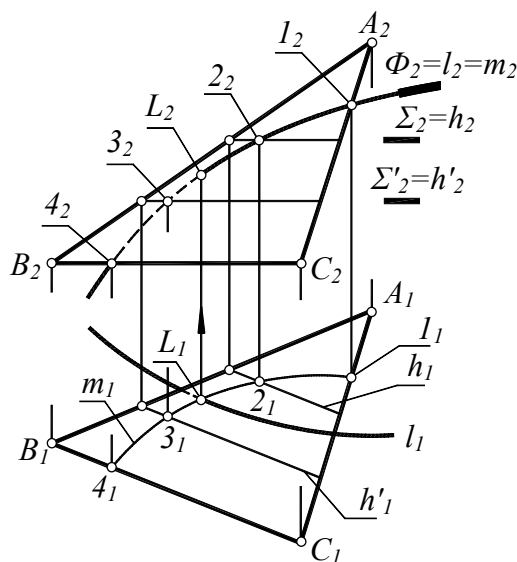


Рис. 8.14

Тема 9

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Две поверхности пересекаются по линии, которая одновременно принадлежит каждой из них. В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой, ломаной или кривой (плоской или пространственной).

Напомним, что задача определения линии пересечения двух поверхностей называется *второй позиционной задачей*. Решение этой задачи сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, соединяющая эти точки, будет искомой.

Основным способом построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, является *способ вспомогательных секущих поверхностей*. Сущность его заключается в том, что обе заданные поверхности “разрезаются” вспомогательной секущей поверхностью. Возникают две линии разреза, которые пересекаются между собой в точках, лежащих на обеих заданных поверхностях.

Чаще всего в качестве вспомогательных секущих поверхностей применяют плоскости (*способ вспомогательных плоскостей*) или сферы (*способ вспомогательных сфер*). В данной теме рассматривается способ вспомогательных секущих плоскостей.

9.1. Пересечение многогранников

Задача 9.1

Построить линию пересечения пирамиды $ABCS$ и прямой трехгранной призмы с вертикальными ребрами l, m, n (рис. 9.1).

Решение. При построении линии пересечения многогранников находят точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого, после чего найденные точки соединяют ломаной линией [1, п. 8.1].

Боковые грани призмы занимают горизонтально-проецирующее положение, поэтому точки 1, 2, 4, 6, 7, 8 пересечения ребер пирамиды с гранями призмы отмечаются на горизонтальной плоскости проекций без вспомогательных построений. Фронтальные проекции этих точек найдены с помощью линий связи.

Для построения точек 3 и 5 пересечения ребра l призмы с гранями пирамиды потребовалось провести через ребро l вспомогательную секущую плоскость Θ . Эта плоскость “разрезала” боковые грани пирамиды по прямым RS и ES . На пересечении прямой l с линиями RS и ES отмечены точки 3 и 5, в которых ребро l призмы пересекается с гранями пирамиды.

Найденные точки пересечения ребер с гранями определяют вершины искомой ломаной линии пересечения многогранников.

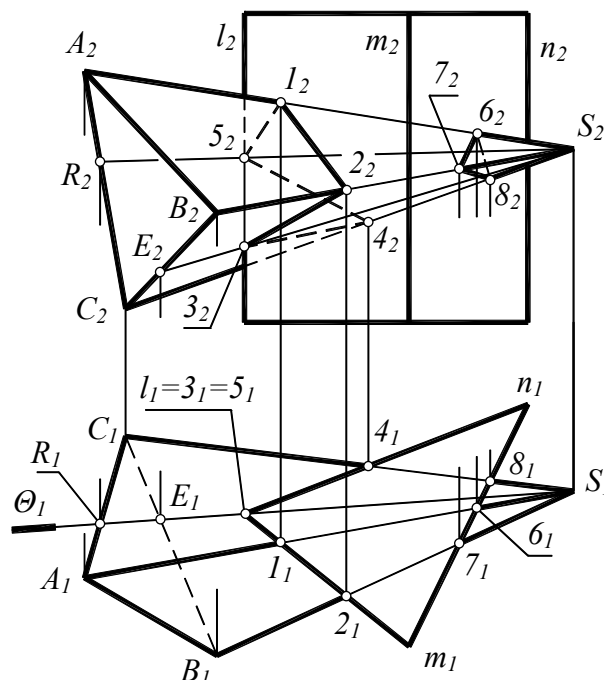


Рис. 9.1

Правило. При вычерчивании линии пересечения двух многогранников следует соединять отрезками прямых только те пары вершин, которые лежат в одной и той же грани первого многогранника и одновременно в одной и той же грани второго многогранника (*почему?*).

Например, на рис. 9.1 точка 1 соединена с точкой 5, так как точки 1, 5 принадлежат грани ACS пирамиды и одновременно грани (l, m) призмы. Точки 1 и 3 соединять нельзя, так как они находятся на разных гранях пирамиды. Также нельзя соединять точки 1 и 4, так как они находятся на одной и той же грани пирамиды, но на разных гранях призмы. Видимость ребер многогранников и линии их пересечения на чертеже определяется с помощью конкурирующих точек.

Примечание. Решение задачи заметно упрощается благодаря тому обстоятельству, что одна из поверхностей, участвующих в пересечении, занимает проецирующее положение (*какая?*).

Задача 9.2 (рис. 9.2)

Построить линию пересечения поверхностей двух прямых трехгранных призм.

Решение. Ребра вертикальной призмы обозначим строчными латинскими буквами a, b, c . Ребра горизонтальной призмы – буквами l, m, n (см. рис. 9.2). Эти обозначения носят вспомогательный характер. Они помогают не только при “чтении” чертежа, но и при построении характерных (опорных) точек искомой линии пересечения.

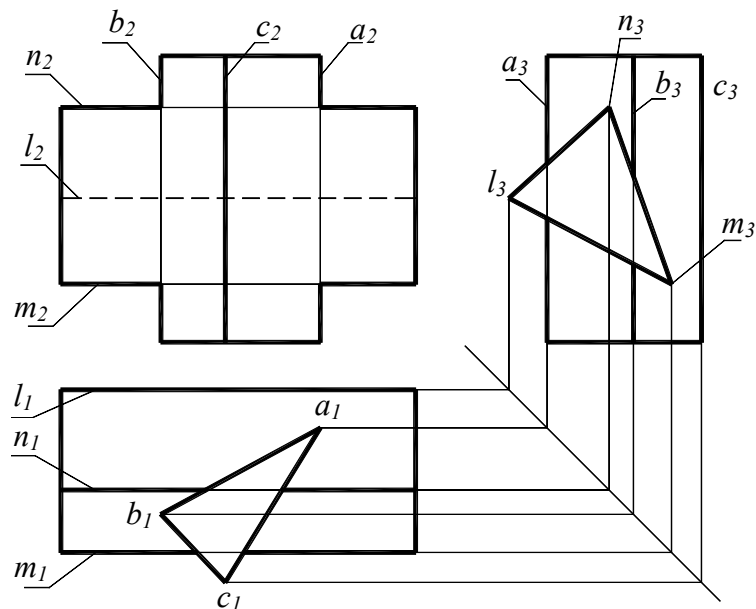


Рис. 9.2

Из чертежа следует, что ребро c вертикальной призмы не участвует в пересечении. Ребро l горизонтальной призмы также не участвует в пересечении. В данном примере реализуется случай “врезки”, при котором искомая линия пересечения многогранников представляет собой одну замкнутую пространственную ломаную линию [1, п. 8.1]. Для ее построения необходимо найти точки пересечения ребер a и b вертикальной призмы с гранями горизонтальной призмы, а также точки пересечения ребер m и n горизонтальной призмы с гранями вертикальной призмы.

На профильной проекции отметим точки 1, 2, 3, 4 пересечения ребер a, b вертикальной призмы с гранями горизонтальной призмы. С помощью линий связи найдем фронтальные и горизонтальные проекции этих точек (рис. 9.3).

На горизонтальной проекции отметим точки 5, 6, 7, 8 ребер m, n горизонтальной призмы с гранями вертикальной призмы. С помощью линий связи найдем фронтальные

и профильные проекции этих точек (см. рис. 9.3). Найденные опорные точки $1, 2, \dots, 8$ определяют вершины искомой ломаной линии пересечения данных призматических поверхностей.

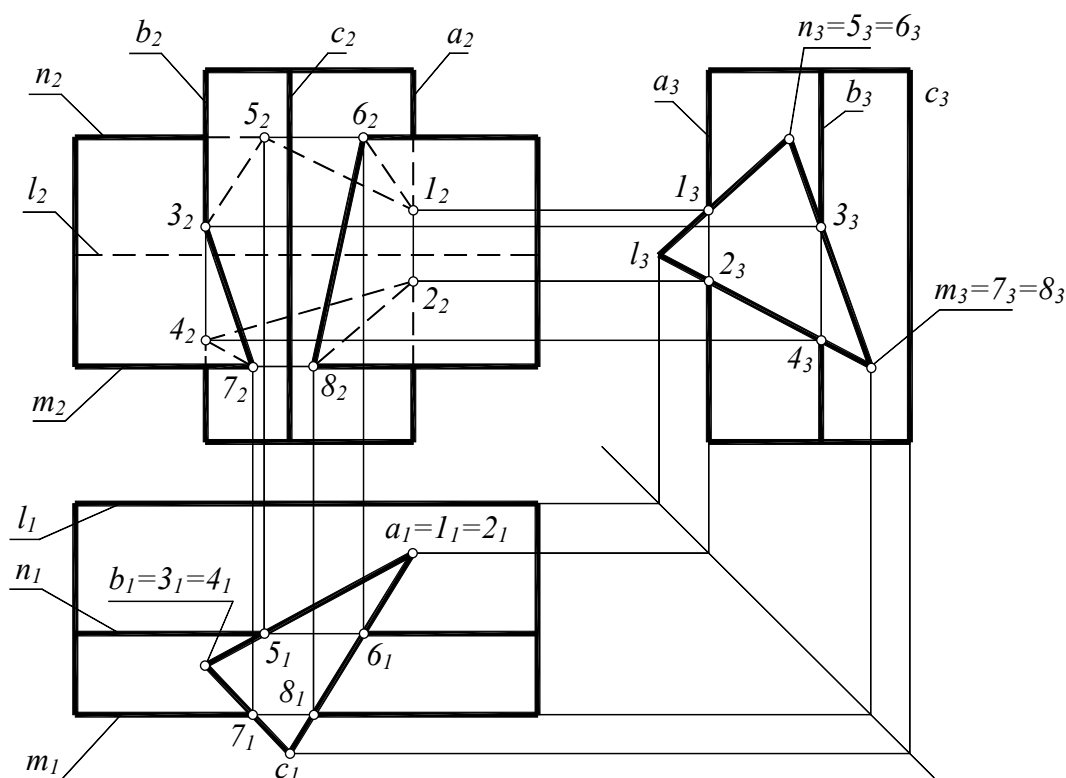


Рис. 9.3

Согласно приведенному выше правилу, для вычерчивания всей линии пересечения соединяем отрезками прямых только те опорные точки, которые лежат в одной и той же грани вертикальной призмы и одновременно в одной и той же грани горизонтальной призмы. Например, точку 1 можно соединить с точкой 5 , так как эти точки лежат в одной и той же грани $l||n$ горизонтальной призмы и одновременно в одной и той же грани $a||b$ вертикальной призмы.

Продолжая соединять (отрезками прямых) точки, удовлетворяющие вышеприведенному правилу, получаем замкнутую ломаную линию $1-5-3-7-4-2-8-6-1$ пересечения данных призматических поверхностей (см. рис. 9.3). Горизонтальная проекция этой линии совпадает с проекцией вертикальной призмы, профильная проекция совпадает с проекцией горизонтальной призмы.

Видимость участков линии пересечения определяется с учетом видимости граней данных призм. Например, на фронтальной плоскости проекций точка 1 не видна (закрыта от зрителя гранью $m||n$ горизонтальной призмы). Следовательно, фронтальные проекции участков $1-5$ и $1-6$ невидимы (показаны на чертеже штриховой линией).

Примечание. Призматические поверхности, участвующие в пересечении, занимают проецирующее положение. Это обстоятельство позволяет отметить на чертеже опорные точки искомой линии пересечения без всяких дополнительных построений, что заметно упрощает решение задачи.

Задача 9.3

Построить линию пересечения поверхностей двух прямых призм – трехгранной и четырехгранной (рис. 9.4).

Решение. Ребра четырехгранной вертикальной призмы обозначим строчными латинскими буквами a, b, c, d . Ребра горизонтальной призмы – буквами l, m, n (см. рис. 9.4). Эти обозначения помогают при построении опорных точек линии пересечения заданных многогранников.

Из чертежа следует, что ребро c вертикальной призмы не участвует в пересечении. Ребро l горизонтальной призмы также не участвует в пересечении. Следовательно, в данном примере реализуется случай “врезки”, при котором искомая линия пересечения многогранников представляет собой одну замкнутую пространственную ломаную линию [1, п. 8.1]. Для ее построения необходимо найти точки пересечения ребер a, b, d вертикальной призмы с гранями горизонтальной призмы, а также точки пересечения ребер m и n горизонтальной призмы с гранями вертикальной призмы.

Трехгранная призма занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому точки 1, 2, 3, 4, 5, 6 пересечения ребер a, b, d вертикальной призмы с поверхностью трехгранной призмы отмечаются на плоскости Π_2 без каких-либо дополнительных построений (рис. 9.5). Четырехгранная призма занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому точки 7, 8, 9, 10 ребер m, n трехгранной призмы с поверхностью четырехгранной призмы отмечаются на плоскости Π_1 без дополнительных построений. Профильные проекции найденных опорных точек $1 \dots 10$ определяются с помощью условий связи.

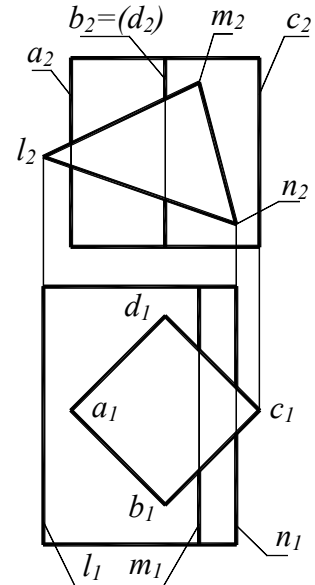


Рис. 9.4

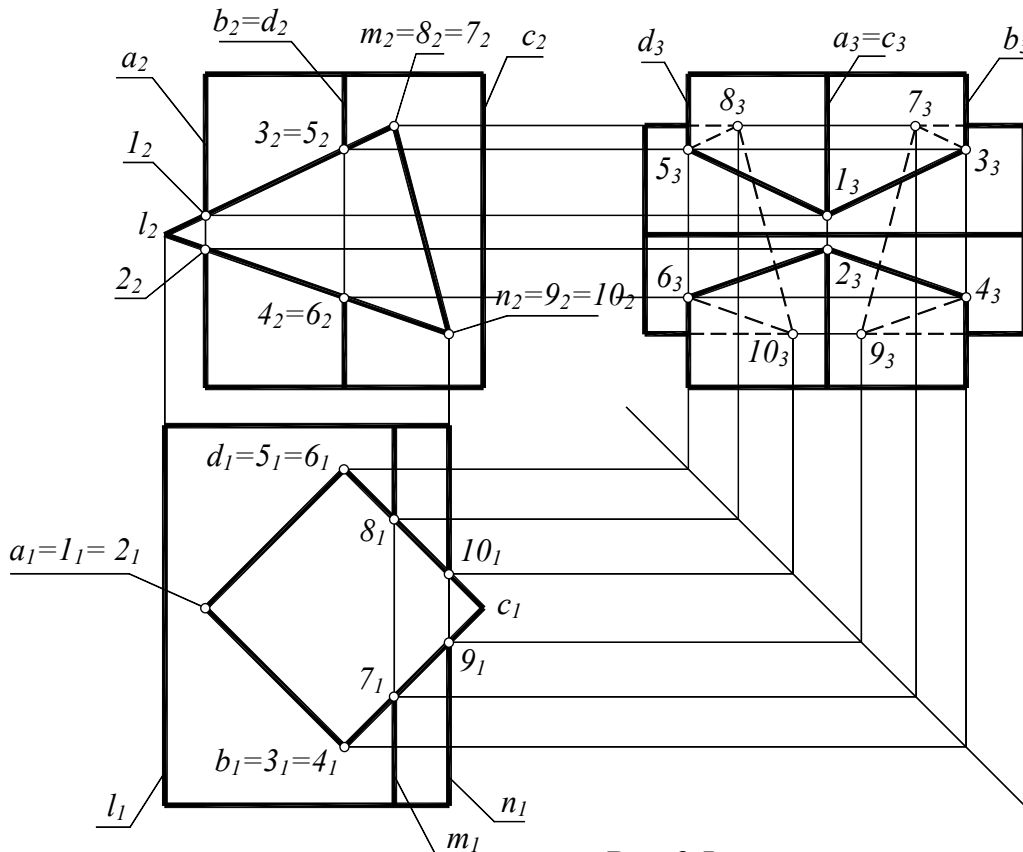


Рис. 9.5

Для решения задачи надо соединить отрезками прямых найденные опорные точки. Точку 1 соединяем с точкой 3, точку 3 – с точкой 7, точку 7 – с точкой 9, и так далее, всякий раз соединяя те пары точек, которые, согласно вышеприведенному правилу, лежат на одной и той же грани первого многогранника и одновременно на одной и той же грани второго многогранника. В результате получаем замкнутую ломаную линию 1-3-7-9-4-2-6-10-8-5-1, видимость звеньев которой на профильной плоскости проекций определяется с учетом видимости граней пересекающихся призм. Например, на профильной плоскости проекций мы “не видим” грань $m||n$ треугольной призмы, поэтому звенья 7-9, 10-8, находящиеся на этой грани, невидимы на Π_3 (см. рис. 9.5).

Задача 9.4

Построить линию пересечения призматических поверхностей (рис. 9.6).

Решение. Ребра четырехгранной вертикальной призмы обозначим строчными латинскими буквами q, l, m, n . Ребра наклонной трехгранной призмы обозначим буквами a, b, c . Заметим, что все ребра наклонной призмы участвуют в пересечении с поверхностью вертикальной призмы. Следовательно, в данной задаче реализуется случай *пронизания*: наклонная призма “прокалывает” вертикальную четырехугольную призму. При этом линия пересечения поверхностей распадается на две замкнутые пространственные ломанные линии [1, п. 8.1].

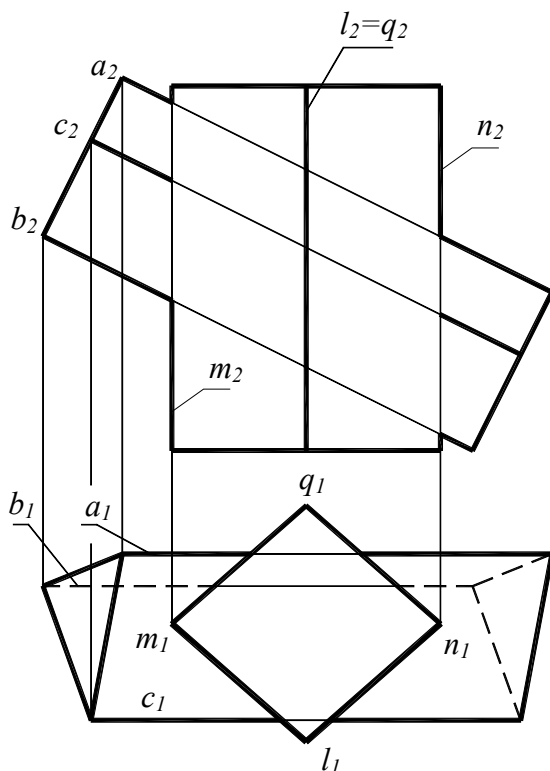


Рис. 9.6

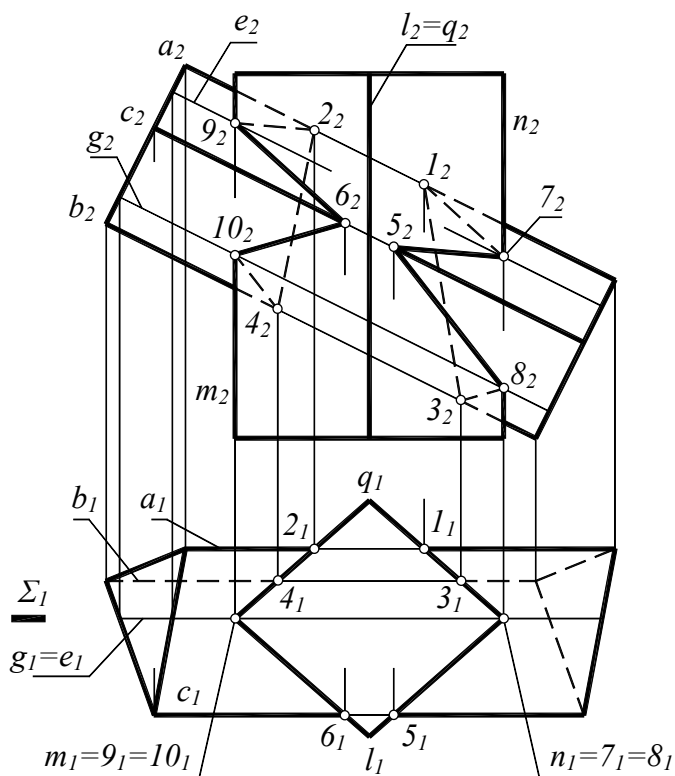


Рис. 9.7

Для решения задачи надо найти точки пересечения ребер a, b, c наклонной призмы с гранями вертикальной призмы, а также точки пересечения ребер m и n вертикальной призмы с гранями наклонной призмы. Затем найденные точки следует соединить, руководствуясь вышеизложенным правилом.

Четырехгранная призма занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому точки 1, 2, 3, 4, 5, 6 пересечения ребер a, b, c наклонной треугольной призмы с поверхностью вертикальной призмы отмечаются на плоскости Π_1 без каких-либо дополнительных построений (рис. 9.7).

Для построения точек 7, 8, 9, 10 пересечения ребер m , n вертикальной призмы с гранями наклонной призмы требуется провести через эти ребра вспомогательную секущую плоскость Σ (в соответствии со схемой решения первой позиционной задачи). Плоскость Σ пересекла грани $a||c$ и $b||c$ наклонной призмы по прямым e и g соответственно. На пересечении вертикальных ребер m , n с линиями разреза e , g отмечаем искомые точки 7, 8, 9, 10. Найденные точки 1...10 соединяем отрезками прямых. Точку 1 соединяем с точкой 3, точку 3 – с точкой 8, точку 8 – с точкой 5, точку 5 – с точкой 7, точку 7 – с точкой 1. Напомним, что отрезками прямых соединяют только те пары точек, которые, согласно вышеприведенному правилу, лежат на одной и той же грани первого многогранника и одновременно на одной и той же грани второго многогранника. В результате получена замкнутая ломаная линия 1-3-8-5-7-1. Аналогично вычерчивается другая замкнутая линия 2-4-10-6-9-2 (см. рис. 9.7).

Видимость звеньев линии пересечения определяется с учетом видимости граней данных призматических поверхностей. Например, на фронтальной плоскости проекций грань $m||q$ вертикальной призмы невидима, поэтому звенья 2-4, 4-10, 9-2, лежащие на этой грани, также невидимы (показаны на чертеже штриховыми линиями).

Задача 9.5

Построить линию пересечения поверхностей трехгранной призмы и усеченной пирамиды (рис. 9.8).

Решение. Ребра пирамиды обозначим строчными латинскими буквами a , b , c , d . Ребра горизонтальной трехгранной призмы – буквами l , m , n (см. рис. 9.8). Все боковые ребра пирамиды a , b , c , d участвуют в пересечении с поверхностью призмы. Поэтому

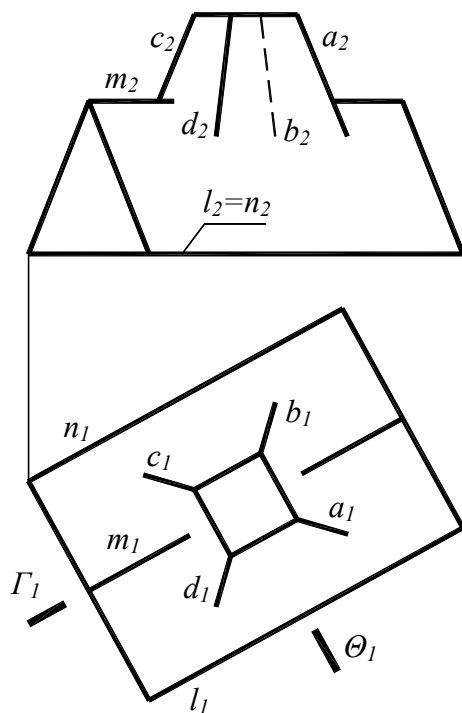


Рис. 9.8

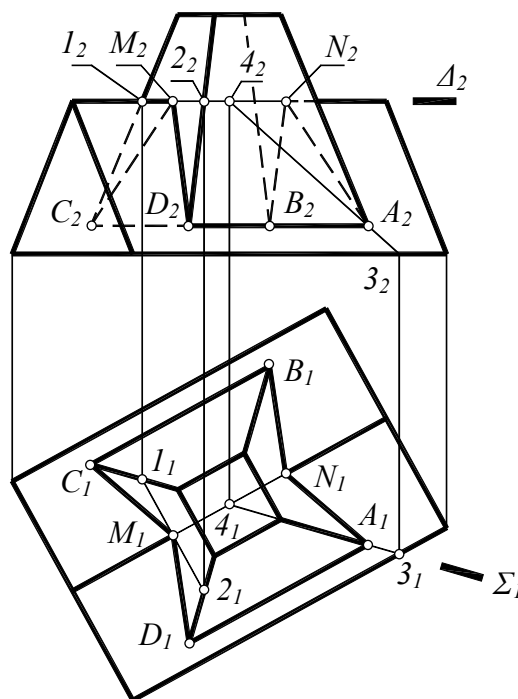


Рис. 9.9

для построения линии пересечения надо найти точки пересечения ребер a , b , c , d пирамиды с гранями призмы, а также точки пересечения ребра m призмы с гранями пирамиды.

В отличие от ранее рассмотренных задач, ни одна из данных поверхностей не является проецирующей, поэтому для построения точек пересечения ребер с гранями следует использовать алгоритм решения первой позиционной задачи.

Построение точки A пересечения ребра a пирамиды с гранью $m||l$ призмы (рис. 9.9). Проводим через a секущую плоскость Σ , вычерчиваем линию разреза $(3-4)=\Sigma\cap(m||l)$, отмечаем точку $A=a\cap(3-4)$.

Построение точек B, C, D пересечения ребер b, c, d пирамиды с гранями призмы. Заметим, что данные поверхности имеют две общие плоскости симметрии Γ и Θ . Следовательно, точка $B=b\cap(m||n)$ расположена симметрично точке A относительно общей плоскости симметрии Γ , а точки D и C симметричны точкам A и B относительно общей плоскости симметрии Θ (см. рис. 9.9).

Построение точек M, N пересечения ребра t призмы с гранями пирамиды. Проводим через t вспомогательную секущую плоскость Δ и вычерчиваем линию $(1-2)$ разреза грани $c\cap d$ пирамиды этой плоскостью: $(1-2)=\Delta\cap(c\cap d)$. Отмечаем точку M пересечения ребра t с линией разреза 1-2: $M=t\cap(1-2)$. Точка N симметрична точке M относительно общей плоскости симметрии Θ .

Найденные точки A, B, C, D, M, N соединяем ломаной линией с учетом приведенного выше правила: соединяют отрезками прямых линий только те точки, которые *лежат в одной и той же грани первого многогранника и одновременно в одной и той же грани второго многогранника*. Получаем замкнутую ломаную линию A-N-B-C-M-D-A, видимость которой на фронтальной плоскости проекций определяется с учетом видимости граней призмы и пирамиды (см. рис. 9.9).

9.2. Пересечение гранных и кривых поверхностей

Линия пересечения многогранной и кривой поверхностей в общем случае представляет собой совокупность плоских кривых линий, которые получаются в пересечении граней многогранника и кривой поверхности. Поэтому построение линии пересечения произвольной поверхности с многогранником сводится к построению линии пересечения данной поверхности с каждой гранью многогранника [1, п. 8.2].

Простейшие кривые поверхности – тор, сфера, коническая и цилиндрическая поверхности вращения. Заметим, что сфера – частный случай тора (*почему?*), а цилиндрическая поверхность – частный случай конической поверхности (*почему?*).

Простейшие многогранники – прямая призма и прямая пирамида. При построении линии пересечения кривой поверхности с гранями многогранника получаются закономерные гладкие кривые линии (не имеющие изломов). Напомним основные типы этих линий.

При пересечении плоскости со сферой всегда получается окружность, которая изображается на чертеже эллипсом (или окружностью, если секущая плоскость занимает положение плоскости уровня).

При пересечении плоскости общего положения с конической поверхностью могут получаться кривые второго порядка: эллипс, парабола, гипербола [1, п. 7.3]. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса вращения, то в сечении получается окружность. Если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности, то в сечении получаем две прямые.

При пересечении цилиндрической поверхности вращения плоскостью общего положения получается эллипс. Если плоскость перпендикулярна оси вращения – получается окружность. Если секущая плоскость параллельна оси цилиндра, в сечении получаются две параллельные прямые.

В сечении тора плоскостью общего положения получается алгебраическая кривая четвертого порядка. В частных случаях, когда секущая плоскость проходит через ось тора или перпендикулярна ей, в сечении тора возникают две окружности [1, п. 6.2.5].

Задача 9.6

Построить линию пересечения конической поверхности вращения и поверхности призмы (рис. 9.10).

Решение. Горизонтальные ребра призмы обозначим буквами a, b, m, n . Наклонная грань $a||b$ призмы пересекает коническую поверхность по эллипсу. Вертикальная грань призмы, образованная ребрами $a||n$, проходящая через вершину S конуса, пересекает его по двум прямым. Вертикальная грань $b||m$ призмы пересекается с конусом по гиперболе.

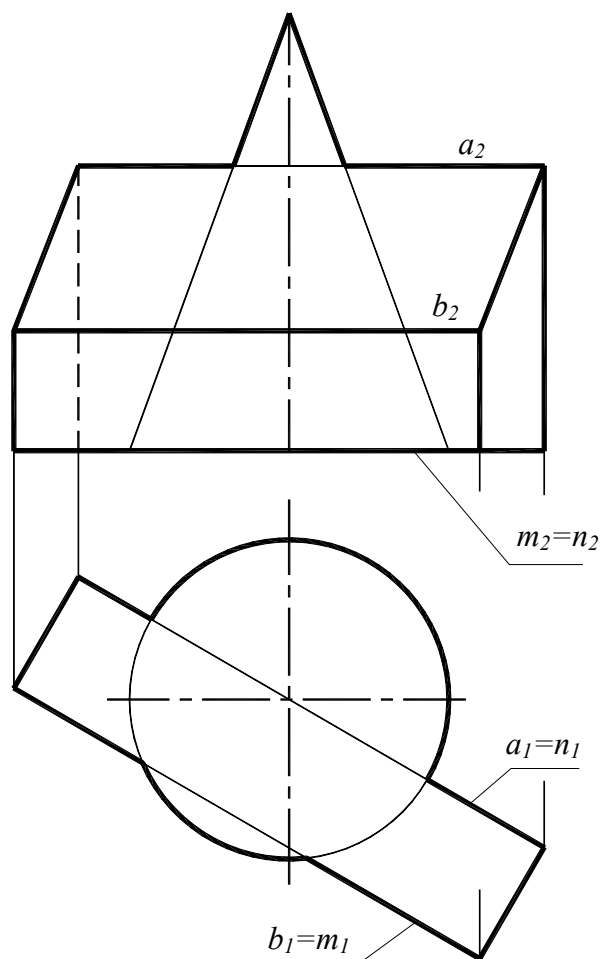


Рис. 9.10

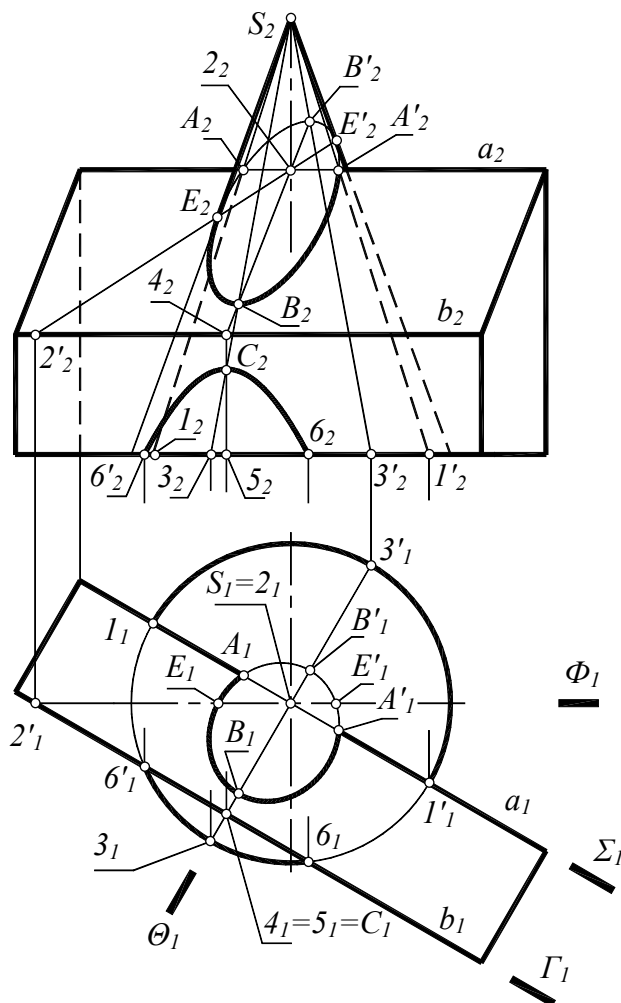


Рис. 9.11

Построение эллипса. Через ребро a проводим вспомогательную секущую плоскость Σ , которая пересекает конус по двум прямым $I-S$ и $I'-S$ (рис. 9.11). На пересечении этих прямых с ребром a отмечаем точки A и A' . В этих точках ребро a пересекается с поверхностью конуса (*почему?*).

Проводим секущую плоскость Φ , которая пересекает наклонную грань $a||b$ призмы по прямой $2-2'$, а конус – по фронтальным очерковым образующим. На пересечении прямой $2-2'$ с фронтальным очерком конуса отмечаем точки E и E' . В этих точках меняется видимость фронтальной проекции линии пересечения конуса с гранью $a||b$. Заметим, что точка E' – “мнимая” точка искомого сечения, так как находится за пределами грани $a||b$. Но построение этой точки позволяет точнее начертить эллиптическое сечение конуса гранью $a||b$.

Через ось конуса проводим плоскость Θ , перпендикулярную к ребрам a и b призмы (плоскость Θ – общая плоскость симметрии конуса и грани $a||b$). В сечении конуса этой

плоскостью получаем прямые $3-S$ и $3'-S$, в сечении призмы – ломаную линию 2-4-5. На пересечении полученных линий отмечаем точки B и B' – низшую и высшую точки эллиптического сечения конуса гранью $a||b$ (точка B' – “мнимая”).

Таким образом, построен ряд точек A, A', B, B', E, E' , через которые проходит искомое эллиптическое сечение конуса наклонной гранью $a||b$ призмы. Дополнительные точки этого сечения определяются с помощью вспомогательных секущих плоскостей, перпендикулярных к оси конуса. На чертеже рис. 9.10 построение дополнительных точек условно не показано.

Построение гиперболы. В сечении конуса вертикальной плоскостью Γ , совпадающей с гранью $b||t$ призмы, получаем гиперболу (*почему?*). Плоскость Γ пересекает круговое основание конуса в точках b, b' . Вершина C гиперболы лежит в общей плоскости симметрии Θ . Напомним, что плоскость Θ пересекает вертикальную грань $b||t$ призмы по прямой 4-5, а поверхность конуса – по прямолинейной образующей $3-S$. Отмечаем точку C на пересечении этих прямых: $C=(4-5)\cap(3-S)$. Гипербола проходит через точки b, b', C . Любое количество дополнительных точек гиперболы может быть найдено с помощью вспомогательных секущих плоскостей, перпендикулярных к оси конуса. На чертеже рис. 9.10 построение дополнительных точек условно не показано.

Задача 9.7

Построить линию пересечения конической поверхности вращения и поверхности правильной шестигранной призмы (рис. 9.12).

Решение. Для решения задачи требуется построить линии пересечения всех граней призмы с поверхностью конуса.

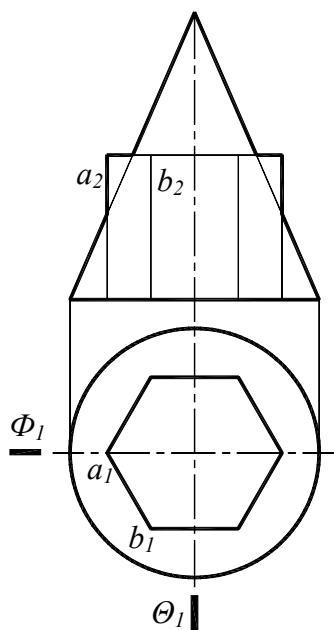


Рис. 9.12

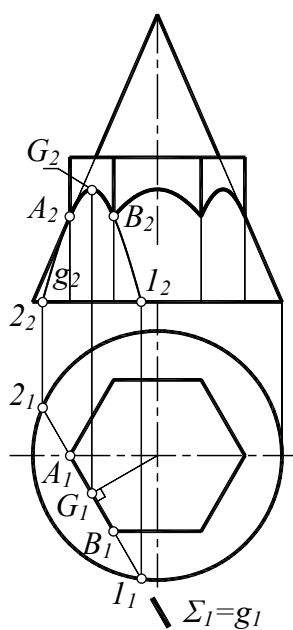


Рис. 9.13

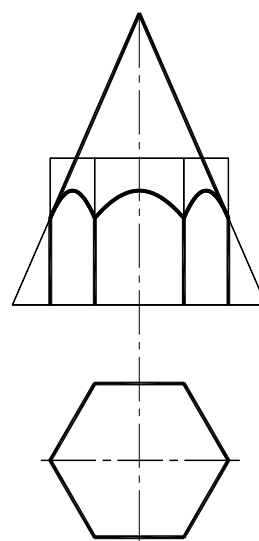


Рис. 9.14

Задача упрощается тем, что в основании призмы лежит правильный шестиугольник, центр которого совпадает с центром кругового основания конуса. Вертикальные грани призмы параллельны оси конуса и удалены от нее на одинаковое расстояние. Следовательно, все шесть вертикальных граней призмы пересекают поверхность конуса по совершенно одинаковым кривым линиям (участкам гиперболы). Поэтому для решения задачи достаточно построить линию пересечения одной какой-нибудь грани призмы с поверхностью конуса. Во всех шести вертикальных гранях призмы получим точно такую же линию.

Рассмотрим построение линии пересечения конической поверхности с какой-нибудь гранью призмы, например, с гранью $a \parallel b$ (рис. 9.13). Проведем через эту грань секущую плоскость Σ и построим линию g пересечения плоскости Σ с заданной конической поверхностью. Линия g – гипербола [1, п. 7.3]. В точках 1 и 2 плоскость Σ пересекает круговое основание конуса. В точках A и B ребра a, b призмы пересекают заданную коническую поверхность. Точки A и B находятся на одной высоте (*почему?*). Точка G – вершина гиперболы (*как построена точка G ?*). Получаем пять точек 1, 2, A, B, G , через которые проходит искомая гипербола g (см. рис. 9.13).

Примечание 1. В точке A фронтальная проекция g_2 гиперболы g касается фронтальной очерковой линии конуса. В этой точке меняется видимость линии g_2 (*почему?*).

Примечание 2. Линия пересечения данных поверхностей может быть получена экспериментально, если с помощью точилки с коническим отверстием аккуратно заточить обыкновенный граненый карандаш (рис. 9.14).

Рассмотрим решение задачи на трехпроекционном чертеже (рис. 9.15). Точка A пересечения ребра a призмы с поверхностью конуса найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Φ . Все ребра призмы пересекаются с поверхностью конуса в точках, лежащих на одной высоте с точкой A .

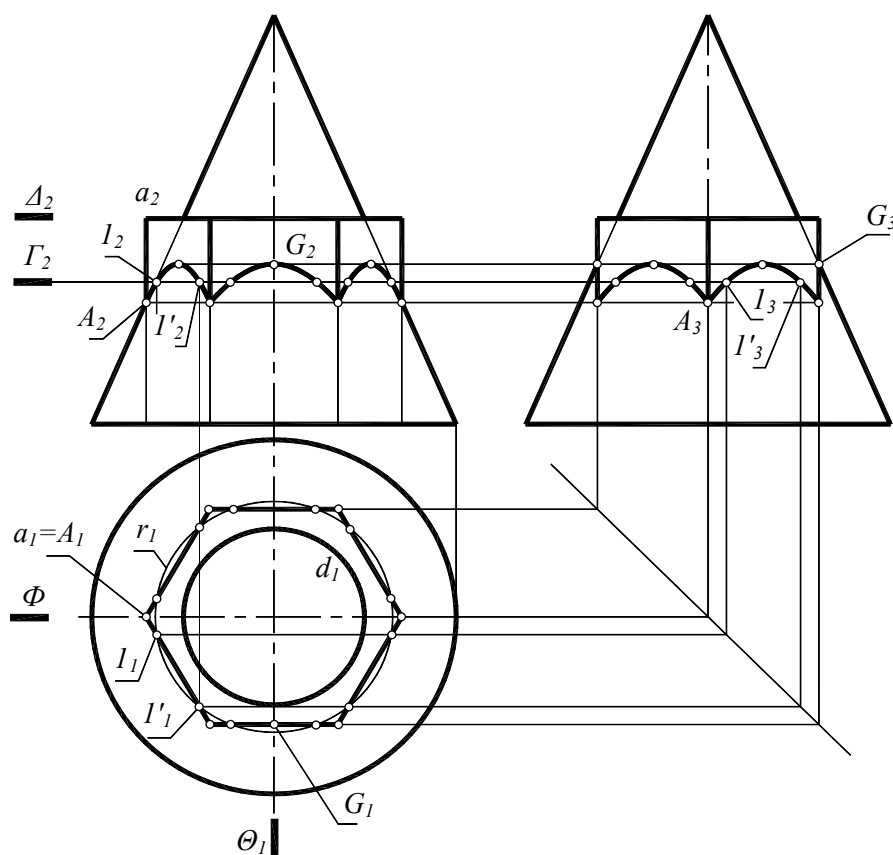


Рис. 9.15

Вершина G гиперболы лежит в общей плоскости симметрии Θ . Профильную проекцию G_3 точки G отмечаем на пересечении профильных очерковых линий конуса и призмы. Вертикальные грани призмы пересекаются с поверхностью конуса по одинаковым гиперболам с вершинами в точках, лежащих на одной высоте с точкой G .

Для построения дополнительных точек искомой линии пересечения проведем горизонтальную плоскость Γ . Эта плоскость “разрезает” конус по окружности r , а призму – по шестиугольнику. На чертеже рис. 9.15 отмечены точки I, I' пересечения “линий разреза”, лежащие на одной из граней призмы. Эти точки принадлежат искомой линии пе-

ресечения поверхностей конуса и призмы (*почему?*). Найденные точки l, l' следует перенести на все грани призмы.

Таким образом, в каждой вертикальной грани призмы определены пять точек: две точки A на ребрах, вершина G и две дополнительные точки l, l' . Через эти пять точек проходит линия пересечения конической поверхности с гранью призмы (участок гиперболы). Верхняя (горизонтальная) грань призмы пересекает заданную коническую поверхность по окружности d (см. рис. 9.15).

Задача 9.8

Построить линию пересечения сферы и призмы abc (рис. 9.16).

Решение. Грани призмы пересекают сферу по окружностям [1, п. 7.2]. Горизонтальная грань ac (плоскость Ω на чертеже рис. 9.17) пересекает сферу по окружности δ .

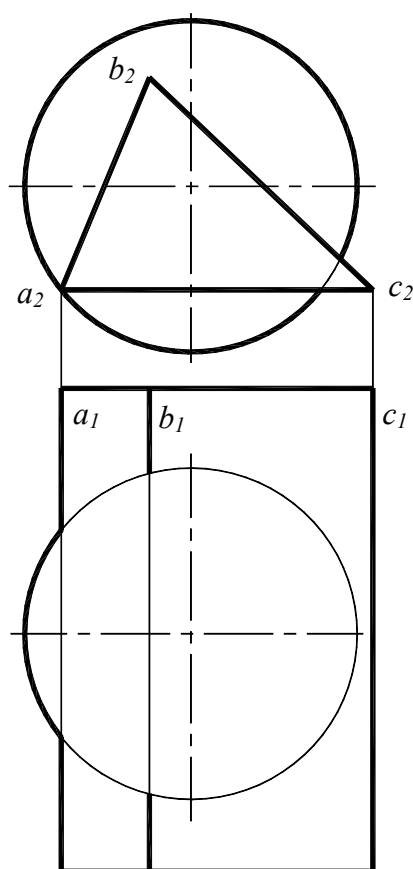


Рис. 9.16

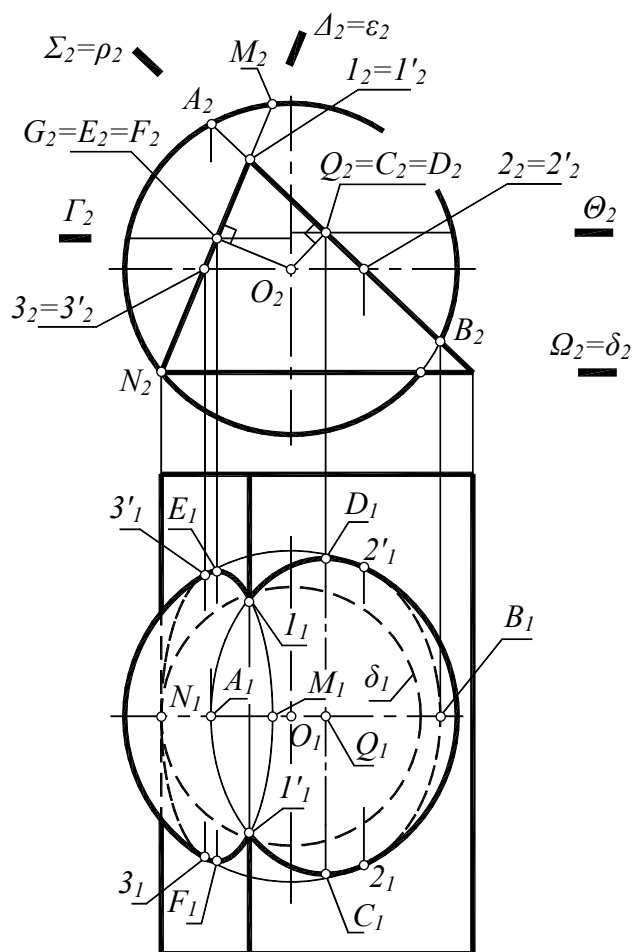


Рис. 9.17

Плоскость Σ , проходящая через грань bc , пересекает сферу по окружности ρ с центром Q . Точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из центра O сферы на секущую плоскость Σ (*почему?*). Окружность ρ проецируется на плоскость Π_1 эллипсом с центром Q_1 и главными осями A_1B_1 и C_1D_1 , где AB и CD – взаимно перпендикулярные диаметры кругового сечения ρ . Диаметр AB располагается параллельно Π_2 (то есть AB – фронталь). Диаметр CD – фронтально-проецирующая прямая.

Ребро b пересекает сферу в точках l и l' , для построения которых следует использовать алгоритм решения первой позиционной задачи [1, п. 7.4]. Это построение на рис. 9.17 условно не показано.

В точках 2 и 2' меняется видимость горизонтальной проекции ρ_1 наклонного сечения ρ (*почему?*). Эти точки лежат на горизонтальном очерке сферы.

Таким образом, горизонтальная проекция сечения ρ – эллипс с центром Q_1 и главными осями A_1B_1 и C_1D_1 . Эллипс проходит через точки 1, 1', 2, 2'. Любое количество дополнительных точек этого эллипса может быть построено с помощью горизонтальных секущих плоскостей (*как?*).

Аналогично вычерчивается горизонтальная проекция окружности ε , полученной в сечении сферы плоскостью Δ , проходящей через грань ab . Опуская перпендикуляр из центра сферы на секущую плоскость Δ , находим центр G окружности ε (горизонтальная проекция G_1 точки G на рис. 9.17 условно не показана). Окружность ε проецируется на Π_1 эллипсом с главными осями M_1N_1 и E_1F_1 . Эллипс проходит через точки 1, 1' и через точки смены видимости 3, 3', лежащие на горизонтальном очерке сферы.

Задача 9.9

Построить линию пересечения полусферы и трехгранной призмы (рис. 9.18).

Решение. Данная задача отличается от предыдущей тем, что призма, участвующая в пересечении, не занимает проецирующего положения (боковые наклонные грани призмы $a||b$ и $a||c$ не перпендикулярны ни одной из плоскостей проекций). Иначе говоря, боковые грани призмы, пересекающие полусферу – плоскости общего положения. Следовательно, для решения задачи требуется построить линии пересечения плоскостей общего положения $a||b$ и $a||c$ с полусферой.

Задача упрощается тем обстоятельством, что заданные пересекающиеся поверхности имеют две плоскости симметрии Φ и Ω (см. рис. 9.18). Поэтому для полного решения задачи достаточно найти линию пересечения полусферы с одной из наклонных граней призмы, например, с гранью $a||b$, а затем “зеркально отразить” полученную линию относительно общей плоскости симметрии Ω .

Построение линии пересечения полусферы с гранью $a||b$.

Наклонная плоскость общего положения $a||b$ пересекает полусферу по дуге окружности, горизонтальная и фронтальная проекции которой – дуги эллипсов. Найдем характерные (опорные) точки искомой линии. К опорным точкам в рассматриваемой задаче следует отнести точки пересечения ребер призмы с поверхностью полусферы, а также экстремальные (высшую и низшую) точки U, V линии пересечения плоскости $a||b$ с полусферой, мысленно достроенной до полной сферы. Эти экстремальные точки будут “мнимыми”, поскольку находятся за пределами, как полусферы, так и грани $a||b$. “Мнимые” точки U, V нужны для повышения точности построений.

Ребро a пересекается с полусферой в точках A и A' . Для построения этих точек проведена вспомогательная секущая плоскость Σ и начерчена линия s пересечения этой плоскости с полусферой (линия s – окружность). Точки A, A' отмечены на пересечении окружности s и прямой a (рис. 9.19).

Ребро b пересекается с полусферой в точках B и B' , лежащих на круговом основании полусферы.

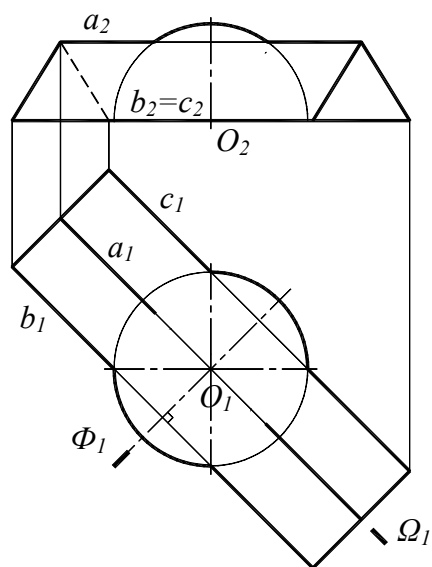


Рис. 9.18

Для построения экстремальных (верхней и нижней) точек U, V можно использовать дополнительную проекцию заданных поверхностей на плоскость Π_4 , совпадающую с вертикальной боковой гранью призмы. Боковые грани призмы перпендикулярны к плоскости Π_4 , поэтому вся призма проецируется на Π_4 треугольником. Плоскость Δ , совпадающая с гранью $a||b$, пересекает сферу по окружности. Отметив на дополнительной плоскости проекций Π_4 верхнюю и нижнюю точки U, V этой окружности, переносим их в исходную систему координат Π_1/Π_2 (см. рис. 9.19).

После построения опорных точек искомой линии пересечения грани $a||b$ с полусферой, надо построить несколько промежуточных точек этой линии. Любое количество промежуточных точек может быть найдено с помощью горизонтальных секущих плоскостей. Например, плоскость Γ пересекает грань $a||b$ по прямой d , проходящей через точку 2, а сферу – по окружности g . Прямая d параллельна горизонтальным ребрам призмы. На пересечении линий d и g отмечаем точки I и I' , принадлежащие искомой линии пересечения полусферы и плоскости $a||b$.

Построение линии пересечения полусферы с гранью $a||c$.

Грань $a||c$ расположена симметрично грани $a||b$ относительно плоскости симметрии Ω . Поэтому линия пересечения полусферы с гранью $a||c$ может быть построена как “зеркальное отражение” линии пересечения полусферы с гранью $a||b$ (относительно плоскости симметрии Ω).

Видимость фронтальной проекции линии пересечения определяется с учетом видимости граней призмы и с учетом местонахождения точек этой линии относительно плоскости смены видимости Θ . Грань $a||c$ призмы и находящиеся на ней линии невидимы на фронтальной плоскости проекций. На плоскости Π_1 линия пересечения боковых граней призмы со сферой полностью видна.

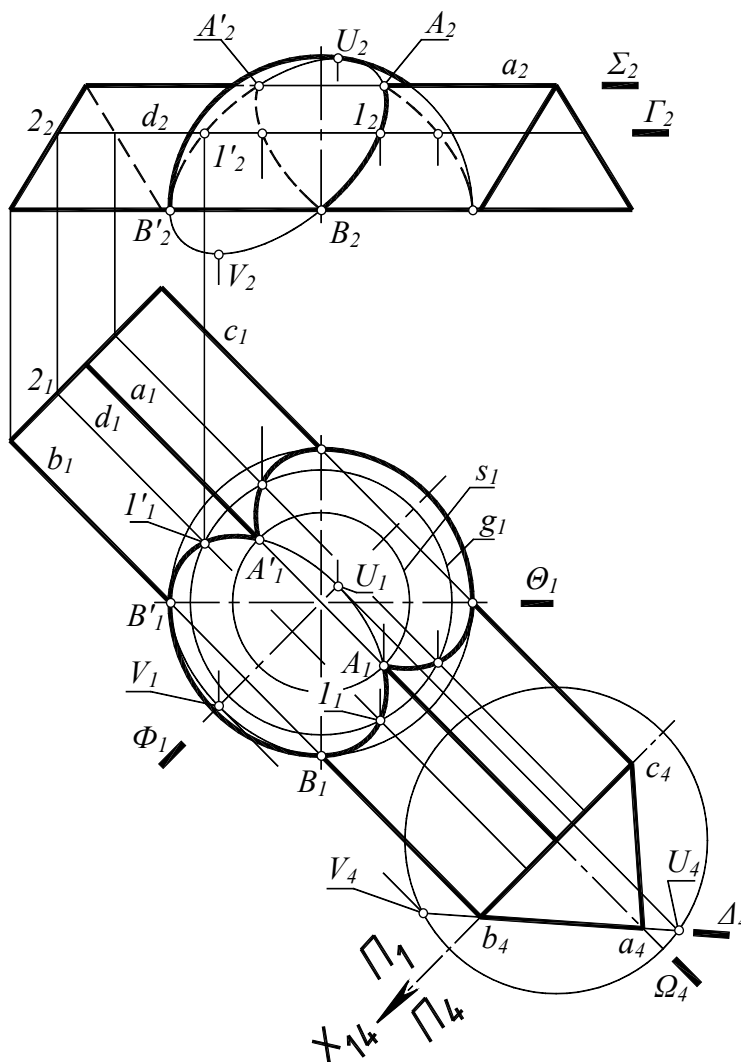


Рис. 9.19

Задача 9.10

Построить линию пересечения цилиндрической поверхности и пирамиды с треугольным основанием MRT и вершиной S (рис. 9.20).

Решение. Для решения задачи следует построить линии пересечения цилиндрической поверхности боковыми гранями пирамиды. Все три грани пирамиды пересекают цилиндр по дугам эллипсов (*почему?*). Задача упрощается тем, что заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , поэтому боковые грани MRS и TRS пересе-

каются с поверхностью цилиндра по одинаковым кривым, расположенным симметрично относительно плоскости Φ . Кроме того, цилиндрическая поверхность занимает фронтально-проецирующее положение (все образующие цилиндра перпендикулярны плоскости Π_2), что также упрощает решение задачи.

Построение линии пересечения цилиндрической поверхности гранью MTS . Плоскость MTS пересекает цилиндр по эллипсу, фронтальная проекция которого совпадает с фронтальной проекцией цилиндра. Отметим низшую точку A этой линии и найдем ее горизонтальную проекцию с помощью вспомогательной плоскости Θ (рис. 9.21). Плоскость Θ пересекает пирамиду по треугольнику с вершиной I , стороны которого параллельны сторонам треугольного основания пирамиды (*почему?*). Точка A лежит на этом треугольнике.

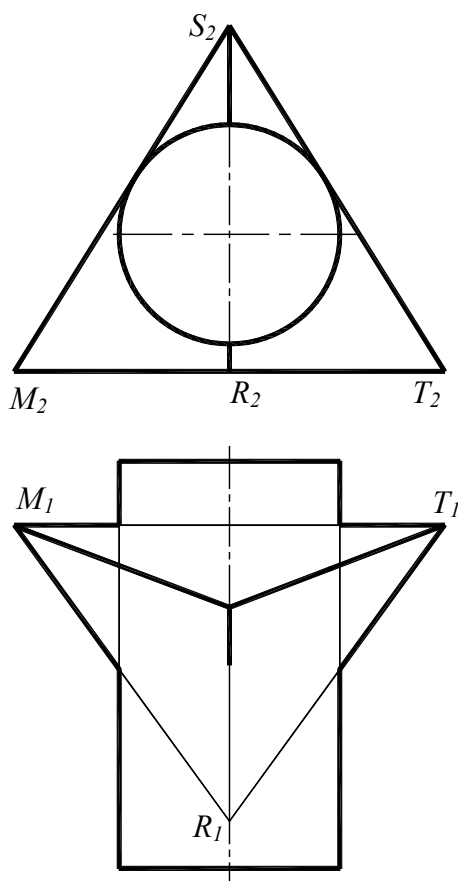


Рис. 9.20

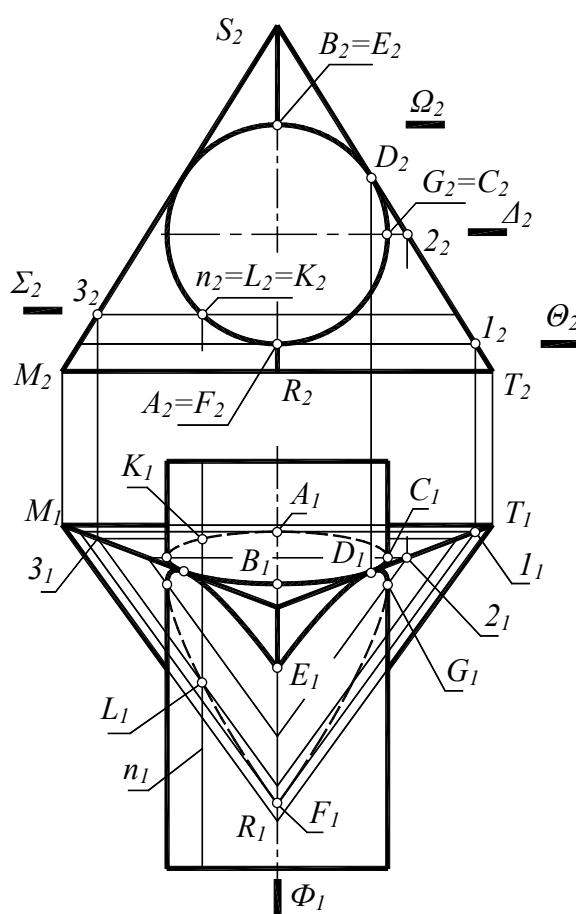


Рис. 9.21

Аналогично определяется горизонтальная проекция высшей точки A (с помощью вспомогательной плоскости Ω , проведенной через A). Соответствующие построения на рис. 9.21 условно не показаны.

С помощью плоскости смены видимости Δ найдены точки смены видимости C, C' горизонтальной проекции искомой линии (эллипса). С помощью плоскости Σ построены две дополнительные точки K, K' этого эллипса. Точки C', K' , симметричные точкам C, K , на рис. 9.21 условно не отмечены. Через найденные точки проходит линия пересечения грани MTS с поверхностью цилиндра. Это эллипс с главными осями AB и CC' .

Построение линии пересечения цилиндрической поверхности гранями RTS и MRS . В пересечении получаем дуги эллипсов. Верхняя и нижняя точки E, F этих дуг найдены с помощью вспомогательных плоскостей Ω, Θ . Точки смены видимости G, G' найдены с помощью плоскости Δ (точка G' , симметричная точке G относительно плоскости Φ , на

рис. 9.21 условно не отмечена). Дополнительные точки L, L' найдены с помощью плоскости Σ , пересекающей цилиндр по образующим n, n' , а пирамиду – по треугольнику с вершиной $З$. На пересечении сторон этого треугольника с прямыми n, n' находятся точки L, L' . Прямая n' и точка L' , симметричные прямой n и точке L относительно плоскости Φ , на рис. 9.21 условно не отмечены. Через найденные точки проводим две дуги эллипсов, симметрично расположенные относительно общей плоскости симметрии Φ .

Задача 9.11

Построить линию пересечения цилиндрической поверхности и наклонной призмы (рис. 9.22).

Решение. Ребра призмы обозначим буквами a, b, c и отметим точки A, B, C пересечения этих ребер с поверхностью цилиндра (рис. 9.23). Ребра b и c касаются поверхности цилиндра.

Через вертикальную образующую m цилиндра проведем вспомогательную секущую плоскость Θ , которая рассекает призму по двум прямым, проходящим через точки $1, 2$ параллельно ребрам призмы. На пересечении этих прямых с образующей m отмечаем точки U, V , принадлежащие линиям пересечения цилиндра с гранями $a||c$ и $b||c$ призмы. Через точки A, C, U проходит линия пересечения грани $a||c$ с поверхностью цилиндра. Через точки A, C, V проходит линия пересечения грани $b||c$ с поверхностью цилиндра. Обе эти линии – участки эллипсов. На фронтальной проекции они невидимы (закрываются гранью $a||b$).

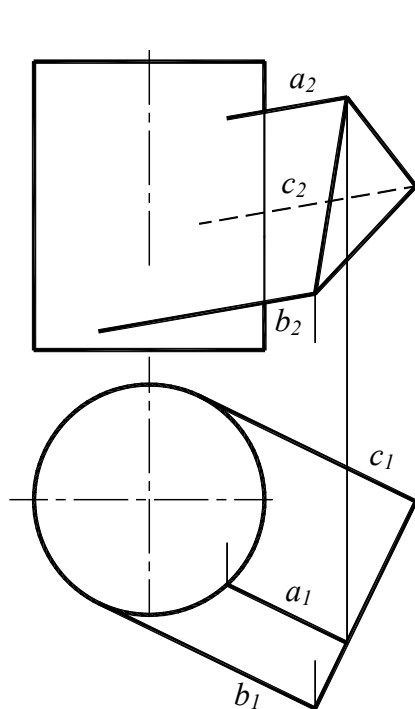


Рис. 9.22

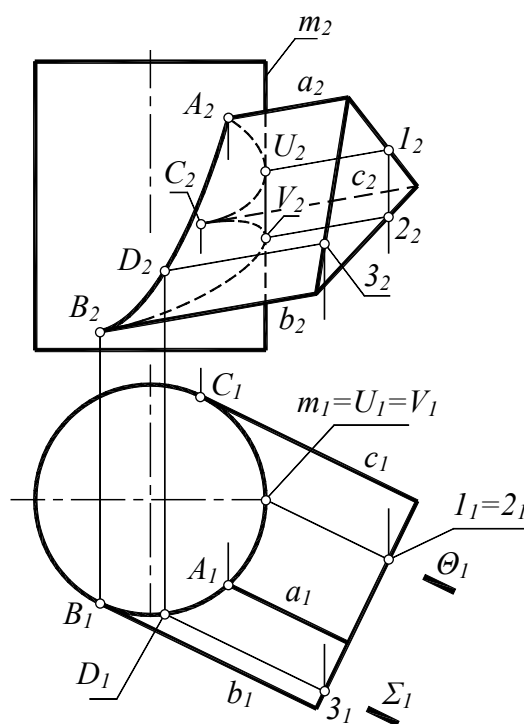


Рис. 9.23

Линия пересечения грани $a||b$ с поверхностью цилиндра (дуга эллипса) проходит через точки A, B и через дополнительную точку D , найденную с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ (см. рис. 9.23).

Таким образом, линия пересечения – замкнутая пространственная кривая, составленная из трех дуг эллипсов, лежащих на трех гранях призмы. Заметим, что дуги эл-

липов касаются ребер b и c в точках B и C , так как в этих точках ребра b и c призмы касаются поверхности цилиндра (согласно условию задачи).

Задача 9.12 (рис. 9.24)

Построить линию пересечения тора с осью j и прямой трехгранной призмы.

Решение. Ребра призмы обозначим буквами a, b, c . Нетрудно видеть, что ребро a не пересекается с поверхностью тора, а ребро b пересекается с поверхностью тора в точке B , лежащей в плоскости основания призмы (рис. 9.25). Для полного решения задачи надо найти линии пересечения поверхности тора с вертикальными гранями призмы.

Пересечение тора с гранью ac . Через грань ac призмы проведем вспомогательную секущую плоскость Θ . Как известно [1, п. 6.2.5.3], в общем случае при пересечении тора плоскостью получается алгебраическая кривая четвертого порядка. Но в частном случае, когда секущая плоскость Θ перпендикулярна оси тора, линия пересечения распадается на две окружности t и t' . Эти окружности проходят через точки I и I' пересечения плоскости Θ с “основанием” тора (здесь основанием тора условно названа окружность, полученная в сечении тора нижней гранью призмы). Фронтальные проекции линий t и t' невидимы (*почему?*). В точках C и C' ребро c пересекается с поверхностью тора (*почему?*).

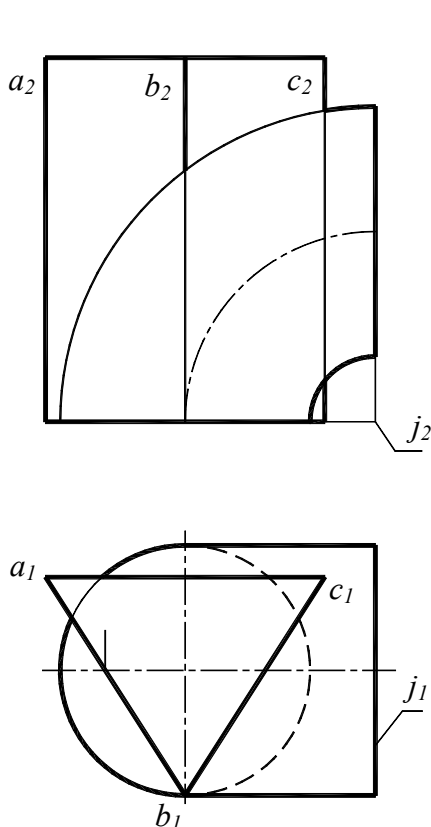


Рис. 9.24

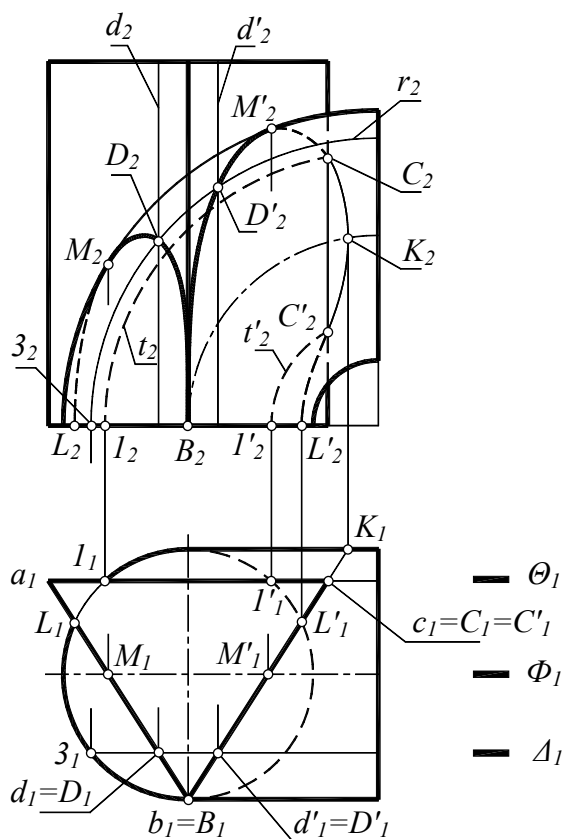


Рис. 9.25

Пересечение тора с гранью ab . В точке L грань ab пересекает круговое “основание” тора. Точка M найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Φ . Плоскость Φ называют плоскостью смены видимости, а точку M – точкой смены видимости. Промежуточная точка D искомой линии найдена с помощью секущей плоскости Δ , пересекающей тор по окружности r , а грань ab призмы – по вертикальной прямой d : $D=r \cap d$.

Через точки L, M, D, B проводим искомую линию пересечения грани ab с поверхностью тора.

Пересечение тора с гранью bc . В точках B и L' грань bc пересекает круговое “основание” тора. Точка смены видимости M' найдена с помощью плоскости смены видимости Φ . Промежуточная точка D' найдена с помощью плоскости Δ , пересекающей тор по окружности r , а грань bc призмы – по вертикальной прямой d' : $D=r\cap d'$. В точках C и C' ребро c призмы пересекается с поверхностью тора. Для увеличения точности построения найдена дополнительная “мнимая” точка K . Эта точка получается, если мысленно продлить грань bc до пересечения с горизонтальным очерком тора. Через точки B, D', M', C, K, C', L' проходит искомая линия пересечения грани bc с поверхностью тора.

9.3. Пересечение кривых поверхностей

В общем случае линия пересечения двух кривых поверхностей – пространственная кривая линия. В частных случаях эта линия может распадаться на несколько замкнутых плоских или пространственных кривых.

При пересечении двух произвольных поверхностей возможны два случая: врезка и проницание. При врезке линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную кривую. При проницании эта линия распадается на две замкнутые пространственные кривые. Например, на рис. 9.26 показана взаимная врезка сферы и конуса, а на рис. 9.27 – проницание конуса сквозь сферу. В первом случае линия пересечения – замкнутая кривая, во втором – линия пересечения распалась на две замкнутые пространственные кривые линии (линию “входа” и линию “выхода”).

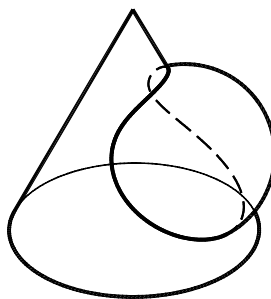


Рис. 9.26

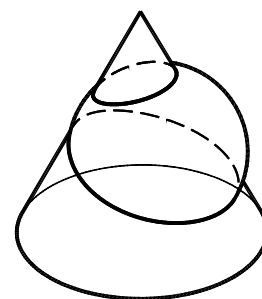


Рис. 9.27

Если в пересечении участвуют алгебраические поверхности, то линия их пересечения – алгебраическая кривая. По-

рядок этой линии равен произведению порядков поверхностей. В частности, показанные на рис. 9.26 и рис. 9.27 конус и сфера – алгебраические поверхности второго порядка. Линия пересечения поверхностей второго порядка – алгебраическая кривая четвертого порядка. Конус и сфера пересекаются по кривой линии, которая описывается алгебраическим уравнением четвертого порядка.

В случае врезки эта линия представляет собой замкнутую пространственную кривую (см. рис. 9.26), а в случае проницания получается кривая четвертого порядка, состоящая из двух не связанных между собой участков (см. рис. 9.27).

Задача 9.13

Построить линию пересечения прямого кругового конуса и сферы (рис. 9.28).

Решение. Построение линии пересечения следует начинать с поиска опорных точек (экстремальных, очерковых и точек смены видимости).

Для определения экстремальных точек вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии Σ данных фигур. Плоскость Σ отсекает конус по треугольнику, а сферу – по окружности. Фронтальные проекции этих линий называют фронтальными *очерковыми линиями* данных фигур.

Фронтальные очерковые линии конуса и сферы пересекаются в точках A и B (см. рис. 9.28). Точки A и B – экстремальные (верхняя и нижняя) относительно горизонтальной плоскости проекций. Таким образом, использование общей плоскости симметрии Σ позволяет определить экстремальные точки искомой линии пересечения.

Наиболее удаленные от Π_3 точки 1 и 2 являются экстремальными точками относительно профильной плоскости проекций. Построение этих точек выполняется с помо-

щью вписанной в конус вспомогательной сферы Ω радиусом OT , центр O которой находится в точке пересечения осей сферы и конуса.

Для дальнейших рассуждений целесообразно уподобить сферу земному шару. Верхнюю точку сферы будем считать “северным полюсом”, нижнюю точку – “южным полюсом”. Между полюсами расположен “экватор”: большой круг на сфере, лежащий в плоскости Φ (см. рис. 9.28).

Плоскость Φ является *плоскостью смены видимости* для горизонтальной проекции данных фигур. Действительно, точки на сфере, лежащие выше “экваториальной плоскости” Φ , при взгляде сверху будут видимыми. Точки на сфере, расположенные ниже плоскости Φ – невидимы, так как заслонены от наблюдателя верхней половиной сферы.

Применение вспомогательной плоскости Φ позволяет определить *точки смены видимости* 3 и 4 на горизонтальной проекции данных поверхностей. Для определения точек 3 и 4 мысленно разрежем сферу и конус плоскостью Φ . Плоскость Φ пересекает сферу по “экватору” e , а конус – по окружности r . На пересечении горизонтальных проекций e_1 и r_1 отмечаем горизонтальные проекции 3_1 и 4_1 точек смены видимости.

Точки 3 и 4 являются одновременно как точками смены видимости, так и *очерковыми* точками, поскольку они находятся на горизонтальном очерке сферы. При переходе из верхнего (“северного”) полушария в нижнее (“южное”) полушарие, линия пересечения сферы и конуса на плоскости Π_1 становится невидимой. Видимость линии меняется в точках 3 и 4, лежащих в плоскости смены видимости Φ .

Напомним, что экстремальные точки, очерковые точки и точки смены видимости называют *опорными* точками. После определения опорных точек линии пересечения приступают к построению ее *промежуточных* точек. На рис. 9.28 показана вспомогательная горизонтальная плоскость Θ , разрезающая сферу и конус по окружностям e' и r' . На пересечении этих линий отмечаем пару точек 5 и 6, симметрично расположенных относительно общей плоскости симметрии Σ .

Соединяя найденные точки плавной кривой, получаем искомую линию пересечения конуса и сферы. На горизонтальной плоскости проекций эта линия частично невидима, а на фронтальной проекции видимый участок линии пересечения совпадает с невидимым.

Полученная линия пересечения алгебраических поверхностей второго порядка (конуса и сферы) – алгебраическая кривая четвертого порядка. Эта кривая симметрична относительно фронтальной плоскости уровня Σ , поэтому ее фронтальная проекция вырождается в кривую второго порядка. В рассматриваемом примере фронтальная проекция линии пересечения вырождается в параболу с вершиной в точке $1_2=2_2$ и горизонтальной осью.

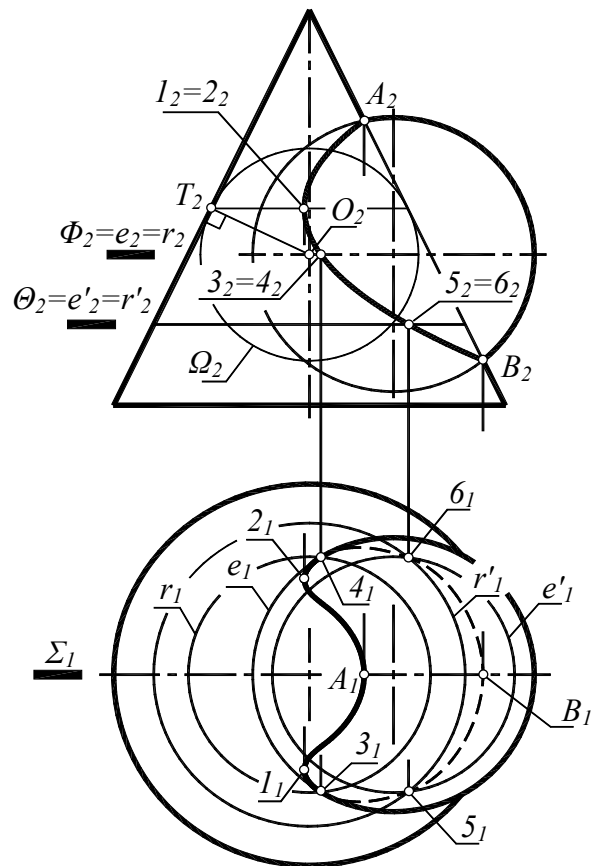


Рис. 9.28

Задача 9.14

Найти линию пересечения кругового цилиндра и сферы (рис. 9.29).

Решение. Эта задача проще предыдущей задачи, поскольку цилиндр занимает проецирующее положение. Напомним определение: если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны к какой-либо плоскости проекций, то такую поверхность называют проецирующей цилиндрической поверхностью [1, п. 8.4].

Если одна из данных поверхностей занимает проецирующее положение, то задача на построение линии пересечения поверхностей решается наиболее просто. В рассматриваемой задаче горизонтальная проекция искомой линии пересечения уже известна, поскольку совпадает с горизонтальным очерком цилиндрической поверхности. Построение недостающей фронтальной проекции линии пересечения выполняется “по точкам” и сводится к многократному решению задачи на принадлежность точки к сфере.

В общей плоскости симметрии Φ отмечаем точки A , B пересечения фронтальных очерковых линий сферы и цилиндра. В общей плоскости симметрии Δ отмечаем точки C , D пересечения горизонтальных очерковых линий сферы и цилиндра.

Для построения дополнительных точек 1 , 2 проведена вспомогательная секущая плоскость Θ , которая пересекает сферу по окружности r . Фронтальные проекции точек 1 , 2 находятся на этой окружности (*почему?*). Через точки A , B , C , D , 1 , 2 проходит искомая линия пересечения сферы и цилиндра. Как и в предыдущей задаче, фронтальная проекция этой линии – парабола.

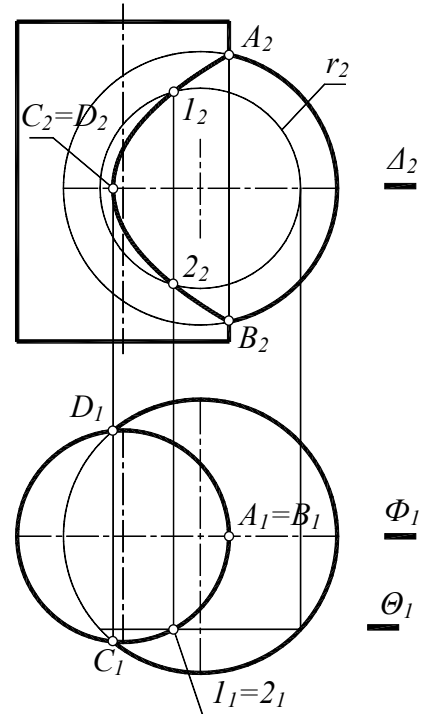


Рис. 9.29

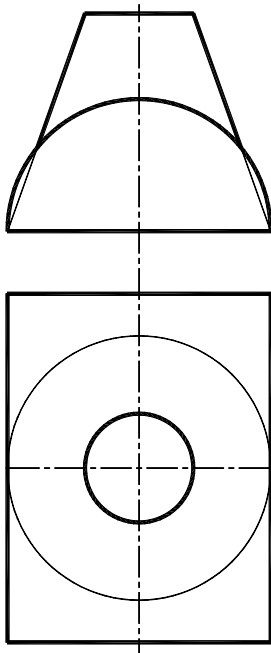


Рис. 9.30

Задача 9.15

Построить линию пересечения поверхностей усеченного конуса и половины цилиндра (рис. 9.30). **Решить задачу в трех проекциях.**

Решение. Цилиндрическая поверхность занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому фронтальная проекция искомой линии пересечения совпадает с фронтальной проекцией цилиндрической поверхности. Следовательно, для решения задачи надо отметить несколько точек (как опорных, так и промежуточных), лежащих на известной фронтальной проекции искомой линии пересечения поверхностей. Затем построить недостающие горизонтальные и профильные проекции этих точек, используя признаки их принадлежности к пересекающимся поверхностям:

1. Линия принадлежит поверхности, если все точки этой линии принадлежат поверхности.
2. Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии на этой поверхности (см. тему 6).

Таким образом, в данном примере, как и в большинстве задач на построение линии пересечения поверхностей, решение задачи сводится к многократному построению недостающих проекций точек,

лежащих на данных поверхностях, и последующему проведению через эти точки искомой линии пересечения.

В общей плоскости симметрии Φ отмечаем точки A, B пересечения фронтальных очерковых линий данных поверхностей (рис. 9.31). В общей плоскости симметрии Δ отмечаем точки C, D пересечения профильных очерковых линий. Точки A, B, C, D – экстремальные точки (нижние и верхние) искомой линии пересечения.

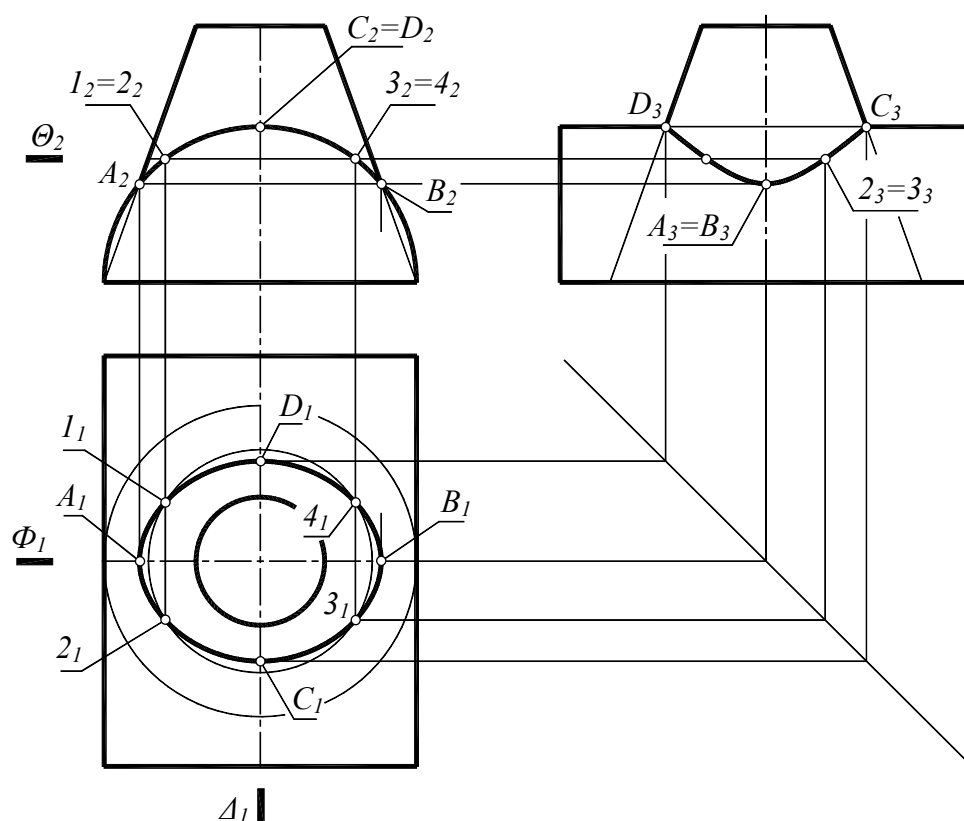


Рис. 9.31

Промежуточные (дополнительные) точки $1, 2, 3, 4$ найдены с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (как?). В пересечении поверхностей второго порядка (конической и цилиндрической) получаем кривую четвертого порядка. Профильная проекция этой линии – гипербола (в силу ее симметрии относительно плоскости Δ).

Задача 9.16 (рис. 9.32)

Построить линию пересечения поверхностей эллиптического цилиндра и прямого кругового конуса.

Решение. Цилиндр называют эллиптическим, если его нормальное сечение – эллипс. Нормальным сечением называют сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к образующим. Любой эллиптический цилиндр обязательно несет на своей поверхности два семейства круговых сечений [1, п. 10.3]. В данном примере все горизонтальные сечения цилиндра, показанного на рис. 9.32 – окружности.

В сечении заданных поверхностей плоскостью Φ получаем фронтальные очерковые линии конуса и цилиндра. На рис. 9.33 эти очерковые линии условно продлены. Отмечаем точки A, B, C, F их пересечения. Также отметим точки E и E' , в которых пересекаются круговые “днища”

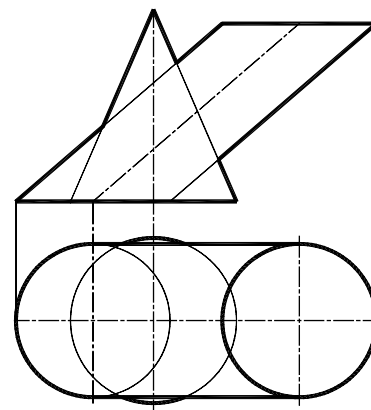


Рис. 9.32

конуса и цилиндра, лежащие в плоскости Δ .

Для построения дополнительных точек искомой линии пересечения используем вспомогательные горизонтальные секущие плоскости. Например, плоскость Σ пересекает поверхность цилиндра по окружности n , а поверхность конуса – по окружности m .

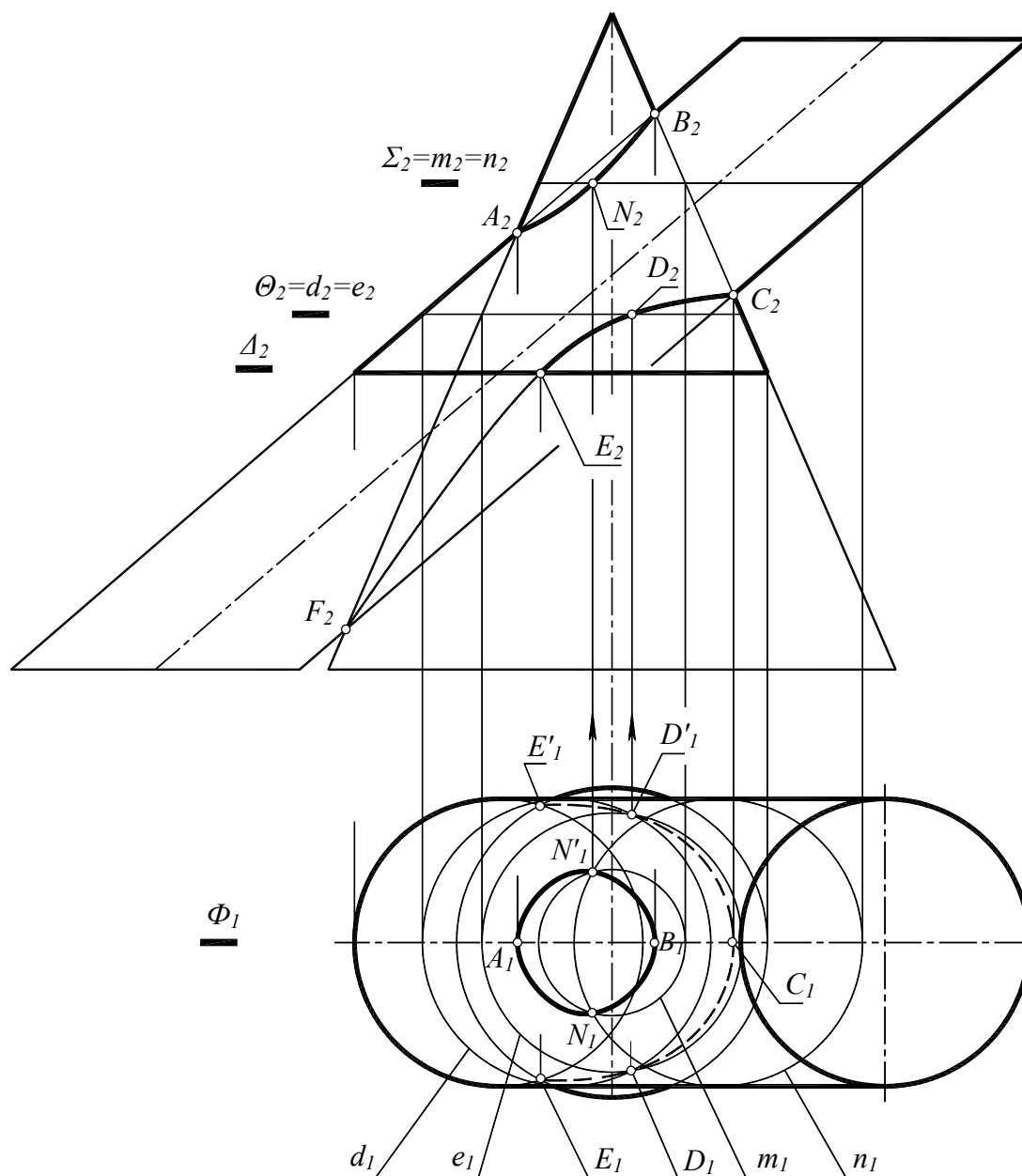


Рис. 9.33

Точки N и N' пересечения окружностей n , m указывают дополнительные (промежуточные) точки искомой линии пересечения конуса и цилиндра.

В рассматриваемой задаче реализован случай проникновения: конус “прокалывает” поверхность цилиндра. При этом линия пересечения распалась на две замкнутые кривые. Одна из них (видимая на горизонтальной проекции) проходит через точки A , B , N , N' , другая (горизонтальная проекция которой невидима) проходит через точки C , D , D' , E , E' . Фронтальная проекция линии пересечения – гипербола, обе ветви которой проходят через фронтальные проекции A_2 , B_2 , N_2 , C_2 , D_2 , E_2 , F_2 найденных точек.

Задача 9.17 (рис. 9.34)

Построить линию пересечения поверхностей тора и кругового цилиндра.

Решение. В данном примере реализован случай проникания: цилиндр “прокалывает” поверхность тора. При проникании тора цилиндром получается пространственная алгебраическая кривая восьмого порядка, которая может распадаться на две, три или четыре не связанных между собой пространственные кривые.

Задача решается с помощью вспомогательных секущих плоскостей $\Phi, \Sigma, T, \dots$, перпендикулярных оси j тора. Например, плоскость Σ разрезает поверхность цилиндра по двум параллельным прямым m и n , а поверхность тора – по двум concentрическим окружностям r и r' . На пересечении этих линий разреза отмечаем точки M, N, N' , принадлежащие искомой линии пересечения тора и цилиндра (рис. 9.35).

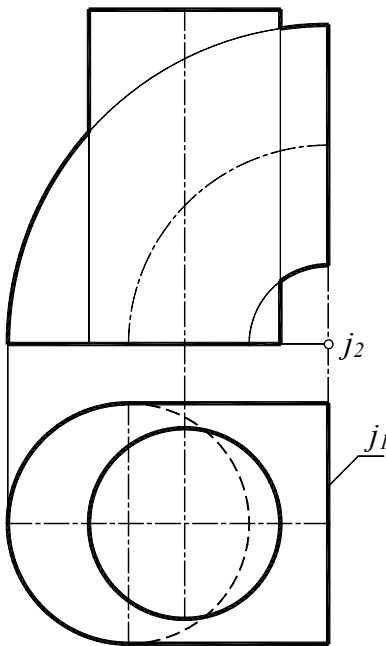


Рис. 9.34

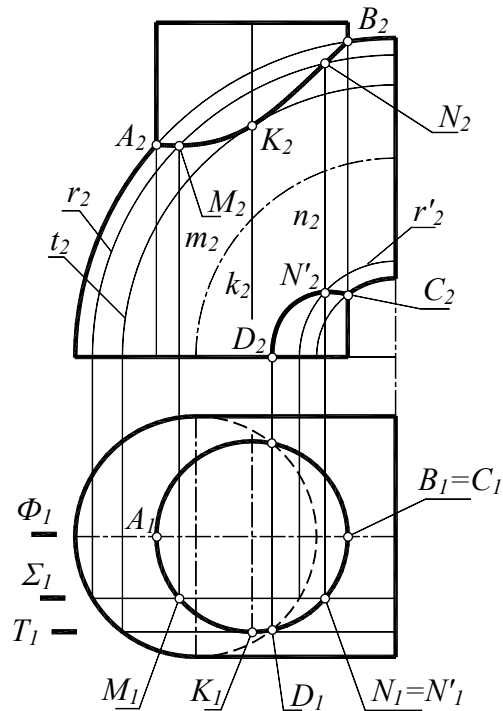


Рис. 9.35

Плоскость общей симметрии Φ пересекает поверхности тора и цилиндра по очерковым линиям, на пересечении которых отмечаем опорные (очерковые) точки A, B, C . Вспомогательная плоскость T касается цилиндрической поверхности по прямой k , и при этом рассекает тор по “большой” окружности t (“малое” сечение тора плоскостью T на рис. 9.35 условно не показано). На пересечении линий разреза t и r отмечаем точку K , принадлежащую искомой линии пересечения тора и цилиндра.

Горизонтальная плоскость основания цилиндра пересекает поверхности тора и цилиндра по двум окружностям, на пересечении которых отмечаем точки D и D' , симметрично расположенные относительно общей плоскости симметрии Φ (точка D' на рис. 9.35 условно не показана). Соединяя найденные точки, получаем линию пересечения поверхностей тора и цилиндра, распадающуюся на две кривые.

Примечание. Если мысленно достроить заданную четверть тора до целого кольца, и продлить цилиндрическую поверхность, то в пересечении получим кривую четвертого порядка, распадающуюся на три не связанных между собой замкнутые пространственные кривые линии. Как должен располагаться цилиндр, чтобы в пересечении с тором получились четыре замкнутые кривые (две, одна)?

Тема 10

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР

В начертательной геометрии точки, принадлежащие линии пересечения двух поверхностей, находят с помощью *способа вспомогательных секущих поверхностей*. На выбор секущей поверхности накладывается требование: проекции линии пересечения вспомогательной поверхности с заданными поверхностями должны быть графически простыми линиями – прямыми или окружностями.

Чаще всего в качестве вспомогательной секущей поверхности используют *плоскость*. Но в некоторых случаях в качестве вспомогательной секущей поверхности может быть использована *сфера*.

Применение сфер основано на следующем свойстве поверхностей вращения: *соосные поверхности вращения пересекаются по окружности* (соосными называют поверхности вращения, имеющие общую ось).

Схема построения точки, принадлежащей линии пересечения двух поверхностей Θ и Δ , не зависит от вида вспомогательной секущей поверхности.

1. Вводим вспомогательную секущую поверхность (например, сферу Φ).

2. Находим “линии разреза” $t = \Phi \cap \Theta$ и $d = \Phi \cap \Delta$, по которым секущая сфера Φ рассекает заданные поверхности Θ и Δ .

3. Отмечаем точки пересечения найденных линий разреза t и d . Эти точки находятся на линии пересечения заданных поверхностей Θ и Δ (*почему?*).

Многokrатно повторяя действия 1...3, получаем ряд точек, через которые проводим искомую линию пересечения.

10.1. Способ концентрических сфер

Способ концентрических сфер применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций. Точка пересечения осей – общий центр всех вспомогательных сфер.

Задача 10.1

Построить линию пересечения цилиндрической и конической поверхностей вращения, оси которых пересекаются в точке O (рис. 10.1).

Решение. Общая плоскость симметрии Φ пересекает конус и цилиндр по фронтальным очерковым линиям. Фронтальные очерковые линии пересекаются в точках A и B , принадлежащих искомой линии пересечения. Точки A и B найдены с помощью вспомогательной плоскости Φ (рис. 10.2).

Для построения дополнительных точек искомой линии будем использовать вспомогательные секущие сферы с центром в точке O . Вспомогательная сфера должна пересекать заданные поверхности, поэтому радиус секущей сферы не должен быть меньше, чем радиус “минимальной” сферы ρ , вписанной в цилиндрическую поверхность (см. рис. 10.2).

Минимальная сфера ρ пересекает поверхность конуса по окружности r и соприкасается с цилиндром по окружности k . Очевидно, окружности r и k должны пересекаться между собой, так как они находятся на одной и той же сфере ρ . Отметим точки K и K' пересечения

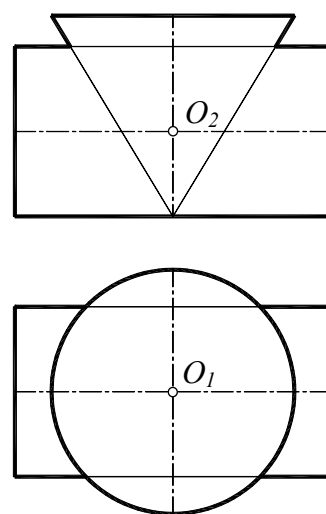


Рис. 10.1

чения окружностей r и k . Эти точки принадлежат искомой линии пересечения цилиндра и конуса.

Таким образом, построение точек K и K' выполнено в полном соответствии с вышеприведенной универсальной схемой построения точек, принадлежащих линии пересечения двух поверхностей:

1. Введена вспомогательная сфера ρ .
2. Найдены “линии разреза” k и r , по которым секущая сфера ρ пересекает заданные поверхности (линию касания k следует рассматривать как предельное положение линии пересечения цилиндра и вписанной в него сферы).
3. Отмечены точки K, K' пересечения найденных линий разреза k и r .

Проводя вспомогательные сферы разных радиусов (с центром в точке O), находим промежуточные точки искомой линии пересечения. Например, вспомогательная секущая сфера τ пересекает конус по окружности t , а цилиндр – по двум окружностям c и d . На пересечении окружности t с окружностями c и d отмечаем точки $1...4$, принадлежащие линии пересечения заданных поверхностей.

Соединяя найденные точки, получаем замкнутую алгебраическую кривую четвертого порядка, фронтальная проекция которой вырождается в гиперболу. На чертеже рис. 10.2 показана одна ветвь гиперболы, проходящая через фронтальные проекции точек A, B, K .

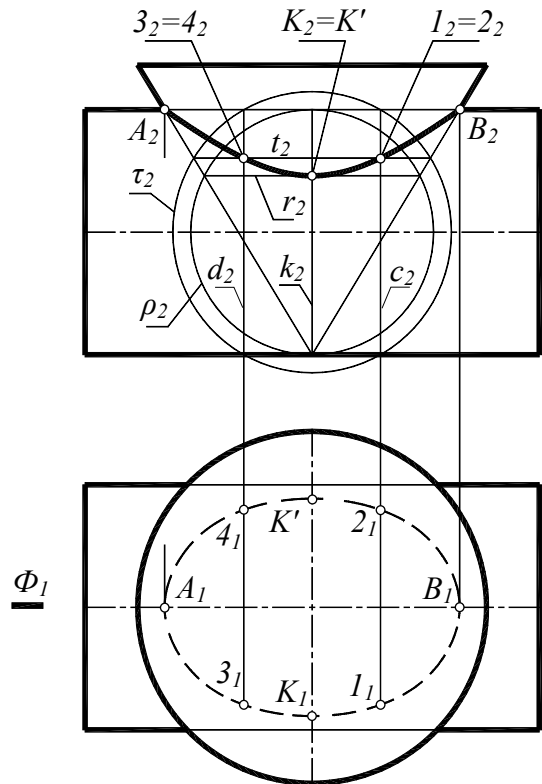
Примечание. В данном примере рассмотрен “предельный случай” врезки конуса в цилиндр. Действительно, если увеличить высоту конуса на небольшую (бесконечно малую) величину, то конус “проколет” цилиндрическую поверхность, то есть вместо врезки будет реализован случай проникания.

Задача 10.2 (рис. 10.3)

Построить линию пересечения конических поверхностей вращения, оси которых пересекаются в точке O .

Решение. Общая плоскость симметрии Φ пересекает конус и цилиндр по фронтальным очерковым линиям. Фронтальные очерковые линии пересекаются в точках K, L, M, N , принадлежащих искомой линии пересечения (рис. 10.4).

Горизонтальная плоскость уровня Δ , проходящая через ось горизонтального конуса, пересекает его по горизонтальной очерковой линии. Эта же плоскость Δ пересекает вертикальный конус по окружности d . На горизонтальной плоскости проекций отмечаем точки C, C', D, D' пересечения очерковой линии горизонтального конуса и окружности d_1 . Плоскость Δ является плоскостью смены видимости для Π_1 , поэтому в точках C, C', D, D' меняется видимость горизонтальной проекции линии пересечения данных поверхностей.



Для построения дополнительных точек искомой линии пересечения будем использовать вспомогательные секущие сферы с центром в точке O . Сфера минимального радиуса вписана в вертикальный конус (сфера ρ на рис. 10.4). Минимальная сфера касается вертикального конуса по окружности t , и одновременно пересекает поверхность горизонтального конуса по окружностям r и e . На пересечении окружности t с окружностями r , e отмечаем точки A, A', B, B' , принадлежащие искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Еще одна группа промежуточных точек найдена с помощью вспомогательной секущей сферы τ . Сфера τ пересекает вертикальный конус по окружностям m и n , а горизонтальный конус – по окружностям u и v . Из чертежа (см. рис. 10.4) следует, что окружности u и m не пересекаются между собой. Окружности n и v пересекаются в точках $1, 1'$. Окружности n и u пересекаются в точках $2, 2'$. Окружности m и v пересекаются в точках $3, 3'$.

Через найденные точки $A, A', B, B', C, C', D, D', K, L, M, N, 1, 1', 2, 2', 3, 3'$ проводим искомую линию пересечения заданных конических поверхностей. Линия пересечения распалась на две замкнутые пространственные кривые, фронтальная проекция которых вырождается в гиперболу (вследствие наличия общей плоскости симметрии Φ).

Примечание. На рис. 10.4 некоторые промежуточные точки искомой линии пересечения условно не обозначены. Например, на плоскости Π_2 не отмечены фронтальные проекции точек $A', B', C', D', 1', 2', 3'$, симметричные точкам $A, B, C, D, 1, 2, 3$ (относительно общей плоскости симметрии Φ). На плоскости Π_1 условно не показаны проекции группы промежуточных точек $1, 1', 2, 2', 3, 3'$.

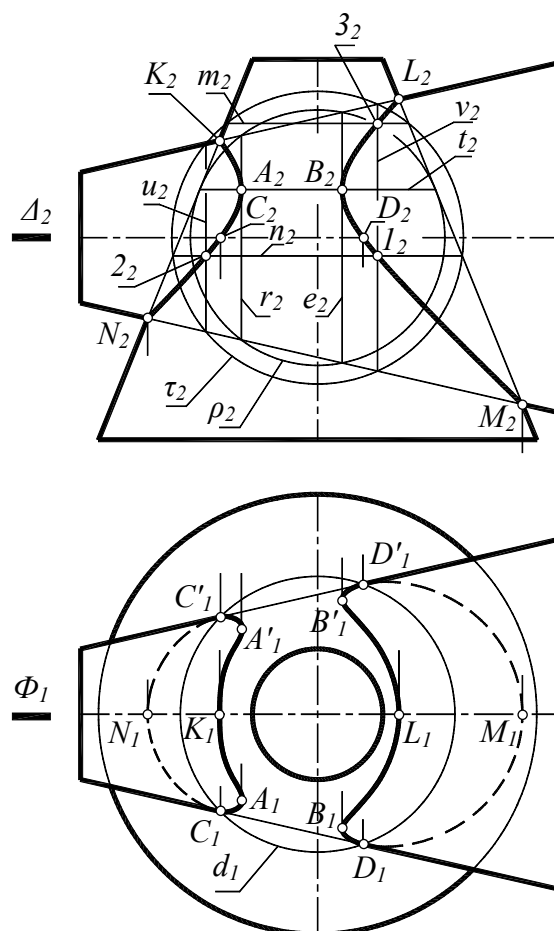


Рис. 10.4

10.2. Способ эксцентрических сфер

Способ эксцентрических сфер применяют для построения линии пересечения поверхностей, имеющих круговые сечения, со скрещивающимися или пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций. Сущность способа состоит в том, что выбирается сфера, пересекающая данные поверхности по окружностям. Эти окружности пересекаются между собой в точках, лежащих на искомой линии пересечения поверхностей.

Задача 10.3 (рис. 10.5)

Построить линию пересечения тора и конической поверхности вращения.

Решение. Ось вращения тора j и ось вращения конуса i не пересекаются (скрещиваются). Следовательно, способ концентрических сфер в данном случае неприменим.

Заметим, что заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , параллельную фронтальной плоскости проекций. Также очевидно, что данные поверхности

имеют круговые сечения. Следовательно, выполняются условия применения способа эксцентрических сфер. В соответствии с этим способом, следует отыскать вспомогательную сферу, пересекающую обе заданные поверхности по окружностям. Окружности пересекутся в точках, лежащих на искомой линии пересечения поверхностей.

Через ось вращения тора проводим плоскость Γ , пересекающую тор по окружности g (рис. 10.6, а). Из центра G этой окружности проводим перпендикуляр к плоскости Γ до пересечения с осью конуса в точке O . Проводим вспомогательную секущую сферу Θ с центром в точке O . Радиус сферы Θ выбираем таким образом, чтобы окружность g лежала на этой сфере. Поскольку центр O вспомогательной сферы лежит на оси конуса, то сфера пересекает поверхность конуса по двум окружностям. На рис. 10.6, а условно показана только одна из этих окружностей – окружность q .

Таким образом, найдена сфера Θ , пересекающая обе заданные поверхности по окружностям. Сфера с конусом пересекаются по двум окружностям, одна из которых (окружность q) показана на чертеже. Сфера с тором пересекаются по окружности g . На пересечении окружностей q и g отмечаем точки I и I' , лежащие на искомой линии пересечения поверхностей тора и конуса.

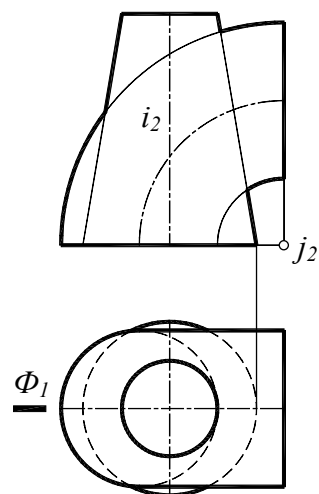


Рис. 10.5

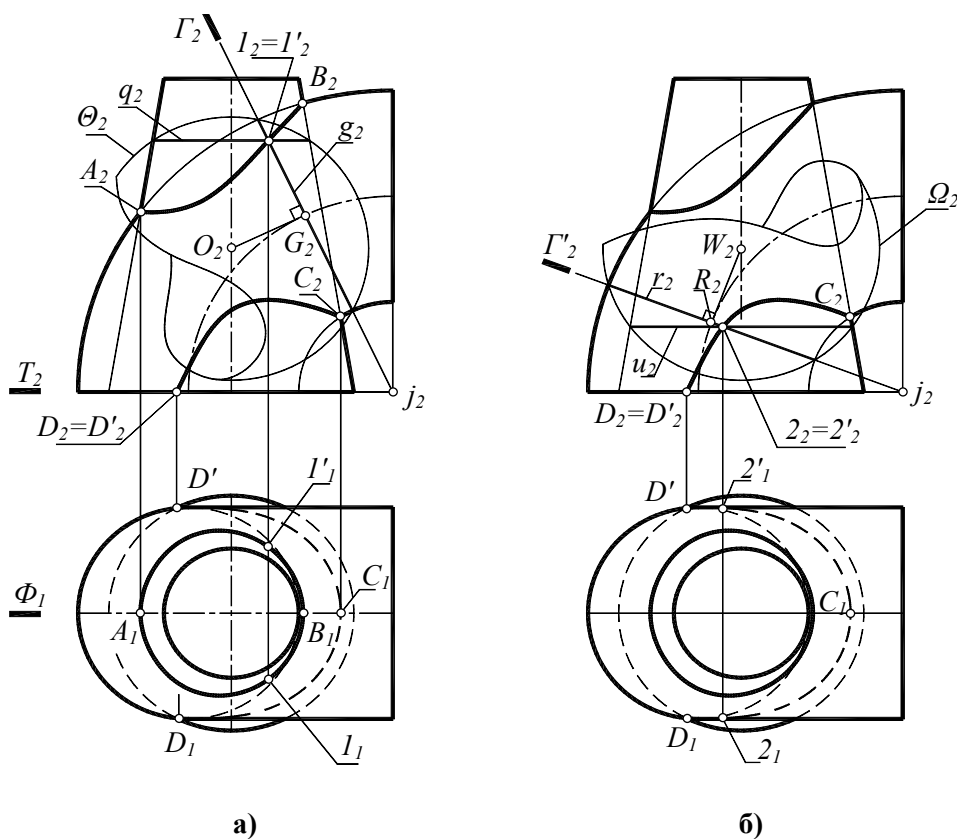


Рис. 10.6

Изменяя положение плоскости Γ , подбираем новую вспомогательную секущую сферу, пересекающую обе заданные поверхности по окружностям. Например, на рис. 10.6, б показана плоскость Γ' , пересекающая тор по окружности r . Из центра R этой окружности проводим перпендикуляр к плоскости Γ' до пересечения его с осью конуса в точке W . Проводим вспомогательную секущую сферу Ω с центром в точке W . Размер

сферы выбираем таким образом, чтобы окружность r лежала на сфере. Сфера пересекается с конусом по окружности u . На пересечении окружностей r и u отмечаем точки $2, 2'$, принадлежащие искомой линии пересечения данных поверхностей (конуса и тора).

Точки A, B, C , указанные на рис. 10.6, найдены с помощью общей плоскости симметрии Φ , пересекающей заданные поверхности по фронтальным очерковым линиям. На пересечении фронтальных очерковых линий тора и конуса отмечают очерковые точки A, B, C . Точки D и D' расположены в плоскости основания T . Эта плоскость пересекает тор и конус по двум окружностям. На пересечении этих окружностей отмечены точки D, D' .

Через точки A, B, I, I' проводим замкнутую кривую линию. Промежуточные точки этой линии, найденные с помощью вспомогательных сфер, на рис. 10.6 условно не показаны. Через точки $D, D', 2, 2'$ проводим разомкнутую кривую линию, которая начинается в точке D , а заканчивается в точке D' .

Примечание 1. Построения, показанные на рис. 10.6, а и рис. 10.6, б, следует выполнять на одном чертеже. В тексте пособия эти построения условно показаны на двух отдельных чертежах.

Примечание 2. В условии задачи задан не целый тор, а его четверть. Если рассматривать случай пересечения конуса с полным тором, то линия пересечения распадается на три не связанные между собой замкнутые ветви AB, CE и GF пространственной алгебраической кривой восьмого порядка (рис. 10.7).

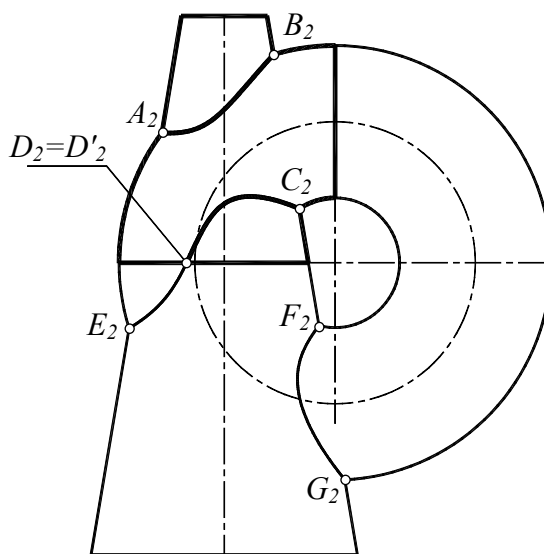


Рис. 10.7

Задача 10.4 (рис. 10.8)

Построить линию пересечения тора и конической поверхности вращения.

Решение. Оси вращения тора и конуса не пересекаются (скрещиваются). Заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии Σ , параллельную фронтальной плоскости проекций. Также очевидно, что заданные поверхности имеют круговые сечения. Например, плоскость T пересекает тор и конус по круговым сечениям t и g (на рис. 10.8 показаны профильные проекции t_3 и g_3 этих круговых сечений). Следовательно, выполняются условия применения способа эксцентрических сфер.

Разумеется, при решении этой задачи (как и любой другой) могут быть использованы не только вспомогательные секущие сферы, но и вспомогательные секущие плоскости. Например, горизонтальная плоскость Γ пересекает тор по окружности l , а конус – по горизонтальной очерковой линии. На пересечении окружности l и горизонтального очерка конуса отмечаем точки A, A', B, B' , принадлежащие искомой линии пересечения заданных поверхностей (рис. 10.9, а).

Общая плоскость симметрии Σ пересекает данные поверхности по фронтальным очерковым линиям, на пересечении которых отмечаем точку C , также лежащую на линии пересечения заданных поверхностей.

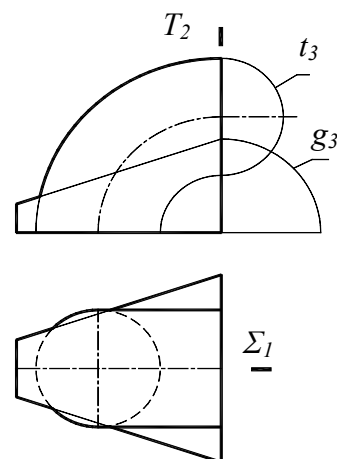


Рис. 10.8

Плоскость T пересекает тор и конус по окружностям t и g , которые пересекаются между собой в точках D и D' . Для построения этих точек использованы профильные проекции t_3, g_3 сечений t, g (см. рис. 10.9, а).

Напомним алгоритм построения промежуточных точек линии пересечения с помощью эксцентрических сфер [1, п. 9.2].

1. Через ось j тора проводим произвольную плоскость Ω . Эта плоскость пересекает поверхность тора по окружности v с центром V (см. рис. 10.9, а). Перпендикуляр к плоскости Ω , проведенный через V , пересекается с осью конуса в точке O .

2. Проводим вспомогательную сферу Φ с центром O , проходящую через окружность v . Сфера Φ пересекает тор по окружности v , а поверхность конуса – по окружности w . На пересечении этих окружностей отмечаем точки I, I' , принадлежащие искомой линии пересечения поверхностей.

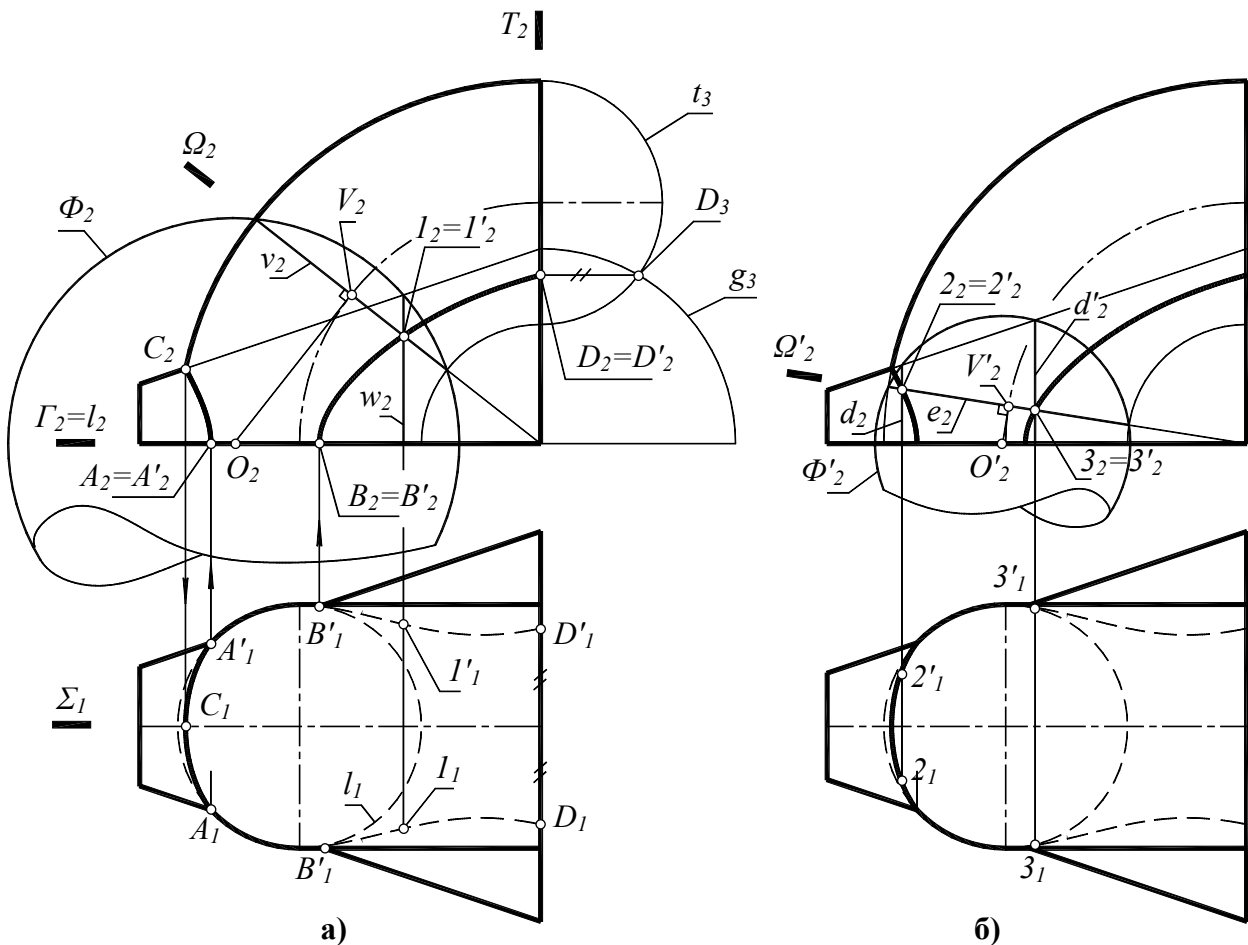


Рис. 10.9

Чтобы найти дополнительные точки искомой линии пересечения, повторяем указанные действия. Проводим через ось тора плоскость Ω' , которая пересекает тор по окружности e с центром V' (рис. 10.9, б). Из точки V' проводим перпендикуляр к плоскости Ω' до пересечения с осью конуса в точке O' . Находим сферу Φ' с центром O' , проходящую через окружность e . Сфера Φ' пересекает поверхность тора по окружности e , а поверхность конуса – по окружностям d и d' . На пересечении окружности e с окружностями d и d' отмечаем точки $2, 2'$ и $3, 3'$ искомой линии пересечения (см. рис. 10.9, б). Через опорные точки A, B, C, D, A', B', D' , найденные с помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ, Γ, T , и через промежуточные точки $I, 2, 3, I', 2', 3'$, найденные с

помощью вспомогательных сфер Φ , Φ' , проходит линия пересечения поверхностей тора и конуса.

Примечание. В условии задачи задан не целый тор и не целый конус, а четверть тора и половина усеченного конуса. Если рассматривать случай пересечения полного конуса с полным тором, то линия пересечения распадается на две не связанные между собой замкнутые ветви пространственной алгебраической кривой восьмого порядка. Одна ветвь этой кривой проходит через точки A , A' , C , E , а другая ветвь – через точки B , B' , D , D' , F , G (рис. 10.10).

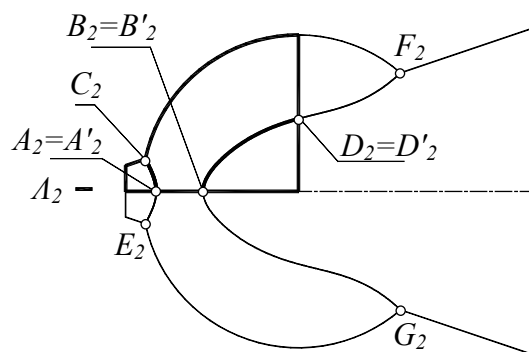


Рис. 10.10

Задача 10.5 (рис. 10.11, а)

Построить фронтальную проекцию линии пересечения поверхностей прямого кругового цилиндра и эллиптического конуса. Обе поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , параллельную Π_2 .

Решение. Согласно условию, в сечении эллиптического конуса плоскостью Σ получается окружность. Любая плоскость, параллельная плоскости Σ , пересекает поверхность конуса по окружности. Центры круговых сечений конуса плоскостями, параллельными Σ , лежат на *линии центров* семейства круговых сечений Σ (см. рис. 10.11, а).

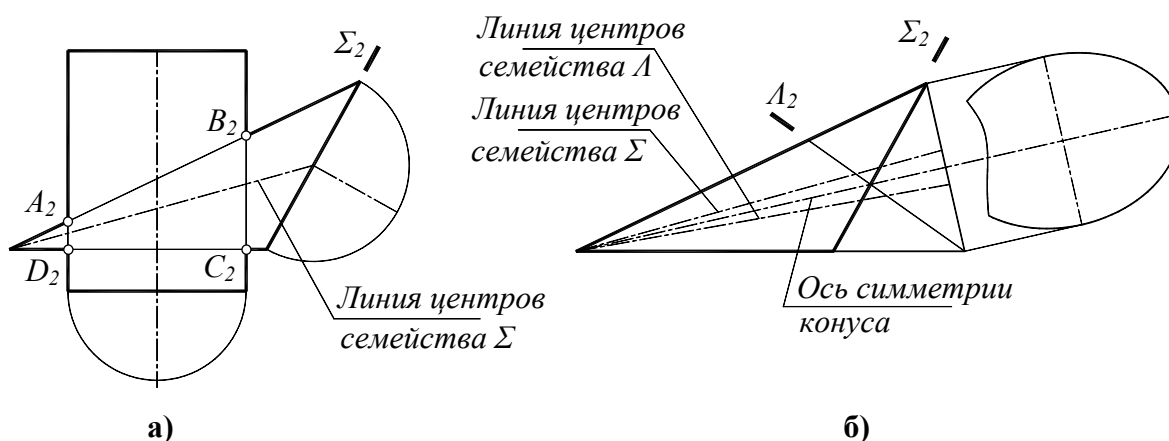


Рис. 10.11

Эллиптический конус имеет два семейства симметрично расположенных круговых сечений Σ и Λ , которым соответствуют две разные линии центров (см. рис. 10.11, б).

Если заданный на рис. 10.11, а эллиптический конус достроить до полного конуса, как показано на рис. 10.11, б, то будет найдена его ось симметрии. Ось симметрии – прямая линия, по которой пересекаются плоскости симметрии эллиптического конуса.

Общая плоскость симметрии Φ пересекает заданные поверхности по фронтальным очерковым линиям (цилиндр по прямоугольнику, конус – по треугольнику). На пересечении очерковых линий отмечаем фронтальные проекции точек A , B , C , D , принадлежащих искомой линии пересечения данных поверхностей (см. рис. 10.11, а).

Заданные поверхности содержат круговые сечения и общую плоскость симметрии Φ , поэтому для построения дополнительных точек линии их пересечения может быть использован способ эксцентрических сфер. В соответствии с этим способом, надо “подобрать” сферу, которая пересекала бы заданные поверхности по окружностям. Точки пересечения этих окружностей будут лежать на линии пересечения поверхностей.

Проведем произвольную плоскость Σ' , параллельную плоскости Σ (рис. 10.12, а). Плоскость Σ' пересекает поверхность конуса по окружности s с центром в точке S . Из точки S проводим перпендикуляр к плоскости Σ' до пересечения с осью цилиндра в точке T . Выбираем вспомогательную секущую сферу Θ таким образом, чтобы окружность s располагалась на этой сфере. Сфера Θ пересекает поверхность цилиндра по окружности t . Таким образом, сфера Θ пересекает конус и цилиндр по окружностям s и t . На пересечении этих окружностей отмечаем точки I, I' , через фронтальные проекции которых проходит фронтальная проекция искомой линии пересечения заданных поверхностей (см. рис. 10.12, а).

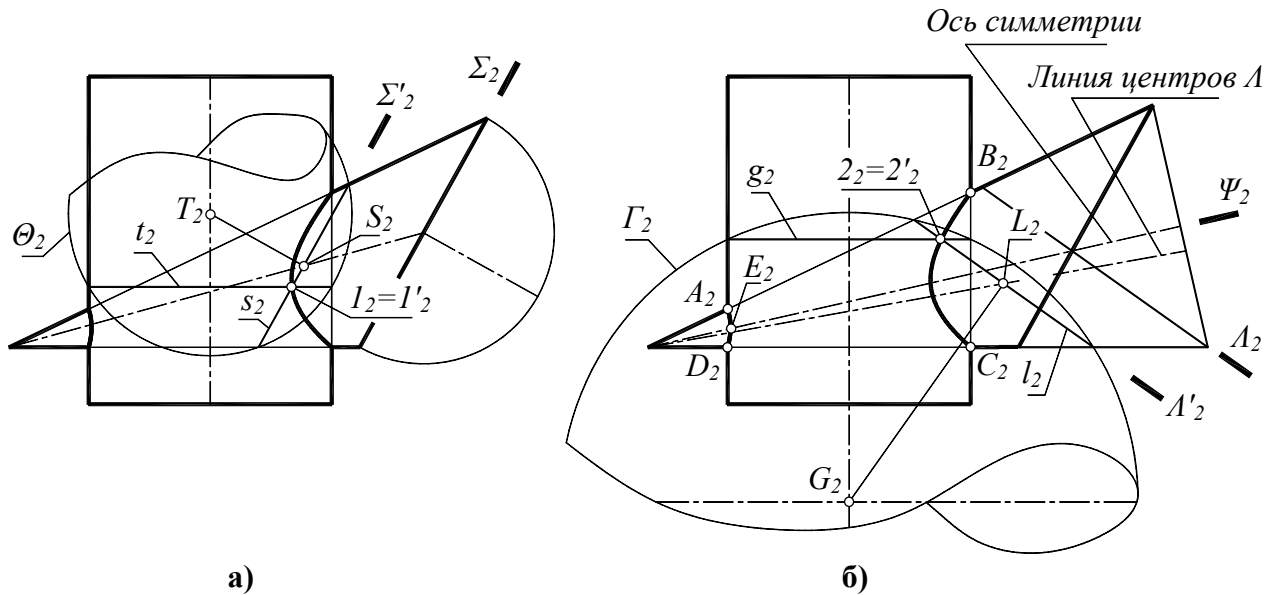


Рис. 10.12

Напомним, что эллиптический конус содержит два семейства круговых сечений, параллельных плоскостям Σ и Λ . Произвольная плоскость Λ' , параллельная плоскости Λ , пересекает конус по окружности l с центром L , лежащим на линии центров семейства круговых сечений Λ (рис. 10.12, б). Проводим из L перпендикуляр к плоскости Λ' до пересечения с осью цилиндра в точке G . Из точки G , как из центра, проводим вспомогательную секущую сферу Γ . Радиус сферы Γ выбираем таким образом, чтобы окружность l лежала на этой сфере. Сфера Γ пересекает поверхность цилиндра по окружности g . На пересечении окружностей l и g отмечаем точки $2, 2'$, через фронтальные проекции которых проходит фронтальная проекция искомой линии пересечения заданных поверхностей (см. рис. 10.12, б).

Меняя положение секущих плоскостей Σ' и Λ' и повторяя вышеописанные построения, получаем любое количество точек искомой линии пересечения. В рассмотренном примере реализован случай проникания. Линия пересечения конуса и цилиндра (кривая четвертого порядка) распалась на две замкнутые пространственные кривые, фронтальная проекция которых – гипербола.

Примечание. Точка E , лежащая на левой ветви гиперболы, найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Ψ , проведенной через ось симметрии конуса. Это построение, требующее использования плоскости Π_I , на рис. 10.12, б условно не показано.

Тема 11

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхности второго порядка – это эллипсоид, гиперboloид (однополостной и двуполостной), параболоид (эллиптический и гиперболический) и их частные случаи: сфера, цилиндр и конус. Этим списком полностью исчерпывается класс невырожденных поверхностей второго порядка. Никакая другая поверхность не может быть названа поверхностью второго порядка (если исключить из рассмотрения случаи вырождения поверхности второго порядка в пару плоскостей).

Поскольку поверхности второго порядка являются алгебраическими, то и линия их пересечения есть алгебраическая кривая (в общем случае – пространственная). Так как порядок линии пересечения равен произведению порядков поверхностей, то эта линия – всегда кривая четвертого порядка. В отличие от других алгебраических кривых четвертого порядка, ее называют *биквадратной кривой*. Эта кривая может распадаться: на четыре прямые, на две кривые второго порядка, на кривую второго порядка и две прямые, на кривую третьего порядка и прямую.

В прикладных геометрических задачах чаще всего встречается случай распада биквадратной кривой на две кривые второго порядка. Условия, при которых возможно такое распадение, формулируются в виде трех теорем: теоремы о пересечении поверхностей второго порядка по плоской кривой, теоремы о двойном прикосновении, теоремы Монжа [1, лекция 10].

11.1. Задачи на применение теоремы 1

Теорема 1. *Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой.*

Задача 11.1

Построить линию пересечения поверхностей конуса и цилиндра с общим круговым основанием k (рис. 11.1).

Решение. Согласно условию, данные поверхности пересекаются по кривой k , лежащей в плоскости основания Σ . Значит, в соответствии с теоремой 1, имеется еще одна часть e линии пересечения, которая должна быть кривой второго порядка. Чтобы построить недостающий участок линии пересечения, мысленно рассечем конус и цилиндр общей плоскостью симметрии Φ . В сечении получаем фронтальные очерки данных поверхностей. Продолжив фронтальные очерковые линии, отмечаем точки A, B их пересечения. Через точки A, B должен проходить недостающий участок e искомой линии пересечения. Общая плоскость симметрии Φ параллельна плоскости проекций P_2 , поэтому кривая второго порядка e изобразится на P_2 прямолинейным отрезком A_2B_2 . Плоскость Θ кривой e пересекает все образующие конуса, значит, линия e – эллипс.

Таким образом, в рассмотренном примере линия пересечения поверхностей цилиндра и конуса распалась на две кривые второго порядка: на окружность k , лежащую в плоскости Σ и на эллипс e , лежащий в плоскости Θ . Эти кривые пересекаются между собой в точках C и D . По фронтальной проекции эллипса e нетрудно построить его горизонтальную проекцию $e_1 = A_1C_1B_1D_1$ (см. рис. 11.1).

Задача 11.2

Построить линию пересечения поверхностей полусферы и конуса с общим круговым основанием k (рис. 11.2).

Решение. Согласно условию, поверхности конуса и полусферы пересекаются по плоской кривой – окружности k . Следовательно, в соответствии с теоремой 1, данные

поверхности пересекаются еще по одной плоской кривой e , которая также будет окружностью, так как любая плоская кривая на сфере – это окружность. Продлив фронтальные очерки данных фигур, отмечаем точки их пересечения A, B . Окружность e проходит через точки A, B и пересекается с основанием k в точках C, D (см. рис. 11.2).

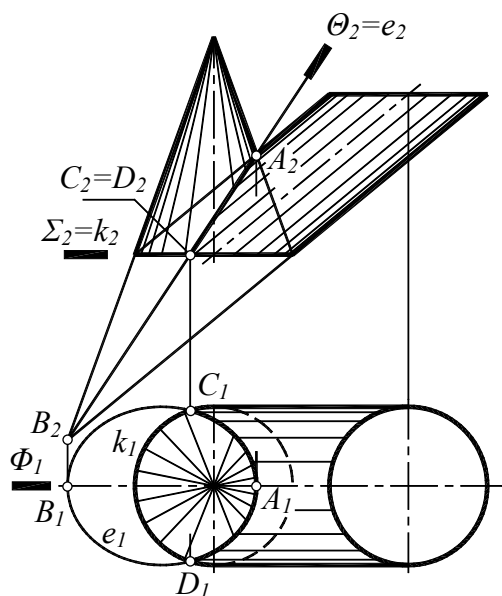


Рис. 11.1

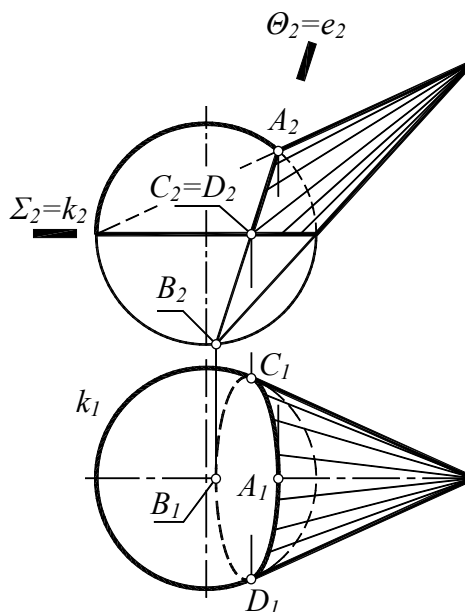


Рис. 11.2

В данном примере линия пересечения полусферы и конуса распалась на две окружности k и e , лежащие во фронтально-проецирующих плоскостях Σ и Θ . Фронтальная проекция окружности e – отрезок A_2B_2 , ее горизонтальная проекция – эллипс $A_1C_1B_1D_1$.

11.2. Задача на применение теоремы 2

Теорема 2. Если две поверхности второго порядка касаются в двух точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые (второго порядка), плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.

Задача 11.3

Найти семейство круговых сечений эллиптического конуса.

Решение. Введем в рассмотрение вспомогательную сферу с центром в произвольной точке O на оси конуса и имеющую с ним касание в двух точках A и B (рис. 11.3). В этих точках сфера и конус имеют общие касательные плоскости. В соответствии с теоремой 2, через прямую AB пройдут плоскости Σ и Σ' кривых, по которым конус пересекается со сферой. Эти кривые – окружности, так как они лежат на поверхности сферы. Следовательно, плоскости Σ, Σ' пересекают поверхность конуса по окружностям.

В общей плоскости симметрии Φ (плоскость Φ параллельна Π_3) получаем профильные очерковые линии конуса и сферы, пересекающиеся между собой в точках C_3, D_3 и E_3, F_3 . Через точ-

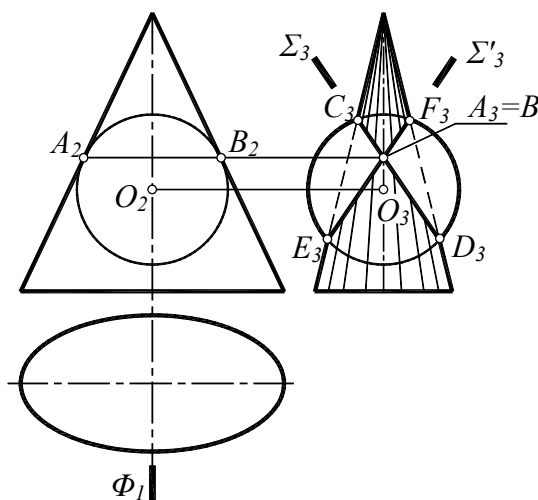


Рис. 11.3

ки C, D и E, F , а также через пару точек A, B проходит линия пересечения данных поверхностей, распавшаяся на две окружности. На плоскости Π_3 эти окружности изображаются отрезками C_3D_3 и E_3F_3 .

Таким образом, на поверхности эллиптического конуса имеются два семейства круговых сечений: любая плоскость, параллельная плоскостям Σ или Σ' , пересекает поверхность эллиптического конуса по окружности.

11.3. Задачи на применение теоремы Монжа

Теорема 3 (теорема Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

Задача 11.4

Построить линию пересечения поверхностей кругового конуса и цилиндра вращения, описанных около сферы (рис. 11.4).

Решение. Конус и цилиндр касаются сферы по окружностям t и g , которые пересекаются между собой в точках T и G . Согласно теореме Монжа, линиями пересечения данных поверхностей будут два эллипса, плоскости которых проходят через прямую TG , соединяющую точки T, G пересечения линий касания t, g .

Данные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , параллельную плоскости проекций Π_2 . Следовательно, прямая TG занимает фронтально-проецирующее положение. Искомые линии пересечения конуса и цилиндра проецируются на Π_2 отрезками A_2B_2 и C_2D_2 , где A, B, C, D – точки пересечения фронтальных очерковых линий конуса и цилиндра (см. рис. 11.4).

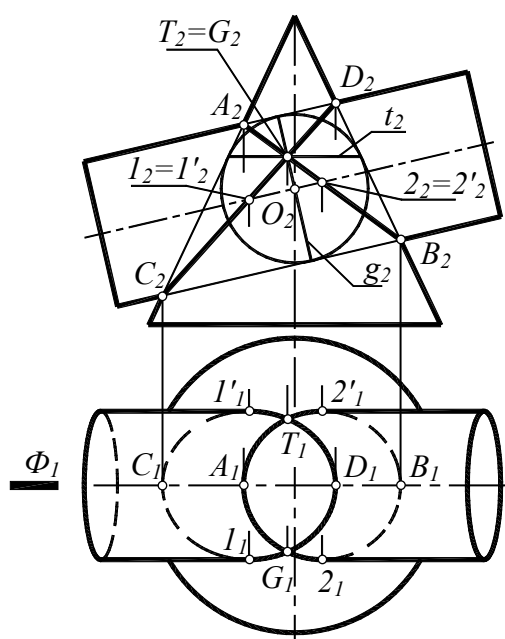


Рис. 11.4

На горизонтальной проекции видимость линии пересечения, распавшейся на два эллипса, меняется в точках $1, 1'$ и $2, 2'$, лежащих на горизонтальном очерке цилиндра. Любое количество точек линии пересечения конуса и цилиндра можно построить по их принадлежности к поверхности конуса.

Задача 11.5

Построить линию пересечения круговых цилиндрических поверхностей, описанных около одной и той же сферы (рис. 11.5, а).

Решение. Эта задача проще предыдущей задачи, так как один из цилиндров занимает горизонтально-проецирующее положение. Благодаря этому обстоятельству, отпадает необходимость строить горизонтальную проекцию линии пересечения данных поверхностей (*почему?*).

Цилиндры касаются сферы по окружностям e и g , которые пересекаются между собой в точках A и B . Согласно теореме Монжа, линиями пересечения данных поверхностей будут два эллипса, плоскости которых проходят через прямую AB , соединяющую точки A, B пересечения линий касания e, g (рис. 11.5, б).

Мысленно продолжим фронтальные очерковые линии заданных цилиндров до их пересечения в точках E и F . Эти точки принадлежат линии пересечения цилиндрических поверхностей. Данные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , параллельную плоскости проекций Π_2 . Следовательно, линия пересечения цилиндров, распавшаяся (согласно теореме Монжа) на два эллипса, изображается на плоскости Π_2 двумя прямыми, проходящими через точки $A_2=B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$.

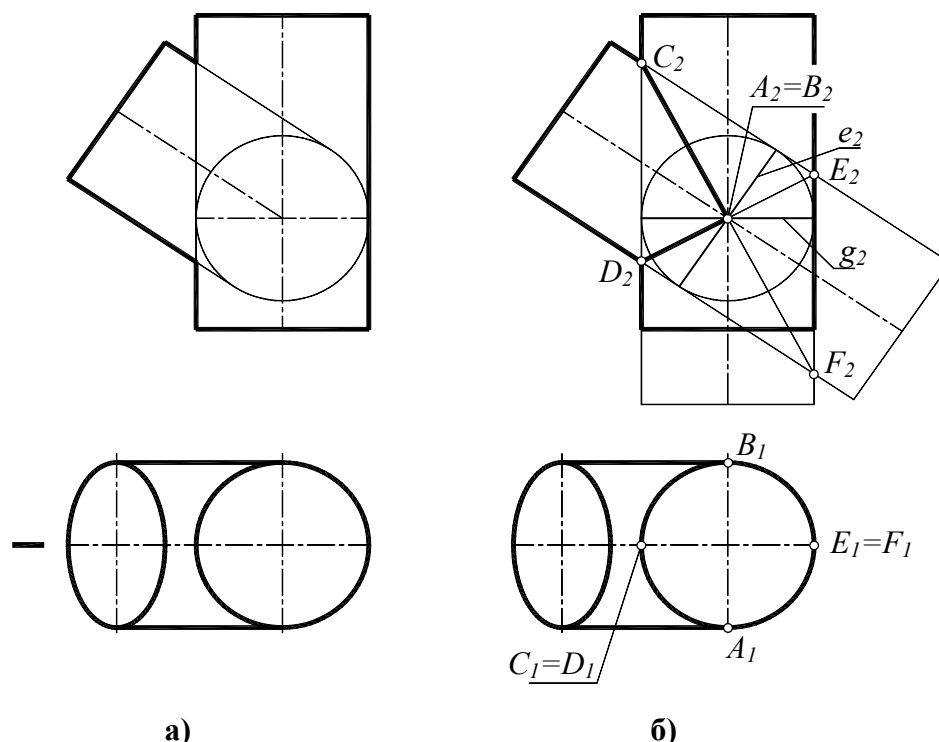


Рис. 11.5

Таким образом, “продолженные” цилиндрические поверхности пересекаются между собой по кривой четвертого порядка, распавшейся на два эллипса. Один эллипс проходит через точки A, D, C, F , другой – через точки A, B, D, E . Фронтальные проекции этих эллипсов – две прямые D_2E_2 и C_2F_2 , пересекающиеся в точке $A_2=B_2$. Если учесть, что, в соответствии с условием задачи, поверхность наклонного цилиндра не имеет продолжения, а заканчивается на поверхности вертикального цилиндра, то линия пересечения поверхностей будет образована не двумя полными эллипсами, а двумя дугами эллипсов (полуэллипсами ADB и ACB) (см. рис. 11.5, б).

Задача 11.6

Построить линию пересечения усеченных круговых конусов, описанных около одной и той же сферы Ψ (рис. 11.6, а).

Решение. Данные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , параллельную фронтальной плоскости проекций. Плоскость Φ пересекает обе поверхности по фронтальным очерковым линиям. На пересечении фронтальных очерковых линий отмечаем фронтальные проекции A_2, B_2, C_2, D_2 точек A, B, C, D , принадлежащих искомой линии пересечения конических поверхностей (рис. 11.6, б). Горизонтальные проекции точек A, B, C, D находим из условия их принадлежности плоскости Φ .

Данные конические поверхности описаны около сферы Ψ . Вертикальный конус соприкасается со сферой по окружности d , а горизонтальный конус – по окружности g . Эти окружности пересекаются между собой в точках M и N (см. рис. 11.6, б). Согласно

теореме Монжа, конические поверхности пересекаются по двум плоским кривым, плоскости которых проходят через прямую MN .

Общая плоскость симметрии Φ параллельна фронтальной плоскости проекций Π_2 . Точки M и N расположены симметрично относительно Φ , поэтому прямая MN перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, а фронтальные проекции линий пересечения конусов вырождаются в две прямые A_2C_2 и B_2D_2 , проходящие через точку $M_2=N_2$.

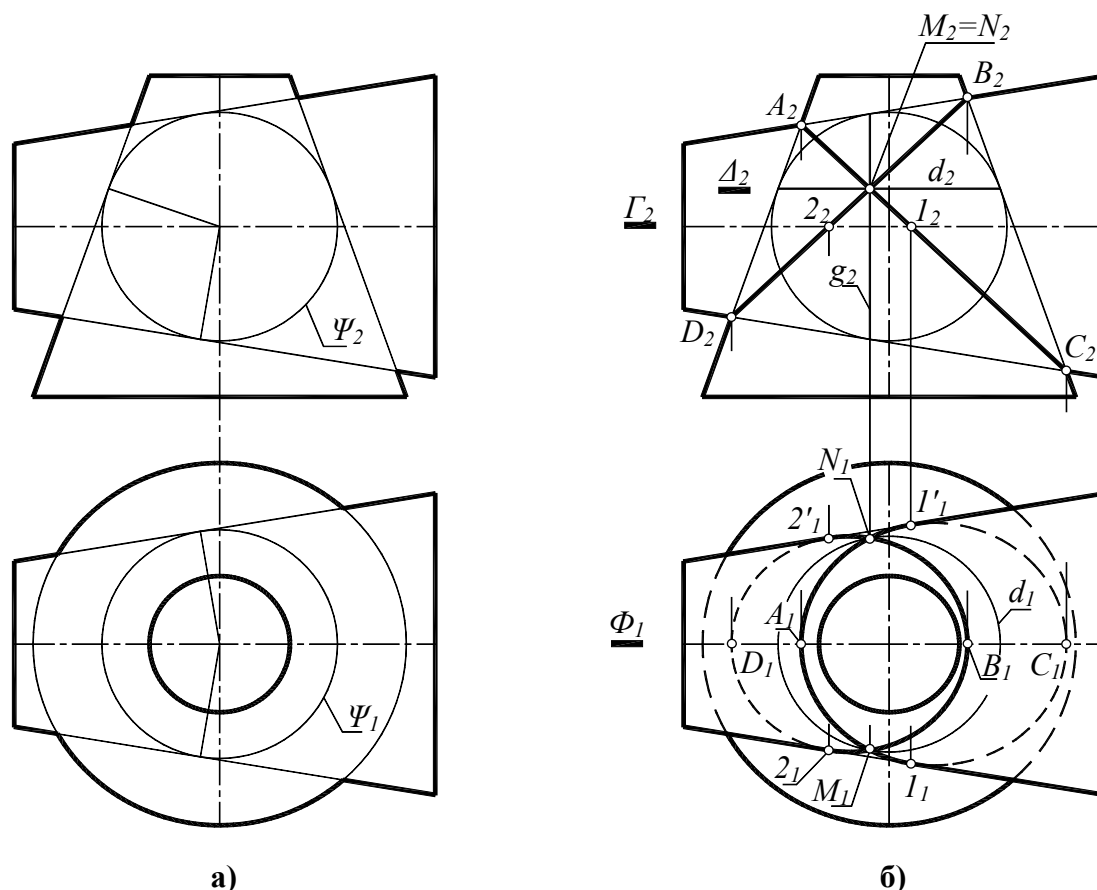


Рис. 11.6

Таким образом, линия пересечения конусов (в общем случае – пространственная алгебраическая кривая четвертого порядка) в рассматриваемом примере “распалась” на два эллипса $ACMN$ и $BDMN$ (см. рис. 11.6, б).

Построение горизонтальной проекции этих эллипсов выполняется из условия их одновременной принадлежности обоим пересекающимся поверхностям. Например, плоскость Γ пересекает горизонтальный конус по его горизонтальному очерку, на котором отмечаем горизонтальные проекции точек $I, I', 2, 2'$. Это точки смены видимости на плоскости Π_1 (*почему?*). На плоскости Π_2 проекции этих точек попарно совпадают, поэтому на рис. 11.6, б фронтальные проекции точек $I', 2'$ условно не отмечены.

Горизонтальные проекции точек M, N найдены из условия принадлежности этих точек линии d соприкосновения вертикального конуса с вписанной сферой Ψ . Линия d – окружность, лежащая в горизонтальной плоскости Δ . На горизонтальной проекции d_1 окружности d отмечаем горизонтальные проекции точек M, N . Через горизонтальные проекции точек A, C, M, N, I, I' проходит горизонтальная проекция эллипса $ACMN$. Через горизонтальные проекции точек $B, D, M, N, 2, 2'$ проходит горизонтальная проекция эллипса $BDMN$.

ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

мой m . Очевидно, этим условиям удовлетворяет точка пересечения прямой m и плоскости Σ (*почему?*). Для решения задачи на чертеже надо построить срединную плоскость Σ и найти точку C пересечения прямой m и плоскости Σ .

Заметим, что основание AB искомого треугольника располагается параллельно фронтальной плоскости проекций Π_2 (прямая AB – фронталь). Следовательно, срединная плоскость Σ перпендикулярна плоскости Π_2 (*почему?*). Фронтальная проекция Σ_2 плоскости Σ вырождается в прямую (рис. 12.2, б). На пересечении плоскости Σ и прямой m отмечаем вершину C искомого равнобедренного треугольника ABC .

Примечание. То обстоятельство, что отрезок AB занимает не общее, а частное положение, заметно упрощает графическую реализацию решения (см. рис. 12.2, б). Тем не менее, алгоритм решения (построение срединной плоскости Σ и последующий поиск точки C пересечения данной прямой m с плоскостью Σ) имеет универсальный характер и справедлив для случая, когда основание AB занимает общее положение в пространстве. Построение срединной плоскости для случая, когда отрезок AB занимает общее положение, выполнено в задаче 12.4 (см. ниже).

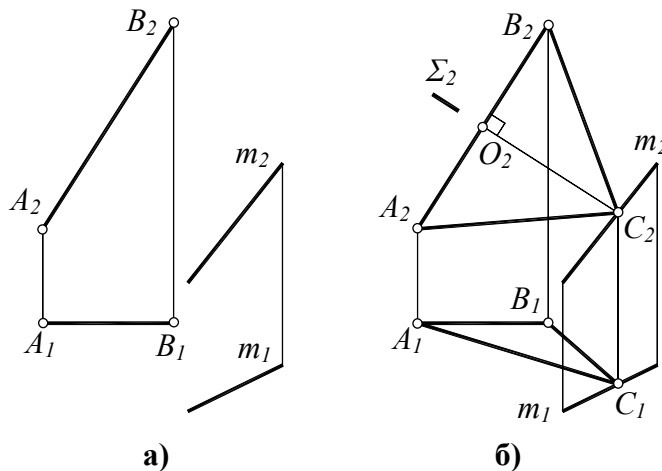


Рис. 12.2

Задача 12.3 (рис. 12.3)

Построить множество точек, удаленных от плоскости $\Sigma(ABC)$ на 30 мм.

Решение. Из какой-нибудь точки плоскости Σ (например, из точки A) построим перпендикуляр n к этой плоскости и отложим на нем (от точки A) отрезок AA' , равный 30 мм. Через точку A' проведем плоскость Σ' , параллельную данной плоскости Σ . Все точки плоскости Σ' удалены от плоскости Σ на заданное расстояние 30 мм (*почему?*).

Для того, чтобы построить перпендикуляр к плоскости Σ , начертим ее главные линии – горизонталь и фронталь (см. рис. 12.3). Проекции перпендикуляра n на чертеже определяются в соответствии с условиями теоремы 2 ($n_1 \perp h_1$ и $n_2 \perp f_2$).

Отложим вдоль перпендикуляра n от точки A отрезок AA' длиной 30 мм (*как?*). Через точку A' проведем плоскость Σ' , параллельную плоскости Σ (*как?*). На рис. 12.3 плоскость Σ' задана парой пересекающихся прямых, параллельных сторонам треугольника ABC . Задача решена.

Примечание. Задача имеет два решения. Второе решение будет получено, если заданное расстояние 30 мм отложить вдоль перпендикуляра n в другую сторону от точки A .

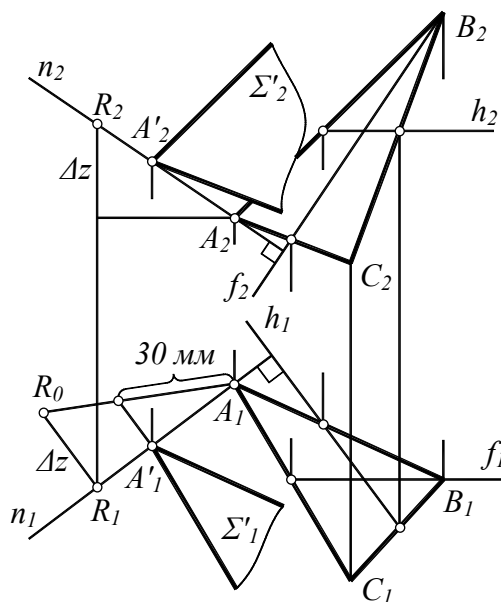


Рис. 12.3

Задача 12.4

Построить множество точек, равноудаленных от концов отрезка AB , занимающего общее положение в пространстве (рис. 12.4).

Решение. Множество точек, равноудаленных от концов отрезка AB , образует срединную плоскость Σ , перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через его середину O (см. задачу 12.2). Для построения плоскости Σ надо провести через точку O две какие-либо прямые, перпендикулярные к отрезку AB , например, горизонталь h и фронталь f . Проекции этих прямых, в соответствии с теоремой 1, должны подчиняться условиям: $h_1 \perp A_1B_1$, а $f_2 \perp A_2B_2$. На основании теоремы 2 делаем вывод, что плоскость $\Sigma(h \cap f)$, проходящая через середину O отрезка AB , перпендикулярна отрезку AB . Следовательно, плоскость Σ есть искомая срединная плоскость, содержащая все точки, равноудаленные от концов отрезка AB . Задача решена (см. рис. 12.4).

Задача 12.5 (рис. 12.5)

Построить равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и вершиной C на прямой m .

Решение. Вершина C равнобедренного треугольника ABC должна принадлежать как прямой m , так и плоскости Σ , перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину O (см. задачу 12.2). Поэтому для решения задачи следует построить срединную плоскость Σ (см. задачу 12.4) и найти точку пересечения $C = m \cap \Sigma$. Построение выполнить самостоятельно.

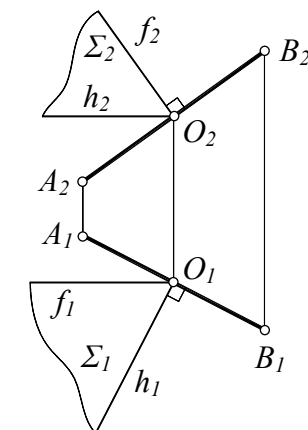


Рис. 12.4

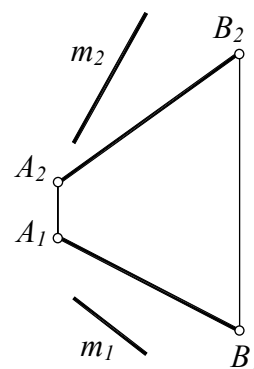


Рис. 12.5

Задача 12.6

Через прямую m провести плоскость Σ , перпендикулярную к плоскости $\Delta(ABC)$, занимающей общее положение в пространстве (рис. 12.6, а).

Решение. Напомним признак перпендикулярности двух плоскостей: если плоскость Σ проходит через перпендикуляр к плоскости Δ , то плоскости Σ и Δ взаимно перпендикулярны [1, п. 4.1]. Проведем в плоскости $\Delta(ABC)$ горизонталь и фронталь. Из

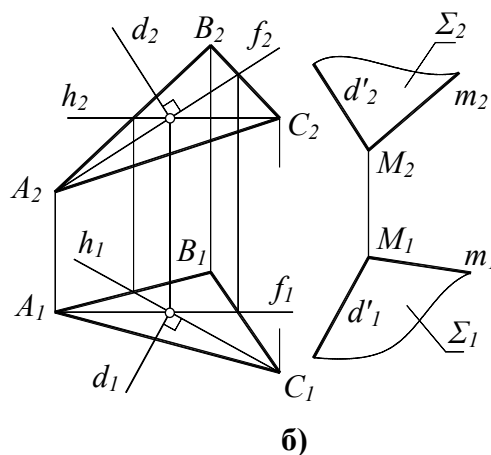
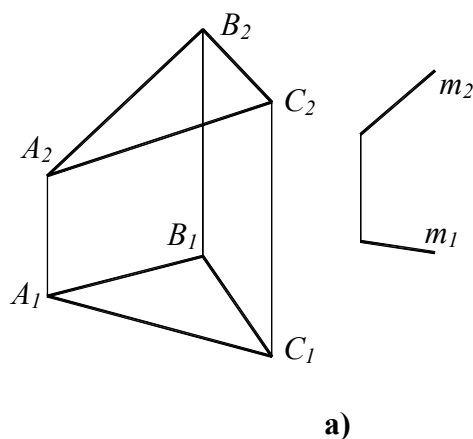


Рис. 12.6

произвольной точки плоскости ABC , например, из точки пересечения горизонтали и фронтали, проведем перпендикуляр d к плоскости ABC (рис. 12.6, б)). Через произволь-

но взятую точку M на прямой m проведем прямую d' , параллельную прямой d . Получаем плоскость $\Sigma(m \cap d')$. Эта плоскость является искомой (см. рис. 12.6, б).

Проверка. Прямая d перпендикулярна плоскости ABC . Прямая d' параллельна прямой d , следовательно, прямая d' перпендикулярна плоскости ABC . Плоскость Σ проходит через перпендикуляр d' к плоскости ABC , следовательно, плоскость Σ перпендикулярна плоскости ABC . Вместе с тем плоскость Σ проходит через прямую m , то есть плоскость Σ удовлетворяет всем условиям задачи. Задача решена верно.

Задача 12.7

Опустить перпендикуляр из точки M на прямую m общего положения (рис. 12.7).

Решение. Через точку M проведем плоскость Σ , перпендикулярную прямой m . Зададим эту плоскость горизонталью и фронталью так, чтобы на чертеже выполнялись условия теоремы 2: $h_1 \perp m_1$ и $f_2 \perp m_2$. Все прямые в плоскости Σ перпендикулярны прямой m .

Найдем точку K пересечения прямой m с плоскостью Σ . Для построения точки K следует применить схему решения первой позиционной задачи: провести через m вспомогательную секущую плоскость Δ , построить линию разреза $1-2$ и отметить искомую точку $K = m \cap (1-2)$. Отрезок MK – искомый перпендикуляр.

Проверка. Прямая MK лежит в плоскости Σ , перпендикулярной прямой m . Следовательно, прямая MK перпендикулярна прямой m . При этом прямая MK пересекает прямую m . Поэтому отрезок MK есть искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую m . Задача решена верно.

Задача 12.8

Найти расстояние от точки M до прямой m .

Решение. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую m . Поэтому сначала надо опустить перпендикуляр MK на прямую m (см. задачу 12.7), а затем определить истинную длину отрезка MK способом прямоугольного треугольника [1, п. 2.2.2]. Построение выполнить самостоятельно.

Задача 12.9

Построить ортогональную проекцию точки M на плоскость Σ общего положения (рис. 12.8).

Решение. Ортогональной проекцией M' точки M на плоскость Σ называют точку пересечения проецирующего луча, проходящего через точку M и перпендикулярного плоскости Σ . Поэтому для построения ортогональной проекции надо через точку M провести проецирующий луч m , перпендикулярный плоскости Σ . Точка пересечения M' этого луча с плоскостью Σ – ортогональная проекция точки M на плоскость Σ .

Чтобы начертить прямую m , перпендикулярную плоскости Σ , следует выполнить условия теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$, где h и f – главные линии плоскости Σ (теорема 2). После построения перпендикуляра m находим точку M' пересечения прямой m с плоскостью Σ , используя вспомогательную секущую плоскость Δ (см. схему решения первой позиционной задачи). Точка M' – искомая ор-

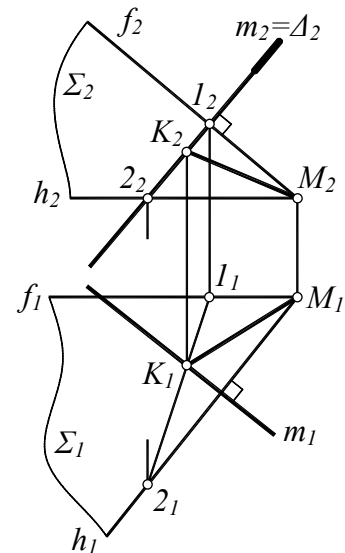


Рис. 12.7

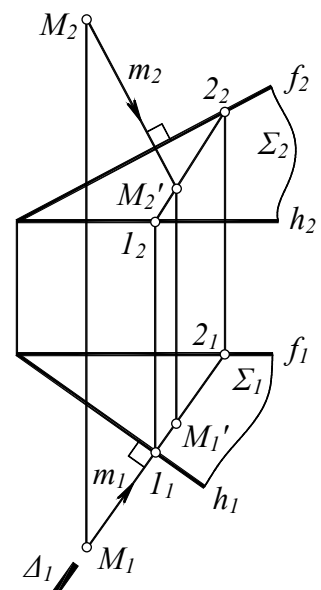


Рис. 12.8

тогональная проекция точки M на плоскость общего положения Σ .

Проверка. Проецирующий луч m , перпендикулярный плоскости общего положения Σ , пересекается с плоскостью Σ в точке M' . Следовательно, точка M' – ортогональная проекция точки M на плоскость Σ . Задача решена правильно.

Задача 12.10

Построить ортогональную проекцию отрезка AB на плоскость Ψ , заданную параллельными прямыми $a||b$ (рис. 12.9, а).

Решение. Очевидно, для решения задачи следует построить ортогональные проекции A' , B' точек A , B на плоскость $\Psi(a||b)$. Отрезок $A'B'$ есть искомая проекция отрезка AB на плоскость Ψ . Заметим, что проекция $A'B'$ обязательно пройдет через точку O пересечения отрезка AB с плоскостью Ψ (**почему?**). В соответствии с алгоритмом решения первой позиционной задачи, для построения точки O проводим через AB вспомогательную плоскость T , пересекающую плоскость Ψ по прямой t , и отмечаем точку O на пересечении отрезка AB и прямой t (рис. 12.9, б).

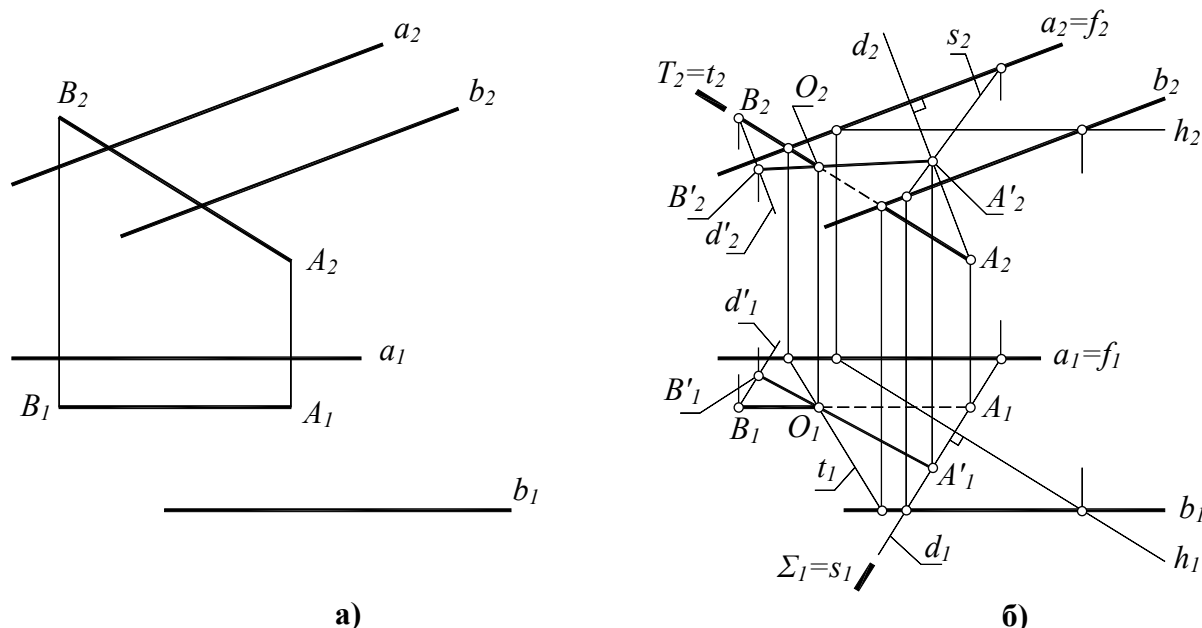


Рис. 12.9

Через точки A , B проведем проецирующие лучи d , d' , перпендикулярные плоскости Ψ (**как?**). Найдем точку A' пересечения луча d с плоскостью Ψ . В соответствии с алгоритмом решения первой позиционной задачи, проводим через прямую d вспомогательную плоскость Σ , пересекающую плоскость Ψ по прямой s . На пересечении луча d и прямой s отмечаем точку A' .

Ортогональная проекция $A'B'$ должна пройти через точку O , поэтому находить проекцию B' точки B (по схеме решения первой позиционной задачи) не обязательно. Для полного решения задачи достаточно продлить отрезок $A'O$ до его пересечения (в точке B') с проецирующим лучом d' (см. рис. 12.9, б).

Примечание. Графическая реализация решения задачи несколько упрощается тем обстоятельством, что параллельные прямые a и b , определяющие плоскость Ψ , параллельны плоскости Π_2 (a , b – фронтолы). Поэтому для построения проецирующих лучей $d||d'$, перпендикулярных плоскости Ψ , достаточно построить произвольную горизонталь h , лежащую в плоскости Ψ . Затем следует применить теорему 2 (о перпендикулярности прямой и плоскости), в соответствии с которой проекции луча d подчиняются условиям $d_1 \perp h_1$ и $d_2 \perp f_2$, где $f_2 \equiv a_2$ (рис. 12.9, б).

Задача 12.11

Построить ортогональную проекцию треугольника ABC на плоскость параллелограмма $KLMN$ (рис. 12.10, а).

Решение. Для решения задачи следует построить ортогональные проекции A' , B' , C' точек A , B , C на плоскость параллелограмма. Треугольник $A'B'C'$, лежащий в плоскости параллелограмма, есть искомая ортогональная проекция (рис. 12.10, б).

Чтобы найти искомую проекцию одной из вершин треугольника, например, проекцию C' вершины C , надо провести через точку C перпендикуляр d к плоскости параллелограмма и найти точку C' как точку пересечения перпендикуляра d с плоскостью параллелограмма (по схеме решения первой позиционной задачи). Вспомогательные построения, необходимые для поиска точки C' , на рис. 12.10, б условно не показаны.

Заметим, что ортогональные проекции $A'C'$ и $A'B'$ сторон AC и AB обязательно должны проходить через точки 1 и 2 пересечения этих сторон с плоскостью параллелограмма. Для построения точек 1 , 2 следует найти линию DE пересечения треугольника и параллелограмма, затем продолжить эту линию до пересечения со сторонами AB и AC треугольника ABC (вспомогательные построения, необходимые для поиска линии DE , на рис. 12.10, б условно не показаны).

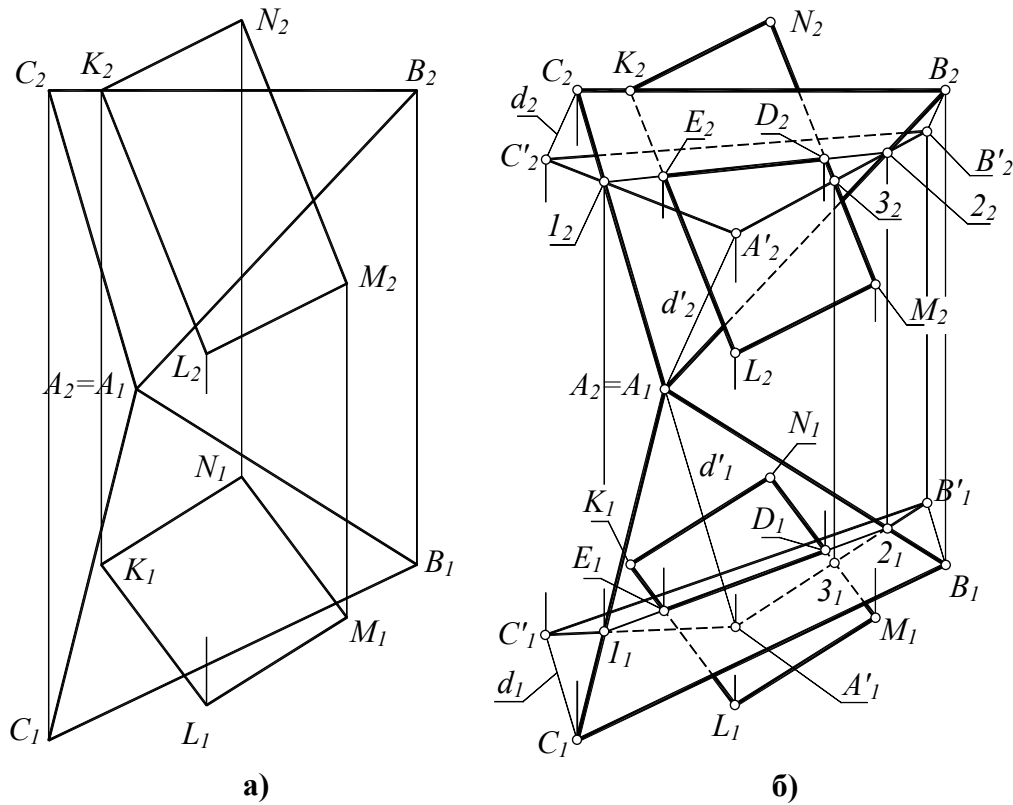


Рис. 12.10

Таким образом, для построения ортогональной проекции треугольника на плоскость параллелограмма вполне достаточно найти ортогональную проекцию какой-либо одной вершины треугольника (например, проекцию C' вершины C). Для построения ортогональных проекций A' , B' вершин A и B следует использовать точки 1 и 2 . Например, чтобы найти точку A' , надо соединить прямой линией точки C' и 1 , затем продолжить прямую $C'-1$ до пересечения в точке A' с прямой d' . Здесь d' – перпендикуляр к плоскости параллелограмма, проведенный через точку A . Очевидно, прямые d и d' па-

параллельны (*почему?*). Точка B' отмечается аналогично: на пересечении прямой $A'-2$ с перпендикуляром к плоскости параллелограмма, проведенным через точку B .

Проверка. Ортогональная проекция $A'B'C'$ треугольника ABC должна принадлежать плоскости параллелограмма, следовательно, прямые $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ должны пересекаться со сторонами параллелограмма. Например, сторона MN параллелограмма пересекается с прямой $A'B'$ в точке 3 (см. рис. 12.10, б). Задача решена верно.

Задача 12.12

Определить расстояние между параллельными прямыми a и b (рис. 12.11).

Решение. Отметим на одной из параллельных прямых (например, на прямой a) произвольную точку A . Из точки A опустим перпендикуляр AB на прямую b (см. задачу 12.7). Расстояние между параллельными прямыми равно длине отрезка AB . Составим схему решения задачи.

Действие 1. Опускаем перпендикуляр AB из точки A на прямую b . Для этого проводим через точку A плоскость Θ , перпендикулярную прямым a и b (теорема 2). Затем с помощью проведенной через b вспомогательной секущей плоскости Σ находим точку B пересечения прямой b с плоскостью Θ (первая позиционная задача).

Действие 2. Способом прямоугольного треугольника (см. п. 2.2.2) определяем истинную длину отрезка AB . Задача решена.

Примечание. Поставленная задача может быть решена способом замены плоскостей проекций (см. задачу 5.7 темы 5).

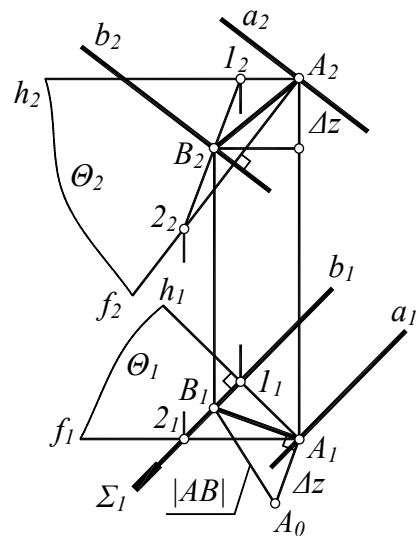


Рис. 12.11

Тема 13

КОМПЛЕКСНЫЕ (КОМБИНИРОВАННЫЕ) ЗАДАЧИ

Многие геометрические задачи сводятся к построению фигур (точек, линий, поверхностей), удовлетворяющих определенным позиционным или метрическим условиям. Каждому условию соответствует некоторое множество элементов (точек, линий), которое называют *геометрическим местом* этих элементов. Например, сфера – геометрическое место точек, удаленных от данной точки (центра сферы) на расстояние, равное радиусу сферы. Поверхность кругового цилиндра – геометрическое место точек, удаленных от прямой линии (оси цилиндра) на расстояние, равное радиусу цилиндра.

Задача, в которой на искомый элемент наложены два или более условий, называется комплексной (комбинированной) задачей, поскольку на искомый элемент в этой задаче наложен комплекс условий (два или более).

Для успешного решения комплексных задач на двухпроекционном чертеже необходимо овладеть навыками решения типовых геометрических задач:

- построение недостающей проекции точки или линии, лежащей на поверхности;
- построение точки пересечения прямой линии и поверхности (1 позиционная задача);
- построение линии пересечения двух поверхностей (2 позиционная задача);
- построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей;
- определение длины отрезка прямой общего положения;
- преобразование фигуры общего положения в фигуру частного положения способом замены плоскостей проекций.

Задача 13.1

Через точку A провести прямую l , параллельную плоскостям $\Sigma(m \cap n)$ и $\Delta(c \cap d)$.

Решение. Напомним признак параллельности прямой и плоскости: прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.

Анализ

1. Множество прямых l , проходящих через точку A параллельно плоскости Σ , образует плоскость Σ' , параллельную плоскости Σ : $\{l: (A \in l \parallel \Sigma)\} = \Sigma'$.

2. Множество прямых l , проходящих через точку A и параллельных плоскости Δ , образует плоскость Δ' , параллельную плоскости Δ : $\{l: (A \in l \parallel \Delta)\} = \Delta'$.

3. Искомая прямая l : $l = \Sigma' \cap \Delta'$.

Исследование

Искомая прямая l является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку A проводим плоскость Σ' , параллельную Σ : $A \in \Sigma' \parallel \Sigma$.

2. Через A проводим плоскость Δ' , параллельную Δ : $A \in \Delta' \parallel \Delta$.

3. Искомая прямая: $l = \Sigma' \cap \Delta'$.

Графическая реализация (рис. 13.1)

Для решения задачи надо через точку A провести плоскости Σ' и Δ' , параллельные плоскостям Σ и Δ , затем построить линию l пересечения плоскостей Σ' и Δ' .

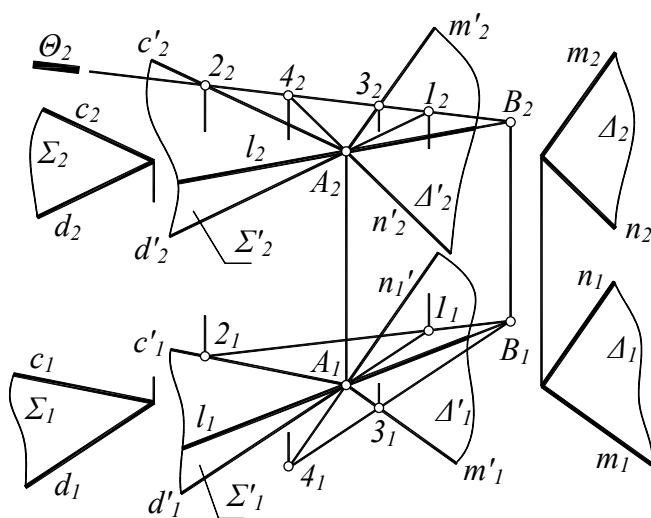


Рис. 13.1

Точка A – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (см. рис. 13.1). Прямая $l=AB$ – искомая.

Задача 13.2

Через точку M провести прямую t , перпендикулярную прямой m и пересекающую прямую m (рис. 13.2).

Решение. Поставленная задача может быть кратко сформулирована следующим образом: опустить перпендикуляр t из точки M на прямую m .

Анализ

Искомая прямая t должна удовлетворять двум условиям.

1. Прямая t должна проходить через точку M и быть перпендикулярна к прямой m . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Σ , проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой m :

$$\{t: (M \in t \perp m)\} = \Sigma.$$

2. Искомая прямая t должна проходить через точку M и пересекать прямую m . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ , проходящую через точку M и прямую m :

$$\{t: (M \in t \cap m)\} = \Delta.$$

Таким образом, искомая прямая t должна одновременно находиться в плоскости Σ (первое условие) и в плоскости Δ (второе условие). Следовательно, прямая t есть линия пересечения плоскостей Σ и Δ : $t = \Sigma \cap \Delta$.

Исследование

Искомая прямая – результат пересечения двух плоскостей. Плоскости общего положения пересекаются по прямой. В общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Σ . Через точку M проводим плоскость Σ , перпендикулярную к данной прямой m . Зададим плоскость Σ горизонталью и фронталью таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости: $M \in \Sigma(h \cap f) \perp m$.

2. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой M и прямой m :

$$\Delta(m, M) - \text{задана}.$$

3. Построение искомой прямой: $t = \Sigma \cap \Delta$.

Графическая реализация (рис. 13.2)

Через точку M проведена плоскость $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярная к прямой m . Точка M – общая точка плоскостей Σ и Δ , поэтому для построения линии t их пересечения достаточно найти еще одну общую точку этих плоскостей. Например, на рис. 13.2 найдена точка K пересечения прямой m с плоскостью Σ (по схеме решения первой позиционной задачи). Точка K – общая точка плоскостей Σ и Δ , поэтому прямая $t = MK$ – искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую m . Задача решена.

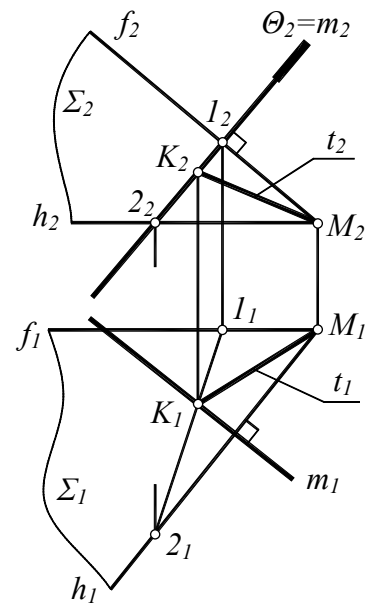


Рис. 13.2

Задача 13.3

На прямой BC найти точки, удаленные от точки A на 20 мм (рис. 13.3)

Решение. Множество точек, удаленных от данной точки A на заданное расстояние 20 мм, образует сферу Φ радиусом 20 мм, с центром в точке A .

Анализ

Искомая точка D должна удовлетворять двум условиям.

1. Расстояние AD должно составлять 20 мм. Этому условию удовлетворяют все точки на сфере Φ : $\{D: (|AD|=20 \text{ мм})\} = \Phi(A, R20)$.

2. Точка D принадлежит прямой BC . Этому условию удовлетворяют все точки прямой BC : $\{D: (D \in BC)\} = BC$.

3. Искомая точка D находится на пересечении сферы Φ и прямой BC : $D = \Phi \cap BC$.

Исследование

Искомая точка – результат пересечения прямой линии со сферой. Прямая линия пересекается со сферой в двух точках (действительных, совпавших или мнимых). Поэтому задача может иметь два решения (если прямая BC пересекает сферу), одно решение (если прямая BC касается сферы) или не имеет решения (если прямая BC не пересекает сферу).

Алгоритм

1. Чертим сферу $\Phi(A, R20)$.
2. Находим точки D, E пересечения сферы Φ с прямой BC (два решения).

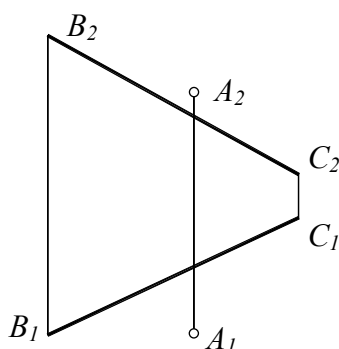


Рис. 13.3

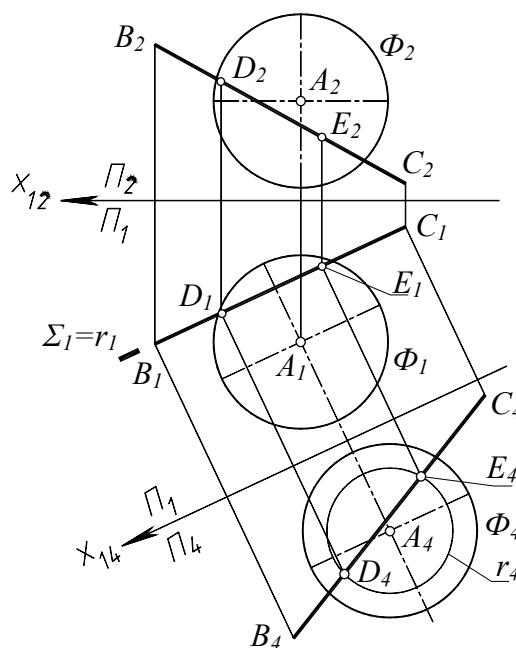


Рис. 13.4

Графическая реализация (рис. 13.4)

Чтобы найти точки пересечения прямой BC со сферой Φ , преобразуем чертеж. В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая BC занимает положение прямой уровня (рис. 13.4). Через прямую BC проводим вспомогательную секущую плоскость Σ , чертим окружность $r = \Phi \cap \Sigma$, отмечаем искомые точки D, E на пересечении прямой BC с окружностью r .

Задача 13.4

На прямой b найти точки, удаленные от прямой a на 20 мм (рис. 13.5).

Решение. Множество точек, удаленных от прямой a на расстояние 20 мм, образует поверхность ρ кругового цилиндра с осью a и радиусом 20 мм. Поэтому для решения задачи надо найти точки пересечения прямой b с цилиндрической поверхностью ρ .

Анализ

Искомая точка D должна удовлетворять двум условиям.

1. Расстояние $|D-a|$ должно составлять 20 мм. Этому условию удовлетворяют все точки на поверхности кругового цилиндра ρ : $\{D: (|D-a|=20 \text{ мм})\} = \rho(a, R20)$.

2. Точка D должна принадлежать прямой b . Этому условию удовлетворяют все точки прямой b : $\{D: (D \in b)\} = b$.

3. Искомая точка: $D = b \cap \rho$.

Исследование

Искомая точка – результат пересечения прямой линии с поверхностью кругового цилиндра ρ . Прямая линия пересекается с цилиндрической поверхностью в двух точках (действительных, совпавших или мнимых). Поэтому задача может иметь два решения (если прямая b пересекает поверхность ρ), одно решение (если прямая b касается поверхности ρ) или не имеет решения (если прямая b не пересекает ρ).

Алгоритм

1. Чертим цилиндрическую поверхность вращения ρ с осью a , радиусом $R20$.
2. Находим точки D, E пересечения поверхности ρ с прямой b .

Графическая реализация (рис. 13.6)

Чтобы найти точки пересечения прямой MN с цилиндрической поверхностью ρ , преобразуем чертеж. В системе координат Π_1/Π_4 прямая AB занимает положение прямой уровня (рис. 13.6). Выполняем еще одну замену системы координат: $\Pi_1/\Pi_4 \rightarrow \Pi_4/\Pi_5$, где плоскость проекций Π_5 перпендикулярна прямой $a=AB$. В системе координат Π_4/Π_5 прямая a занимает проецирующее положение.

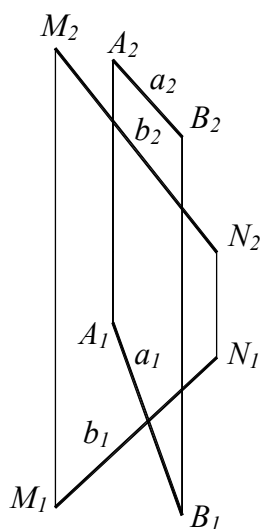


Рис. 13.5

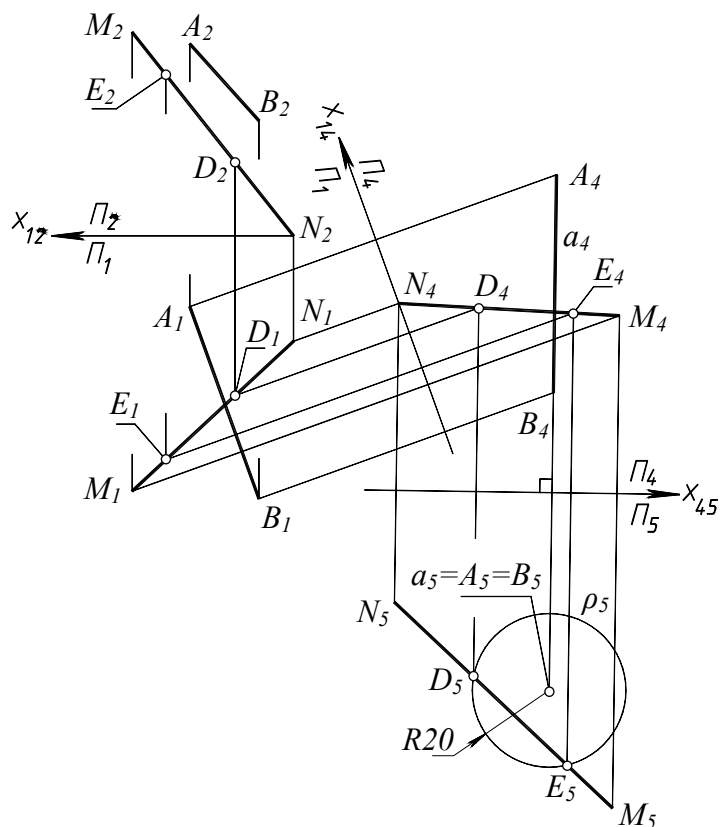


Рис. 13.6

Цилиндрическая поверхность ρ с осью a изображается на плоскости Π_5 окружностью $R20$ (см. рис. 13.6). Отмечаем точки D_5, E_5 пересечения проекции N_5M_5 прямой $b=MN$ с проекцией ρ_5 цилиндра ρ . С помощью линий связи находим проекции точек D, E в исходной системе координат Π_2/Π_1 .

Проверка. Точки D, E находятся на цилиндрической поверхности ρ с осью $a=AB$ и радиусом 20 мм. Следовательно, эти точки удалены от прямой a на 20 мм. Вместе с тем точки D, E принадлежат прямой $b=MN$. Оба условия выполнены. Задача решена верно.

Задача 13.5

Построить ромб $KLMN$ по заданной диагонали KM и горизонтальной проекции L_1 вершины L (рис. 13.7).

Решение. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O , делящей обе диагонали пополам. Поэтому неизвестная диагональ LN должна располагаться в плоскости Σ , перпендикулярной к заданной диагонали KM и проходящей через середину O этой диагонали.

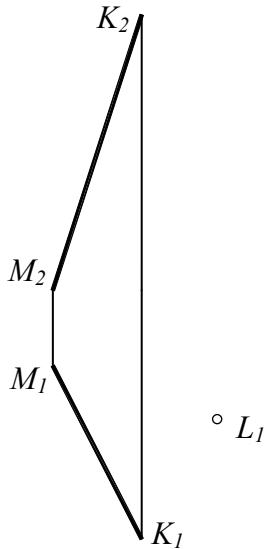


Рис. 13.7

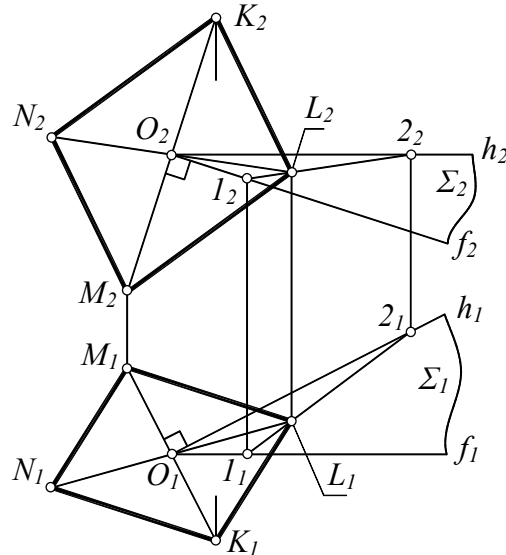


Рис. 13.8

Зададим плоскость Σ горизонталью и фронталью, перпендикулярными к отрезку KM и проходящими через его середину O (рис. 13.8). Вершина ромба L должна располагаться в плоскости Σ . Находим недостающую фронтальную проекцию L_2 точки L из условия принадлежности точки L плоскости Σ . На рис. 13.8 показана вспомогательная прямая $I-2$, лежащая в плоскости Σ и проходящая через L . Вершина N ромба определяется из условия $OL=ON$.

Проверка. Плоскость $\Sigma(h \cap f)$ перпендикулярна диагонали KM , так как на ортогональном чертеже (см. рис. 13.8) выполнены оба условия теоремы о перпендикулярности прямой KM и плоскости $\Sigma(h \cap f)$: $h_1 \perp K_1M_1$; $f_2 \perp K_2M_2$. Точка L лежит в плоскости Σ , так как L принадлежит прямой $I-2$, лежащей в Σ . Следовательно, отрезок OL и вся диагональ NL перпендикулярна заданной диагонали KM . Точка O делит пополам обе диагонали. Таким образом, диагонали KM и NL взаимно перпендикулярны и делятся пополам в точке O , поэтому фигура $KLMN$ – ромб. Задача решена верно.

Задача 13.6

Через точку M провести прямую l , параллельную плоскости $\Delta(a \cap b)$ и пересекающую прямую m (рис. 13.9).

Анализ

Искомая прямая l должна удовлетворять двум условиям.

1. Множество прямых l , проходящих через точку M и параллельных плоскости Δ ,

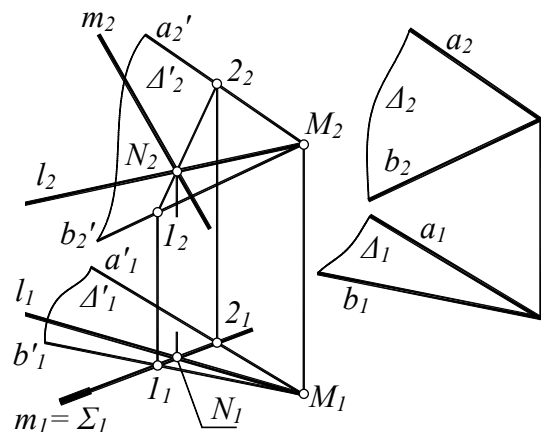


Рис. 13.9

образует плоскость Δ' , параллельную Δ : $\{l: (M \in l \parallel \Delta)\} = \Delta'$.

2. Множество прямых l , проходящих через точку M и пересекающих прямую m , образует плоскость $\Theta(M, m)$: $\{l: (M \in l \cap m)\} = \Theta$.

Искомая прямая определяется как пересечение выявленных множеств: $l = \Delta' \cap \Theta$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения плоскостей Θ и Δ' . Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку M проводим плоскость Δ' , параллельную Δ : $M \in \Delta' \parallel \Delta$.
2. Плоскость $\Theta(M, m)$ – задана.
3. Искомая прямая: $l = \Delta' \cap \Theta$.

Графическая реализация (рис. 13.9)

Плоскость Δ' , проходящая через M и параллельная плоскости Δ , задана прямыми a' и b' , параллельными прямым a и b . Определяем линию пересечения плоскостей Δ' и Θ . Точка M – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка N) найдена по схеме решения первой позиционной задачи как точка пересечения прямой m с плоскостью Δ' (с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ , см. рис. 13.9). Прямая $l = MN$ – искомая.

Задача 13.7

Через точку A провести прямую l , параллельную плоскости $\Gamma(m \cap n)$ и перпендикулярную прямой a (рис. 13.10).

Анализ

На искомую прямую l наложены два условия.

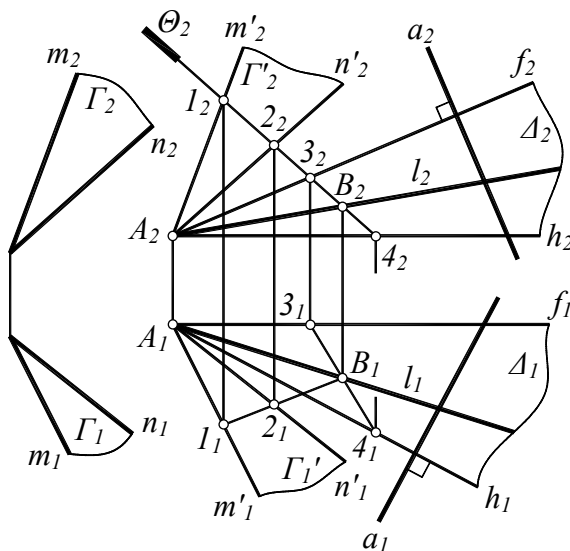


Рис. 13.10

1. Прямая l должна проходить через точку A параллельно плоскости $\Gamma(m \cap n)$. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Γ' , проходящую через точку A и параллельную плоскости Γ : $\{l: (A \in l \parallel \Gamma)\} = \Gamma'$.

2. Прямая l должна проходить через точку A и располагаться перпендикулярно к данной прямой a . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ , проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a :

$$\{l: (A \in l \perp a)\} = \Delta.$$

Искомая прямая находится на пересечении выявленных множеств:

$$l = \Gamma' \cap \Delta.$$

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку A проводим плоскость Γ' , параллельную Γ : $A \in \Gamma' \parallel \Gamma$.
2. Через точку A проводим плоскость Δ , перпендикулярную a : $A \in \Delta \perp a$.
3. Искомая прямая: $l = \Gamma' \cap \Delta$.

Графическая реализация (рис. 13.10)

Проведем через точку A плоскость Γ' , параллельную плоскости Γ , задав ее прямыми m', n' , параллельными прямым m, n . Проведем через A еще одну плоскость Δ , перпендикулярную к прямой a , задав ее горизонталью и фронталью в соответствии с условием теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости. Точка A – общая точка плоскостей Γ' и Δ . Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (по схеме решения второй позиционной задачи). Прямая $l=AB$ – искомая. Задача решена.

Задача 13.8

Через точку A провести прямую l , наклоненную к плоскости Π_1 под углом 60° и параллельную плоскости $\Gamma(m \cap n)$ (рис. 13.11).

Решение. Множество прямых, проходящих через точку A и наклоненных к плоскости Π_1 под углом 60° , образует коническую поверхность вращения Θ с углом при вершине 60° . Все образующие этой поверхности наклонены к плоскости Π_1 под углом 60° . Все прямые, проходящие через точку A и параллельные плоскости $\Gamma(m \cap n)$, образуют плоскость Γ' , параллельную плоскости Γ .

Анализ

На искомую прямую l наложены два условия.

1. Прямая l должна проходить через точку A под углом 60° к плоскости Π_1 . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует коническую поверхность вращения Θ с углом при вершине A , равным 60° : $\{l: (A \in l, \angle A = 60^\circ)\} = \Theta$.

2. Прямая l должна проходить через точку A параллельно плоскости $\Gamma(m \cap n)$. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Γ' , параллельную плоскости Γ : $\{l: (A \in l \parallel \Gamma)\} = \Gamma'$.

Искомая прямая l находится на пересечении выявленных множеств: $l = \Gamma' \cap \Theta$.

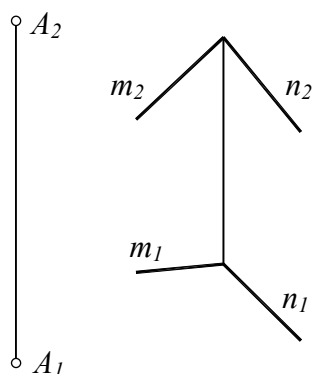


Рис. 13.11

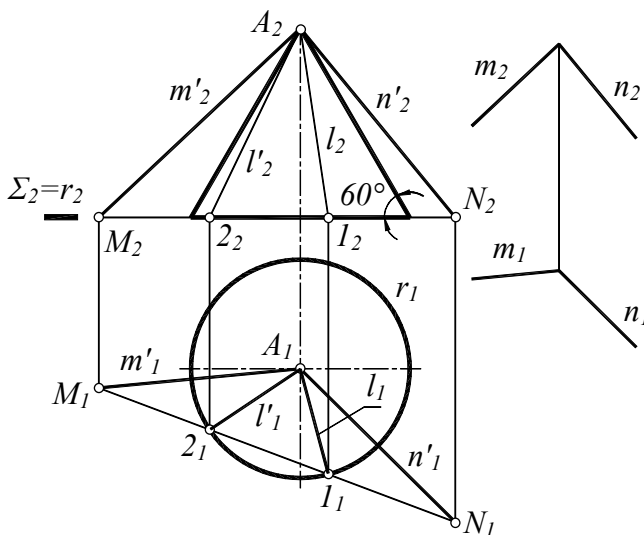


Рис. 13.12

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения конической поверхности плоскостью Γ' , проходящей через вершину конуса. При этом в пересечении могут получаться либо две прямые (если угол наклона секущей плоскости к плоскости Π_1 больше 60°), либо одна прямая, если плоскость Γ' касается поверхности конуса (угол наклона плос-

кости Γ' к плоскости Π_1 равен 60°). Если угол наклона секущей плоскости к плоскости Π_1 меньше 60° , то задача не имеет решения.

Алгоритм

1. Через точку A как через вершину проводим коническую поверхность вращения Θ с вертикальной осью и углом при вершине 60° . плоскость Γ' , параллельную Γ .
2. Через точку A проводим плоскость Γ' , параллельную плоскости $\Gamma(m \cap n)$.
3. Искомая прямая: $l = \Gamma' \cap \Theta$.

Графическая реализация (рис. 13.12)

Проведем через точку A плоскость Γ' , параллельную плоскости Γ , задав ее прямыми m', n' , параллельными прямым m, n . Начертим круговой конус Θ с вершиной A и вертикальной осью вращения. Проведем произвольную горизонтальную секущую плоскость Σ , которая пересечет коническую поверхность Θ по окружности r . Отметим точки M, N пересечения прямых m', n' с плоскостью Σ . Прямая MN пересекает основание конуса r в точках 1 и 2, через которые проходят искомые прямые $l = A-1$ и $l' = A-2$ (см. рис. 13.12).

Проверка. Прямые l и l' проходят через вершину A конической поверхности вращения Θ и через точки 1, 2 на окружности r , лежащей на этой поверхности. Следовательно, прямые l и l' – образующие поверхности Θ . Все образующие конической поверхности Θ наклонены к плоскости Π_1 под углом 60° , следовательно, прямые l и l' также наклонены к плоскости Π_1 под углом 60° . С другой стороны, прямые l и l' лежат в плоскости Γ' , параллельной плоскости Γ , поэтому прямые l, l' параллельны плоскости Γ . Оба условия задачи выполнены. Задача решена верно.

Тема 14

РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Поверхности, которые путем изгибания можно совместить с плоскостью без складок и разрывов, называются *развертывающимися*. Фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется *разверткой* данной поверхности [1, лекция 13].

Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и торсовые поверхности (в частности, цилиндрические и конические поверхности). Все остальные поверхности являются *не развертывающимися*.

Развертку поверхности в начертательной геометрии строят графическими способами на основе чертежа. Для многогранной поверхности можно построить ее *точную* развертку путем определения истинной длины всех ребер. Для произвольной развертываемой криволинейной поверхности строят *приближенную* развертку, которая заключается в построении развертки многогранной поверхности, вписанной или описанной вокруг заданной кривой поверхности. Для не развертываемых поверхностей строят так называемые *условные* развертки.

Задача 14.1

Построить развертку усеченной призмы (рис. 14.1).

Решение. Прямая призма усечена наклонной плоскостью Σ (см. рис. 14.1). Получена многогранная поверхность, ограниченная семью гранями.

Грань 1. Нижняя горизонтальная грань – основание $ABCD$.

Грань 2. Верхняя горизонтальная грань – небольшой треугольник $34E$.

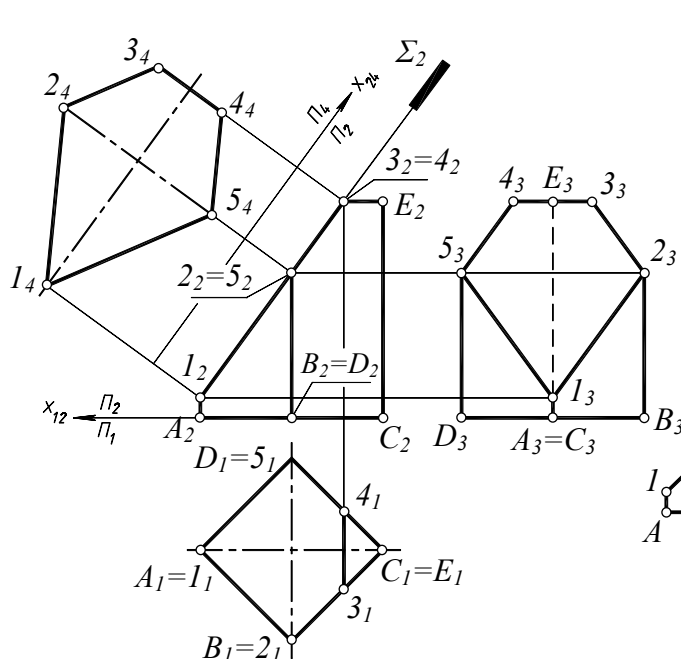


Рис. 14.1

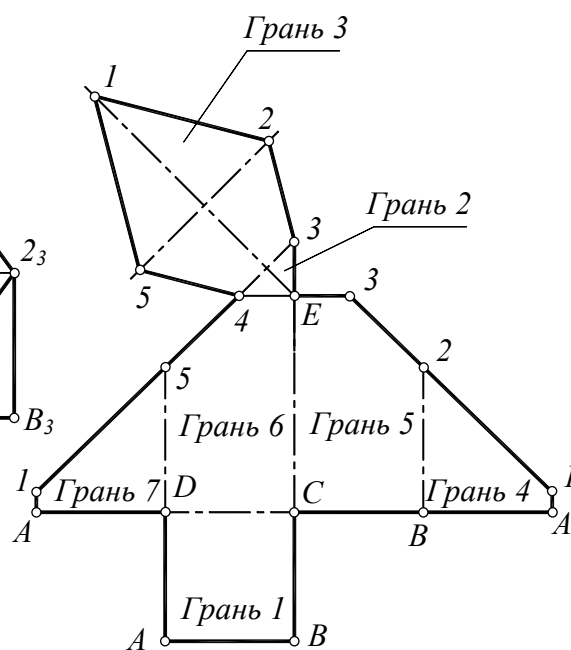


Рис. 14.2

Грань 3. Наклонная грань – пятиугольник 12345 , лежащий в плоскости Σ .

Грани 4...7. Четыре вертикальные грани, ограниченные многоугольниками $A12B$, $B23EC$, $CE45D$, $D51A$.

Чтобы построить развертку, надо найти истинную форму всех семи граней. Истинная форма нижней $ABCD$ и верхней $34E$ горизонтальных граней изображена на чертеже рис. 14.1 без искажения (на горизонтальной плоскости проекций).

Для определения истинной формы наклонной грани 12345 , лежащей в плоскости Σ , выполнена замена плоскостей проекций. На новой плоскости Π_4 , расположенной параллельно плоскости Σ , получена истинная форма $1_42_43_44_45_4$ этой грани.

Истинная форма вертикальных граней $4\dots7$ на чертеже рис. 14.1 не показана, но известны длины всех ребер этих граней. Известно также, что углы при вершинах A, B, C, D – прямые, что позволяет определить истинную форму граней $4\dots7$.

Для построения развертки вычерчиваем на листе бумаги истинную форму всех семи граней, совмещая смежные ребра (рис. 14.2).

Проверка. Чтобы из развертки получить объемный макет многогранника, надо вырезать развертку из листа бумаги и согнуть ее. Линии сгиба – ребра многогранника. Если развертка построена верно, то после сгибания одноименные точки развертки совпадают и становятся вершинами многогранника. Например, точка 1, трижды отмеченная на развертке (на гранях 3, 4, 7), после сгибания становится одной из вершин усеченной призмы. Напомним известную формулу Эйлера: $\Gamma + B - P = 2$, где Γ – число граней, B – число вершин, P – число ребер многогранника [1, п. 6.2.1]. Рассматриваемая усеченная призма содержит 7 граней, 10 вершин и 15 ребер (посчитать самостоятельно). Формула Эйлера выполнена.

Задача 14.2

Построить развертку правильной треугольной призмы с вырезом (рис. 14.3).

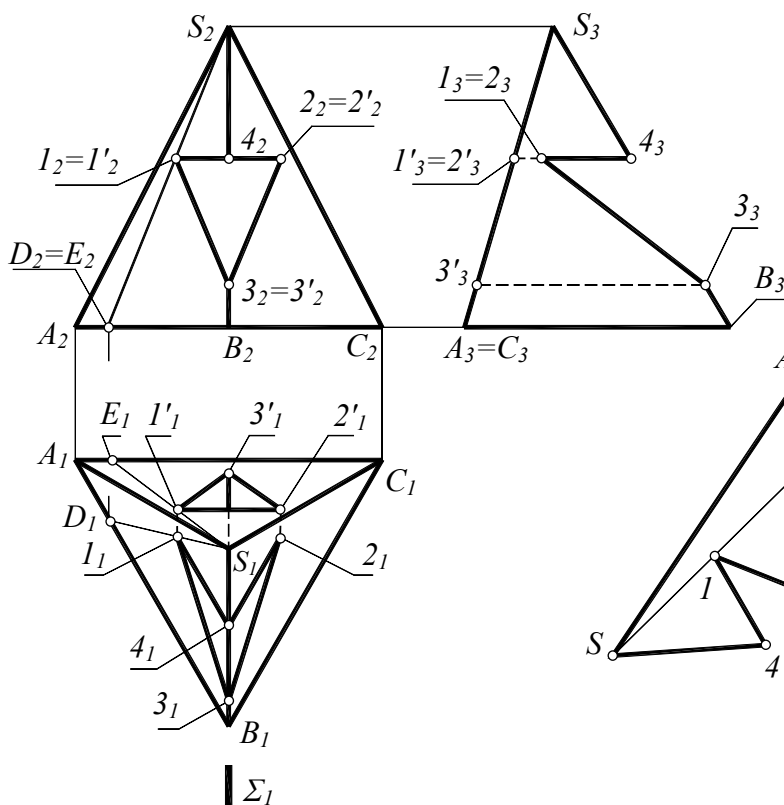


Рис. 14.3

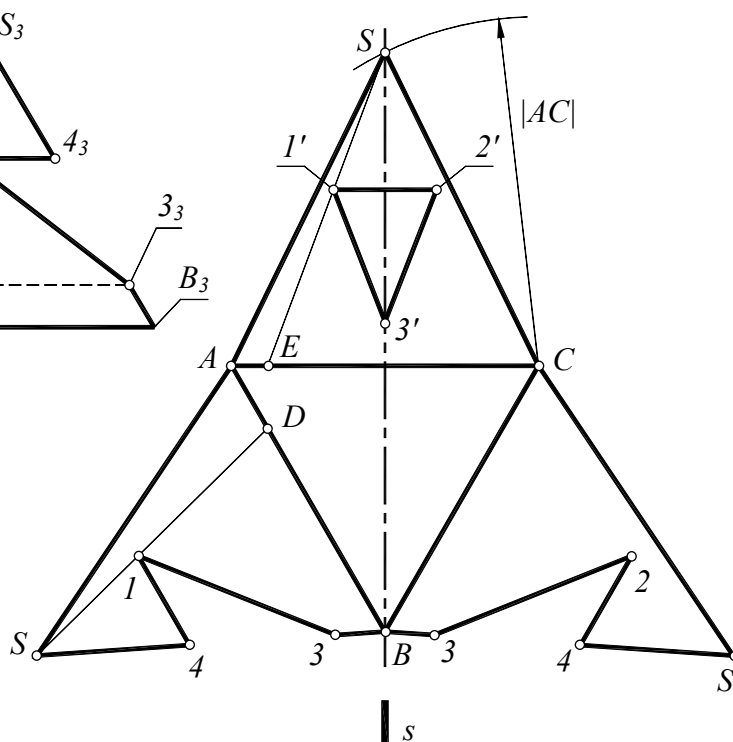


Рис. 14.4

Решение. Развертка поверхности правильной треугольной пирамиды $ABCS$ состоит из основания ABC и боковой поверхности пирамиды, состоящей из трех одинаковых равнобедренных треугольников ABS, ACS, BCS (см. рис. 14.3). Для построения развертки необходимо определить натуральную величину всех четырех граней. Основание

ABC пирамиды проецируется в натуральную величину на плоскость Π_1 , то есть $A_1B_1C_1$ есть истинная форма основания. Согласно условию задачи, пирамида $ABCS$ – правильная, то боковые ребра пирамиды равны между собой: $|SA| = |SB| = |SC|$. Ребро SB , лежащее в плоскости симметрии $\Sigma \parallel \Pi_3$, проецируется на плоскость Π_3 в натуральную величину. Следовательно, истинная длина боковых ребер пирамиды равна $|S_3B_3|$, что позволяет построить развертку боковых граней пирамиды (рис. 14.4). Пирамида симметрична относительно плоскости Σ , поэтому развертка имеет ось симметрии s (см. рис. 14.4), что заметно упрощает построения. Например, чтобы на развертке найти вершину S грани ACS , достаточно сделать засечку циркулем из центра C (радиусом $|AC|$) до пересечения с осью симметрии s .

Для построения развертки с учетом треугольного выреза, надо перенести на развертку характерные точки $1, 2, 3, 4, 1', 2', 3'$ выреза, затем соединить эти точки отрезками прямых линий. Это построение выполняется с учетом принадлежности указанных точек поверхности пирамиды. Например, точка 1 найдена на развертке с помощью вспомогательной прямой SD (см. рис. 14.3). Учитывая, что $|AD| = |A_1D_1|$, отмечаем на развертке точку D и проводим прямую SD (см. рис. 14.4). Способом прямоугольного треугольника определяем на чертеже истинную длину отрезка $|S-1|$ (это построение на рис. 14.3 условно не показано). Откладывая на развертке расстояние $|S-1|$ от точки S вдоль прямой SD , получаем точку 1 . Точка 2 симметрична точке 1 относительно оси s . Точки 3 и 4 принадлежат ребру BS , которое проецируется на Π_3 в натуральную величину, поэтому точки $3, 4$ удастся перенести на развертку без вспомогательных построений (как?). Точка $1'$ перенесена на развертку с помощью вспомогательной прямой SE (как?). Точка $2'$ симметрична точке $1'$ относительно s . Для построения на развертке точки $3'$, лежащей на оси симметрии s , достаточно заметить, что $|S-3'| = |S_3-3'_3|$.

Задача 14.3

Найти линию пересечения и построить развертки конической и цилиндрической поверхностей вращения (рис. 14.5).

Решение. Заданные алгебраические поверхности второго порядка пересекаются по кривой четвертого порядка k^4 , профильная проекция которой – окружность, совпадающая с профильной проекцией цилиндрической поверхности. Отмечая на Π_3 проекции $A_3, B_3, C_3, D_3, \dots$ опорных точек $A, B, C, D, \dots$ линии k^4 , находим фронтальные и горизонтальные проекции этих точек (из условия принадлежности этих точек поверхности конуса). Фронтальная проекция линии пересечения данных поверхностей – гипербола g_2 с центром O_2 и вершинами U_2, V_2 , лежащими на горизонтальной оси гиперболы (вершина U_2 , симметричная вершине V_2 относительно центра гиперболы O_2 , на рис. 14.5 условно не показана).

Примечание 1. Если на рис. 14.5 мысленно продлить цилиндрическую поверхность, то она будет “прокалывать” коническую поверхность (будет реализован случай проникания). Линия пересечения распадается на две замкнутые пространственные кривые, которые проецируются на Π_2 двумя ветками гиперболы g_2 . На рис. 14.5 показаны асимптоты гиперболы, пересекающиеся в ее центре O_2 .

Развертка конической поверхности. Разрезаем поверхность конуса вдоль образующей RS . Развертка представляет собой круговой сектор, радиус которого равен длине образующей RS , а длина дуги сектора – длине окружности основания.

Чтобы перенести на развертку какую-либо точку линии k^4 , например, точку C , проводим через C прямолинейную образующую SN и находим эту образующую на развертке. Для этого заменяем дугу PN малыми хордами $P-1, 1-2, 2-N$, которые откладываем на развертке от точки P вдоль дуги кругового сектора (см. рис. 14.5). Через найденную на развертке точку N проводим образующую SN . Положение точки C на развертке определяется расстоянием SC от вершины конуса S до точки C . Это расстояние нетрудно определить, отметив на очерковой образующей точку I , лежащую на той же высоте,

что и точка C (см. рис. 14.5). Откладывая вдоль образующей SN отрезок SI , получаем точку C на развертке конической поверхности. Многократно повторяя указанный алгоритм, находим на развертке конической поверхности любое число точек линии k^4 .

Примечание 2. Указанное построение является приближенным, так как дуга окружности заменяется ломаной линией, поэтому построенную таким образом развертку называют приближенной.

Развертка цилиндрической поверхности. Разрежем поверхность цилиндра вдоль образующей a (см. рис. 14.5). Разворачивая цилиндрическую поверхность, получаем плоскую фигуру, ограниченную тремя прямыми и кривой линией. Вертикальная прямая линия $A'-D'-B'-E'-A'$, состоящая из четырех одинаковых отрезков, представляет собой развертку окружности, лежащей в основании цилиндра. Отрезки AA' , ограничивающие развертку сверху и снизу, указывают “линию разреза”, по которой следует склеить развертку при изготовлении макета цилиндра. Волнистая кривая линия $A-U-D-B-E-U'-A$ получена переносом опорных точек линии k_4 на развертку цилиндра.

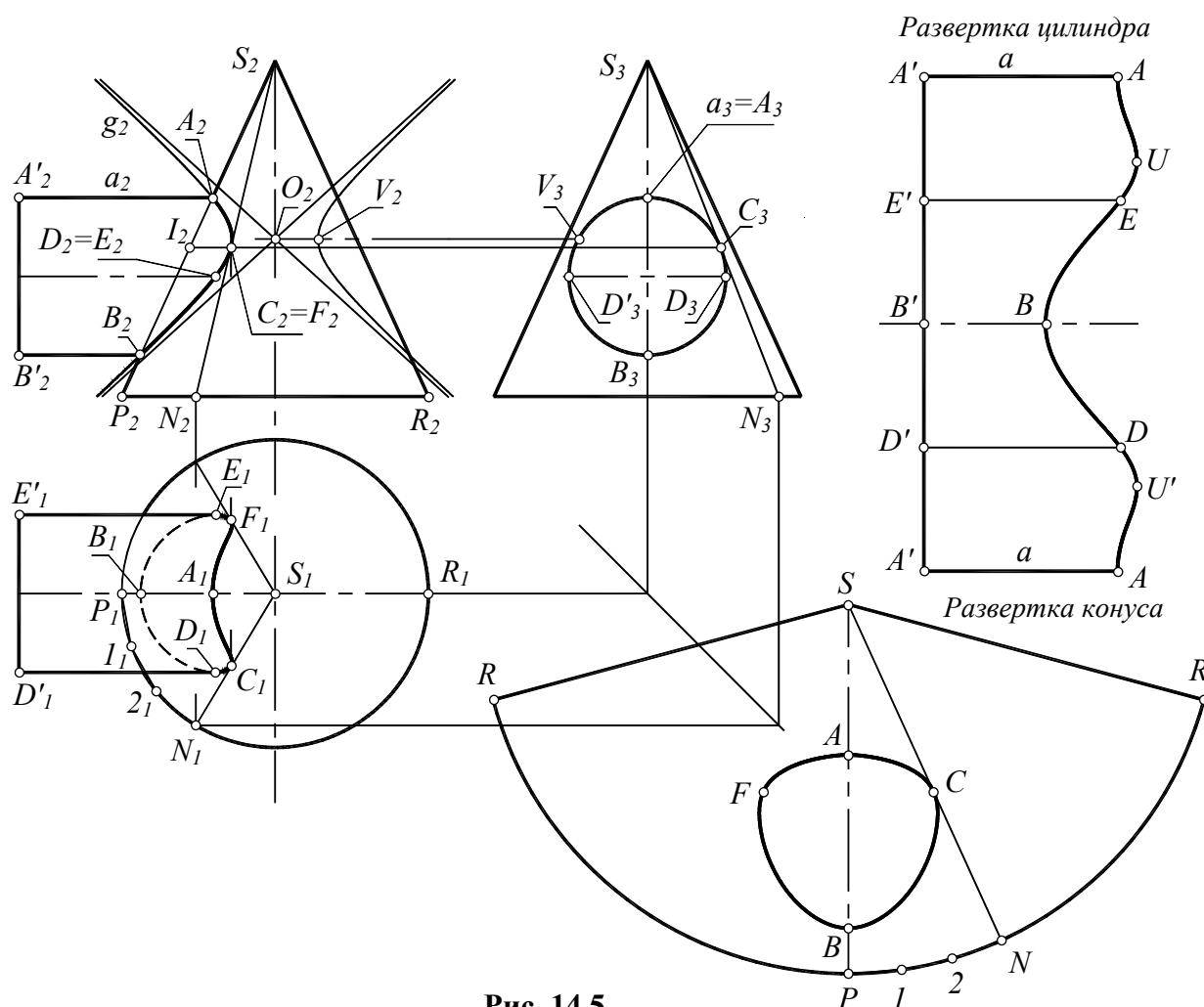


Рис. 14.5

Для построения развертки боковой поверхности цилиндра необходимо основание цилиндра разделить на определенное количество секторов таким образом, чтобы развертку цилиндра можно было заменить разверткой многоугольной призмы. Чем больше секторов на основании, тем точнее будет развертка цилиндра. Построение развертки боковой поверхности цилиндра начинаем с построения прямой $A'-D'-B'-E'-A'$, длина которой равна длине окружности основания цилиндра. Из характерных точек этой линии восстанавливаем к ней перпендикуляры и откладываем на них длины соответствующих образующих. Образующая BB' имеет минимальную длину. Образующая цилиндра,

проходящая через вершину U гиперболы g_2 , имеет максимальную длину. Вся развертка симметрична относительно образующей BB' .

Примечание 3. Длина кривой линии $A-U-D-B-E-U'-A$ на развертке цилиндрической поверхности в точности равна длине замкнутой кривой $A-C-B-F-A$ на развертке конической поверхности (*почему?*).

Задача 14.4

На поверхности конуса построить кратчайший путь (геодезическую линию) между точками A и B (рис. 14.6, а).

Решение. Поверхность конуса приближенно заменяем двенадцатигранной пирамидой, вписанной в конус. Размеры всех боковых ребер пирамиды равны между собой и равны длине l очерковой образующей конуса.

Чтобы построить развертку пирамиды, на свободном месте чертежа произвольно

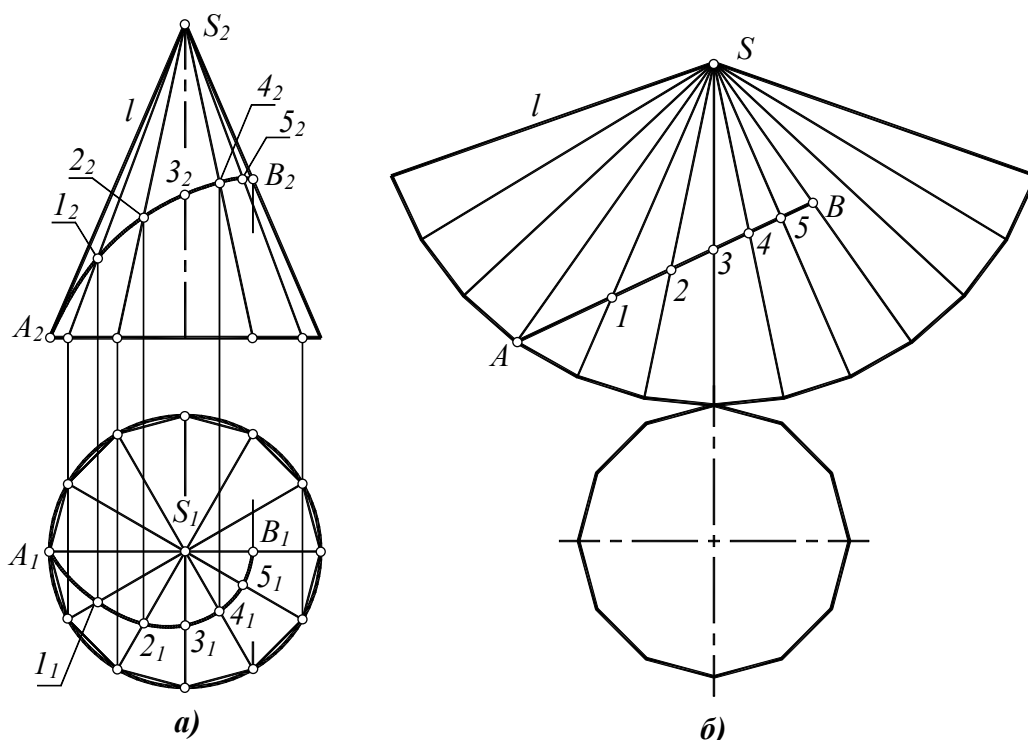


Рис. 14.6

выбираем положение вершины развертки – точку S , и строим 12 одинаковых треугольников с общей вершиной S . Боковые стороны каждого треугольника равны длине l очерковой образующей конуса. Основание каждого треугольника равно длине стороны правильного многоугольника, вписанного в круговое основание конуса. Получаем развертку пирамиды. Развертка пирамиды принимается за приближенную развертку боковой поверхности конуса (рис. 14.6, б).

Переносим точки A, B с чертежа конуса на развертку и соединяем A и B отрезком прямой (см. рис. 14.6, б). Затем на отрезке AB отмечаем промежуточные точки $1, 2, \dots, 5$ и “возвращаем” эти точки на чертеж конуса.

Соединяя плавной кривой фронтальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем фронтальную проекцию геодезической линии AB . Соединяя плавной кривой горизонтальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем горизонтальную проекцию геодезической линии AB . Задача решена приближенно, так как для решения использована приближенная развертка конической поверхности.

Тема 15

ТЕНИ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

При построении теней пользуются стандартным источником света, лучи которого параллельны друг другу (источник света бесконечно удален) и направлены по диагонали куба (рис. 15.1). На ортогональном чертеже проекции s_1, s_2 светового луча наклонены к оси x под углом 45° (рис. 15.2).

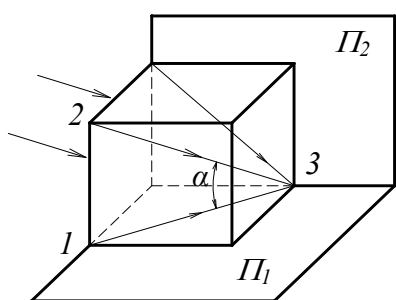


Рис. 15.1

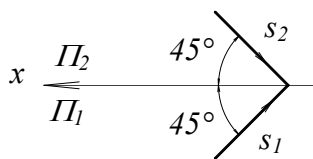


Рис. 15.2

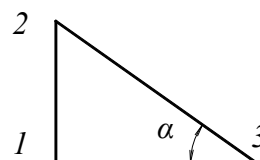


Рис. 15.3

Чтобы определить истинный угол наклона α световых лучей к плоскости Π_1 , рассмотрим прямоугольный треугольник 123 (см. рис. 15.1). Если длину ребер куба принять равными единице, то катет 13 равен $\sqrt{2}$, а $\tan \alpha = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Отсюда $\alpha \approx 35,3^\circ$ (рис. 15.3). К фронтальной стене световые лучи наклонены под тем же самым углом $\alpha \approx 35,3^\circ$.

Задача 15.1

Построить тени на плоскостях проекций от точек A, B, C (рис. 15.4).

Решение. Точка A расположена “далеко” от горизонтальной плоскости Π_1 и “близко” к плоскости Π_2 (высота z_A точки A больше, чем ее глубина y_A). Следовательно, световой луч, проходящий через точку A , встретится с плоскостью Π_2 раньше, чем с плоскостью Π_1 . Иначе говоря, тень от точки A падает на плоскость Π_2 .

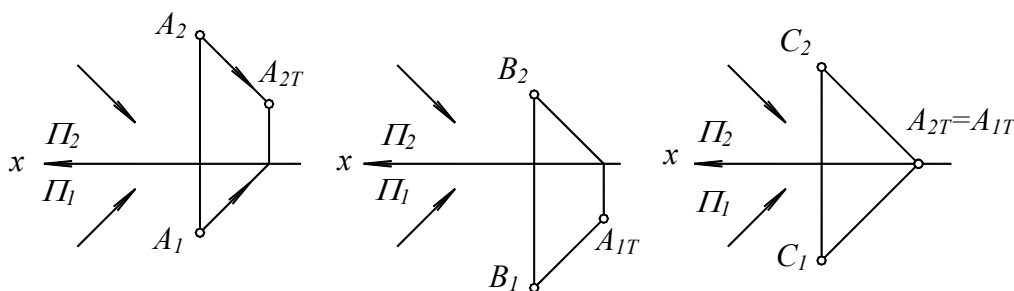


Рис. 15.4

Точка B расположена “далеко” от фронтальной плоскости проекций и “близко” к горизонтальной плоскости Π_1 (глубина y_B точки B больше, чем ее высота z_B). Следовательно, тень от точки B падает на плоскость Π_1 .

Точка C расположена на равном расстоянии от плоскостей Π_1 и Π_2 , поэтому тень от точки попадает точно на ось x (ось x – это линия пересечения плоскостей Π_1 и Π_2).

Задача 15.2 (рис. 15.5)

Построить тень от точки A на непрозрачной треугольной пластинке.

Решение. Чтобы построить тень от точки A , проводим через эту точку световой луч s и находим точку A_T пересечения светового луча с пластинкой. Точка A_T – искомая тень от точки A . Для построения точки пересечения светового луча s с пластинкой про-

водим через луч s вспомогательную секущую плоскость Σ , находим линию разреза $1-2$ пластинки секущей плоскостью Σ и отмечаем искомую теневую точку A_T .

Нетрудно заметить, что построение тени от точки выполнено строго по схеме решения первой позиционной задачи. Действительно, световой луч s – это прямая линия, а треугольная пластинка – это плоскость. Тень – это точка пересечения прямой s с плоскостью пластинки. Эта точка определяется по схеме решения первой позиционной задачи.

Примечание. При построении теней используют понятие “лучевая плоскость”. Лучевой плоскостью называют плоскость, проходящую через световой луч. Например, на рис. 15.5 вспомогательная плоскость Σ – это лучевая плоскость, так как она проходит через световой луч s . Очевидно, через любой световой луч можно провести множество лучевых плоскостей.

Задача 15.3

Построить тень от точки K , падающую на поверхность конуса (рис. 15.6, а).

Решение. Проводим через точку K вспомогательную лучевую плоскость, находим линию k пересечения этой лучевой плоскости с поверхностью конуса и отмечаем искомую теневую точку на пересечении светового луча с линией k . Лучевая плоскость может быть выбрана произвольно. Рассмотрим два варианта выбора вспомогательной лучевой плоскости.

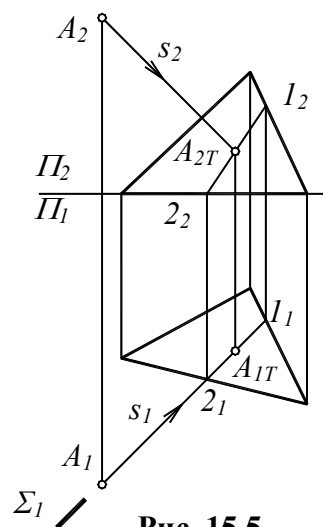


Рис. 15.5

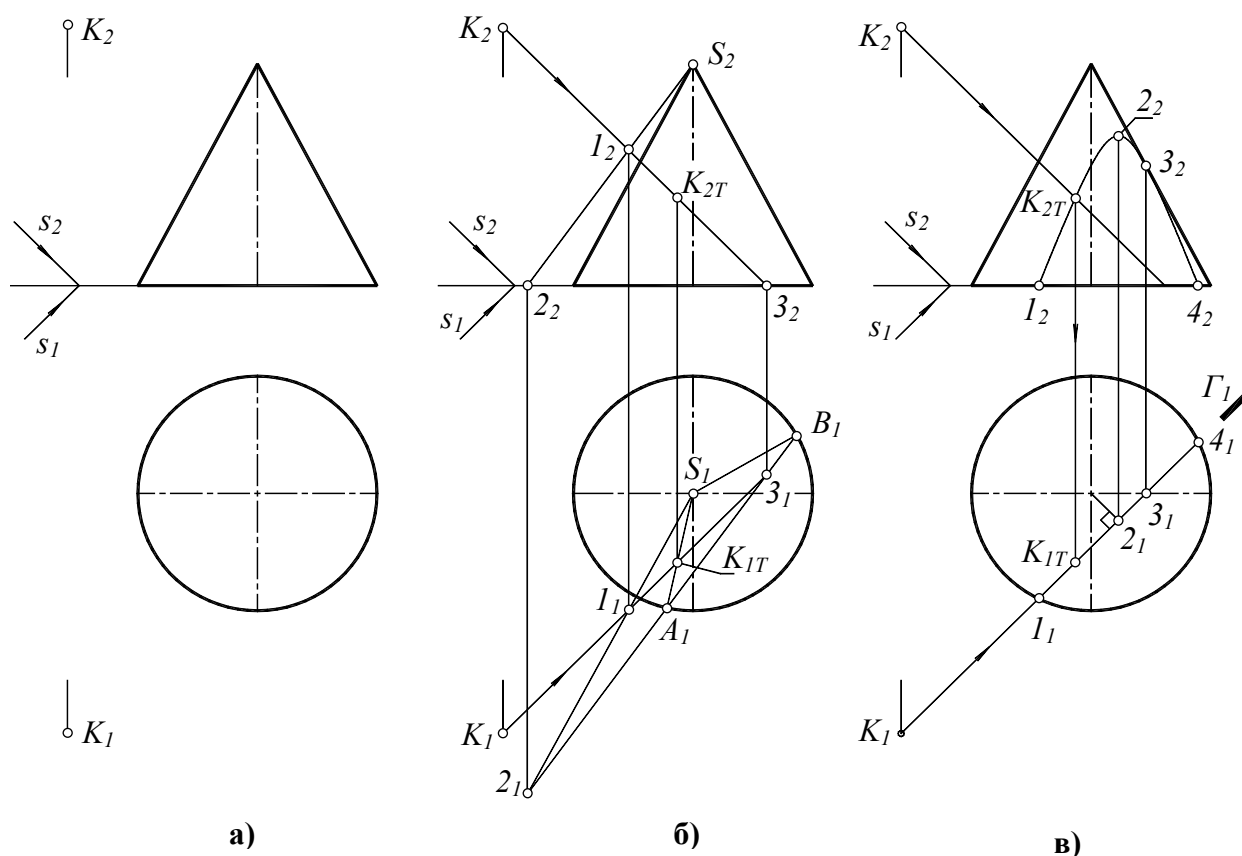


Рис.15.6

Первый вариант. Проведем вспомогательную лучевую плоскость через вершину конуса. Начертим в лучевой плоскости произвольную прямую $S-1$ (рис. 15.6, б). Эта прямая пересекается с плоскостью основания конуса в точке 2. Световой луч, проходя-

ший через K , пересекается с плоскостью основания в точке 3 . Следовательно, лучевая плоскость, проходящая через вершину S , пересекается с плоскостью основания конуса по прямой $2-3$. В точках A, B эта лучевая плоскость пересекает круговое основание конуса (см. рис. 15.6, б). Поскольку лучевая плоскость проведена через вершину конуса, то она пересекает поверхность конуса по треугольнику ASB . На пересечении светового луча с этим треугольником отмечаем искомую теневую точку K_T (см. также задачу 8.7 из темы 8).

Второй вариант. Проведем горизонтально-проецирующую лучевую плоскость Γ . Она пересекает поверхность конуса по гиперболе $1-2-3-4$. Точка 2 – вершина гиперболы. В точке 3 гипербола касается фронтального очерка конической поверхности. На пересечении светового луча с начерченной гиперболой отмечаем искомую тень K_T , падающую от точки K на коническую поверхность (рис. 15.6, в).

Примечание. Второй вариант менее точен, поскольку предполагает вычерчивание кривой второго порядка (гиперболы), что невыполнимо циркулем и линейкой. В первом варианте решения удачно выбрана вспомогательная лучевая плоскость. Она пересекает поверхность конуса по треугольнику, что позволяет реализовать графически точное решение задачи.

Задача 15.4

Построить тени, падающие от данных отрезков на горизонтальную и фронтальную плоскости проекций (рис. 15.7).

Решение. На рис. 15.7, а показан отрезок, тень от которого полностью попадает на фронтальную плоскость проекций. В этом случае для построения тени от всего отрезка достаточно построить тени A_{2T} и B_{2T} от концов A, B данного отрезка, и соединить найденные теневые точки.

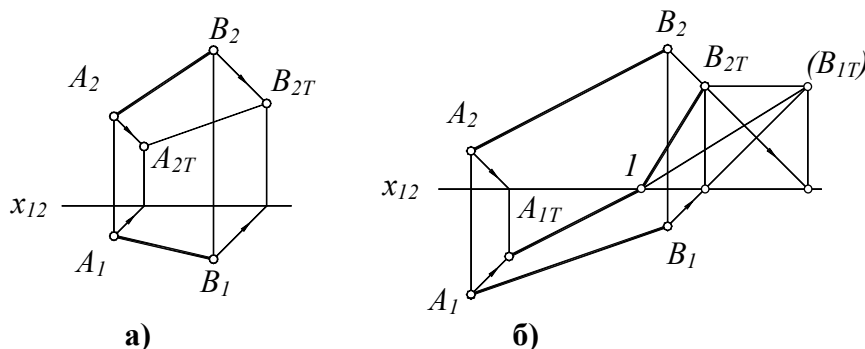


Рис. 15.7

На рис. 15.7, б тень от точки A попадает на плоскость Π_1 , а от точки B – на плоскость Π_2 . Соединять отрезком прямой найденные теневые точки нельзя, потому что тень от отрезка терпит излом на оси x_{12} .

В этом случае надо предварительно построить “мнимую” тень от какого-либо конца отрезка. Например, на рис. 15.7, б построена мнимая тень (B_{1T}) от точки B , падающая на плоскость Π_1 . Соединяя теневую точку A_{1T} с мнимой тенью (B_{1T}) , получаем тень отрезка на плоскости Π_1 . В точке I , лежащей на оси x , тень отрезка переходит с плоскости Π_1 на плоскость Π_2 и заканчивается в действительной теневой точке B_{2T} .

Задача 15.5 (рис. 15.8)

Построить тень от вертикального отрезка MN на ступеньках лестницы.

Решение. Через вертикальный отрезок MN проведем лучевую плоскость Λ . Так как все световые лучи находятся в лучевой плоскости, то горизонтальная проекция тени от отрезка MN на ступеньках лестницы совпадает с горизонтальной проекцией всей лучевой плоскости. Тень от отрезка сначала падает на землю (участок тени от точки N до точки I). Затем тень “переползает” на подступень нижней ступеньки (вертикальный участок $I-I'$). Далее тень падает на проступь нижней ступеньки (участок $I'-2$). От точки

2 до точки $2'$ тень отрезка падает на подступень средней ступеньки, затем “переползает” на проступь средней ступеньки, и так далее. Тень заканчивается в точке M_T .

Заметим, что тень на фасаде, падающая от вертикального шеста на поверхность ступенек, повторила нормальный профиль этих ступенек, что иллюстрирует следующее правило: *тень от вертикальной прямой на фронтальном фасаде здания повторяет нормальный профиль фасада* (см. рис. 15.8).

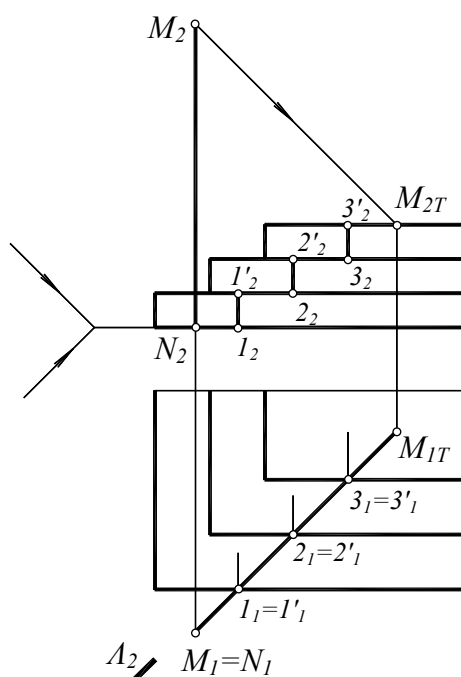


Рис. 15.8

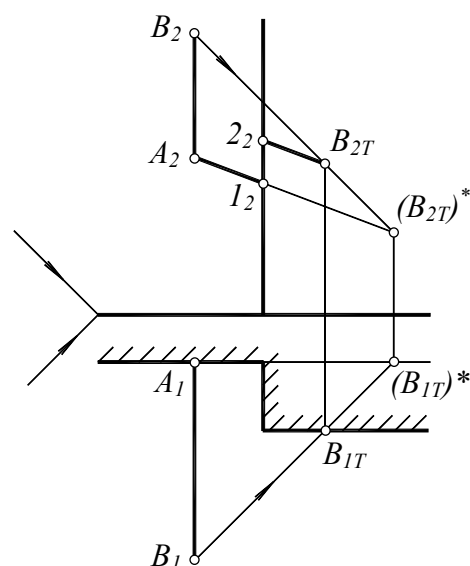


Рис. 15.9

Задача 15.6

Построить тень, падающую от наклонного отрезка AB на фасадную стену с угловым выступом (рис. 15.9).

Решение. Мысленно продолжим левую часть стены и найдем “мнимую” тень $(B_T)^*$ от точки B , падающую на продолженную часть стены. Если бы стена не имела углового выступа, то тень отрезка AB , начинаясь в точке A , закончилась бы в точке $(B_T)^*$. Но стена имеет угловой выступ. Поэтому тень отрезка в угловой точке I перемещается на боковую сторону выступа, затем в точке 2 переходит на правую половину фасадной стены, и заканчивается в точке B_T . Участки $(A-I)$ и $(2-B_T)$ падающей тени параллельны друг другу (*почему?*).

Задача 15.7 (рис. 15.10)

Построить тень от треугольника ABC на плоскостях проекций Π_1 и Π_2 .

Решение. Согласно условию задачи, треугольник ABC занимает общее положение в пространстве (плоскость треугольника не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций). Тени A_T, B_T от вершин A и B падают на горизонтальную плоскость проекций. Тень от вершины C попадает на фронтальную плоскость проекций (см. рис. 15.10). Следовательно, тень треугольника частично падает на плоскость Π_2 , а частично – на плоскость Π_1 . Граница падающей тени терпит излом на линии пересечения плоскостей проекций (на оси x).

Построив “мнимую” тень $(C_{1T})^*$, падающую от точки C на плоскость Π_1 , начертим тень от треугольника на этой плоскости. Частично (до точек 1 и 2) эта тень будет действительной, частично – мнимой. В точках $1, 2$ падающая тень терпит излом, переме-

щаяся с плоскости Π_1 на плоскость Π_2 , и заканчивается в точке C_{2T} – истинной теневой точке, указывающей тень от вершины C на плоскости Π_2 .

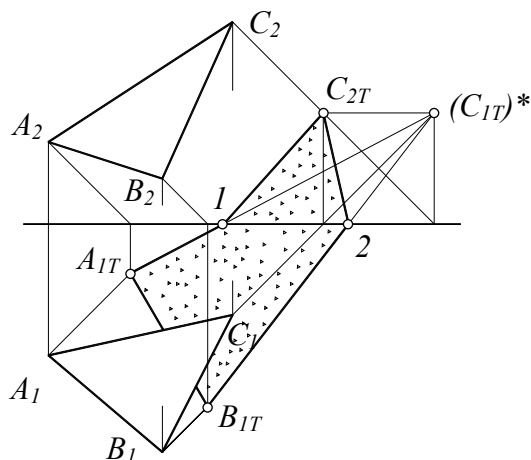


Рис. 15.10

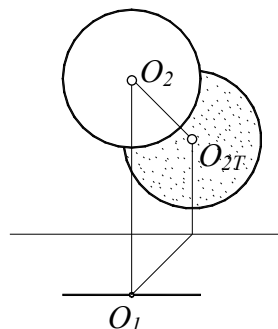


Рис. 15.11

Задача 15.8

Построить тень диска с центром O , расположенного параллельно фронтальной плоскости проекций (рис. 15.11).

Решение. Если плоская фигура параллельна какой-либо плоскости проекций, то тень на этой плоскости тождественна самой фигуре. Поэтому для полного решения задачи достаточно найти тень O_T от центра O диска, и начертить тень в виде окружности. Радиус теневой окружности равен радиусу диска. В соответствии с чертежом, тень от диска полностью попадает на плоскость Π_2 .

Задача 15.9

Построить собственную и падающую тени призмы (рис. 15.12).

Решение. При построении теней геометрических тел сначала находят контур собственной тени. Затем строят тень от контура собственной тени (падающую тень). Падающая тень – это тень от контура собственной тени. У призмы на рис. 15.12 задняя и правая грани не освещены, поэтому граница собственной тени образована ребрами AB , BC , CD и DE . Тень на плоскостях проекций – это тень от пространственной ломаной линии $ABCDE$. В точках 1 и 2 на оси x падающая тень переходит с плоскости Π_1 на плоскость Π_2 , претерпевая при этом излом.

Задача 15.10

Построить собственную и падающую тени цилиндра вращения (рис. 15.13).

Решение. Собственная тень на поверхности цилиндра – это неосвещенный участок его поверхности (на который не попадают световые лучи). В собственной тени находится ровно половина боковой поверхности цилиндра. Поэтому граница собственной тени – это две прямолинейные симметрично расположенные образующие n и n' ,

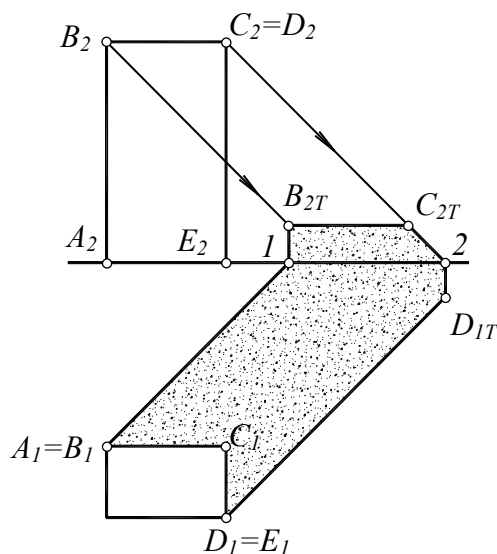


Рис. 15.12

а также полуокружность ABC .

Тень от цилиндра частично падает на плоскость Π_1 , а частично – на плоскость Π_2 . Найдем тень от цилиндра на плоскости Π_1 (некоторые участки этой тени будут “мнимыми”). Тень от “потолка” цилиндра на плоскости Π_1 – окружность с центром O_1 . Тень всего цилиндра на Π_1 образована тенью от “потолка” и от образующих n, n' .

В точках $1, 2$, лежащих на оси x , тень цилиндра переходит с плоскости Π_1 на плоскость Π_2 . Вычерчиваем тень цилиндра на плоскости Π_2 . Тень от “потолка” цилиндра на плоскости Π_2 – эллипс с центром в “мнимой” теневой точке $(O_{2T})^*$. Тень от образующей n' переходит (в точке 3) на плоскость Π_2 и заканчивается в точке C_{2T} . Тень от образующей n остается на Π_1 , не падая на Π_2 .

Выделяя более толстой линией действительную часть границы падающей тени и учитывая, что тень на плоскости Π_2 частично заслонена самим цилиндром, получаем окончательное решение задачи (см. рис. 15.13).

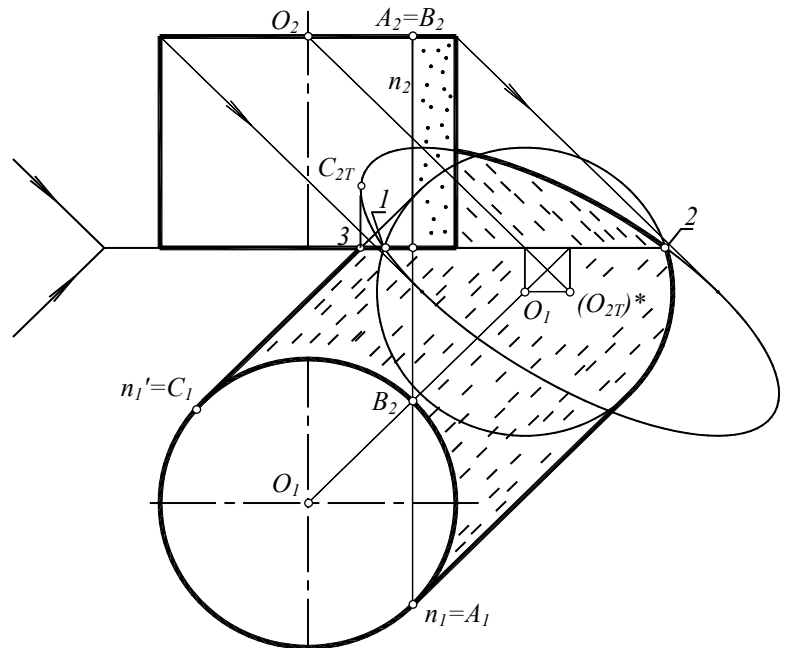


Рис. 15.13

Задача 15.11

Построить собственную и падающую тени треугольной пирамиды, стоящей на цилиндрическом основании (рис. 15.14).

Решение. Тень от цилиндрического основания падает на горизонтальную плоскость проекций. Для построения этой тени следует найти тень от окружности r , лежащей в плоскости Σ . Поскольку плоскость Σ параллельна плоскости Π_1 , то тень от окружности r на Π_1 – такая же окружность (см. задачу 15.8).

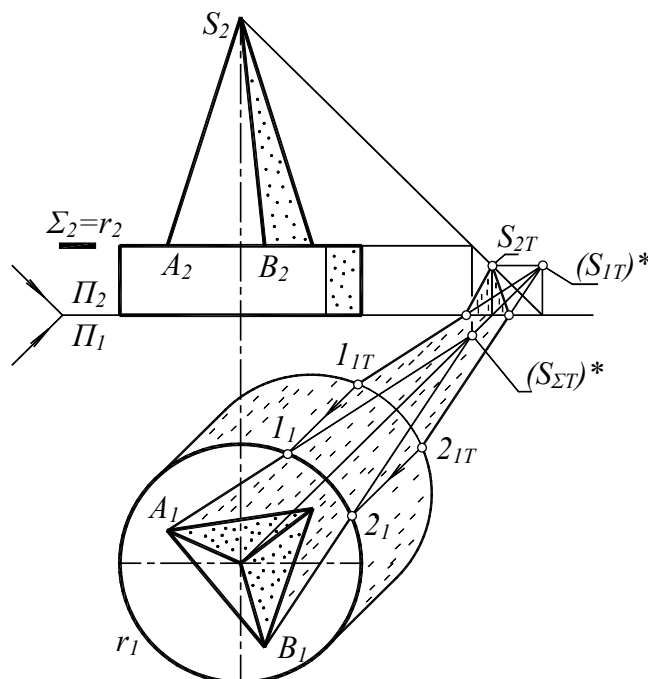


Рис. 15.14

Тень от пирамиды частично падает на верхнюю плоскость Σ цилиндрического основания, а частично – на плоскости Π_1 и Π_2 . Найдем мнимую тень $(S_{\Sigma T})^*$ от вершины пирамиды, падающую на плоскость Σ , и начертим тени от ребер AS и BS , падающие на верхнее основание Σ , и заканчивающиеся в точках 1 и 2 .

Для построения тени пирамиды на плоскостях проекций найдем действительную S_{2T} и мнимую

$(S_{1T})^*$ тени от вершины S пирамиды, падающие на плоскости Π_2 и Π_1 .

Через точку $(S_{1T})^*$ проходит тень от пирамиды, падающая на плоскость Π_1 . Плоскость Σ параллельна плоскости Π_1 , поэтому тени от ребер пирамиды на плоскостях Σ и Π_1 параллельны друг другу. В точках на оси x тень от пирамиды терпит излом и заканчивается в точке S_{2T} .

Примечание. Для проверки точности построения рекомендуется использовать способ “обратных лучей”. Из точек 1_{1T} и 2_{1T} проведем “обратные” световые лучи (см. рис. 15.14). Если построение выполнено правильно, то обратные лучи попарно соединят точки 1_1 , 1_{1T} и 2_1 , 2_{1T} (почему?).

Задача 15.12

Построить собственную и падающую тени полукруглого козырька, прикрепленного к вертикальной стене Σ (рис. 15.15).

Решение. Граница собственной тени козырька образована дугой 1-2 верхней полуокружности, прямолинейным отрезком 2-3 и дугой 3-4-5-6 нижней полуокружности. Тень от козырька, падающая на плоскость Σ – это тень от границы собственной тени.

Тени на фронтальной стене Σ от верхней и нижней полуокружностей козырька – одинаковые эллипсы. Нижний теневой эллипс (тень от нижней полуокружности) смещен относительно верхнего на толщину козырька. Для построения теневых эллипсов находим тени на стене от точек 1...6, лежащих на границе собственной тени козырька, и соединяем их плавной кривой.

Следует обратить внимание, что тень от отрезка 2-3, падающая на стену – это вертикальный отрезок 2_{2T} - 3_{2T} (см. рис. 15.15).

Примечание. Для повышения точности построения рекомендуется построить вспомогательную тень, падающую на стену от мнимого прямоугольного козырька, описанного около данного полукруглого козырька. В точках 1_2 , 4_{2T} , 6_2 теневые эллипсы должны касаться границ этой вспомогательной тени.

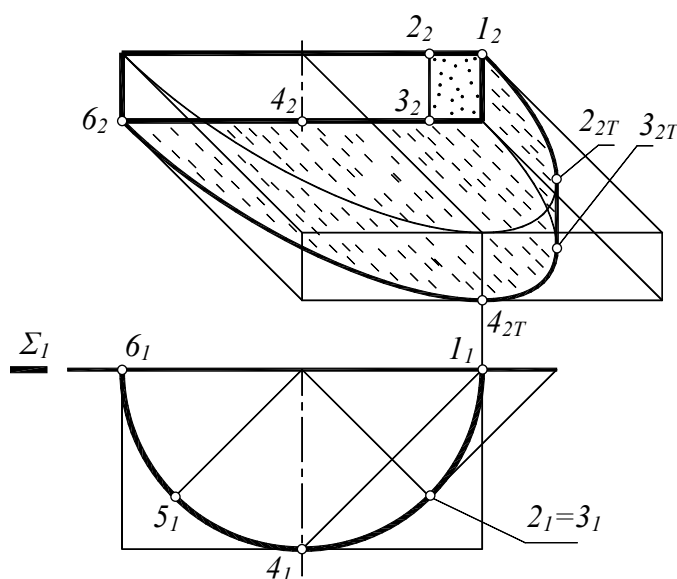


Рис. 15.15

Задача 15.13 (рис. 15.16)

Построить тень, падающую от боковой стенки на ступени лестницы.

Решение. Собственная тень боковой стенки ограничена горизонтальной прямой a и вертикальной прямой b (рис. 15.16). Напомним, что падающая тень – это тень от границы собственной тени. Следовательно, для решения задачи надо найти тени на лестнице от прямых a и b .

Чтобы найти тень от горизонтальной прямой a , проведем через эту прямую лучевую плоскость Σ и начертим ломаную линию, по которой плоскость Σ пересекает ступени лестницы. Эта линия на фасаде совпадает с фронтальной проекцией плоскости Σ , а на плане повторяет нормальный профиль ступенек (см. задачу 15.5).

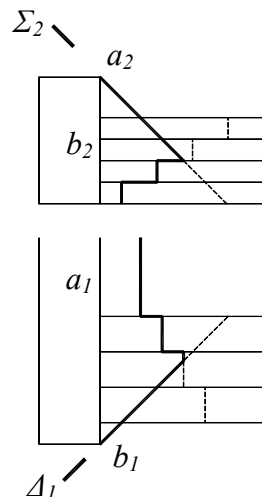


Рис. 15.16

Для построения тени от вертикальной прямой b надо провести через прямую b лучевую плоскость Δ и начертить сечение ступенек плоскостью Δ . Эта линия на плане совпадает с горизонтальной проекцией плоскости Δ , а на фасаде повторяет нормальный профиль ступенек (см. рис. 15.16).

Задача 15.14

Построить тени на фасаде домика (рис. 15.17).

Решение. Тени на фасаде образованы четырьмя геометрическими элементами: козырьком над дверным проемом; углубленным в фасадную стену дверным проемом; углубленным в фасадную стену круглым окном; выступающим над фасадной стеной свесом двускатной крыши.

Тень от козырька частично падает на фасадную стену, а частично попадает в дверной проем. Например, тени от угловых точек 1 и 2 козырька попадают на разные поверхности: тень 1_T от точки 1 попадает на стену, а тень 2_T — на плоскость дверного проема.

Дверной проем затенен не только козырьком, но и стенами самого дверного проема. Для построения этих теней достаточно найти тень 3_T от угловой точки проема, и начертить границу падающей тени, параллельную горизонтальному и вертикальному обрамлению дверного проема.

Тень r_{2T} в углублении круглого окна, ограниченного окружностью r , повторяет эту окружность, поэтому для построения тени r_{2T} достаточно построить тень O_{2T} от центра O окружности r .

Для построения тени от свеса крыши достаточно построить на фасаде здания тень 4_{2T} от угловой точки 4 . Кромки крыши параллельны фасадной стене, поэтому тени параллельны кромкам крыши и проходят через точку 4_{2T} (см. рис. 15.17).

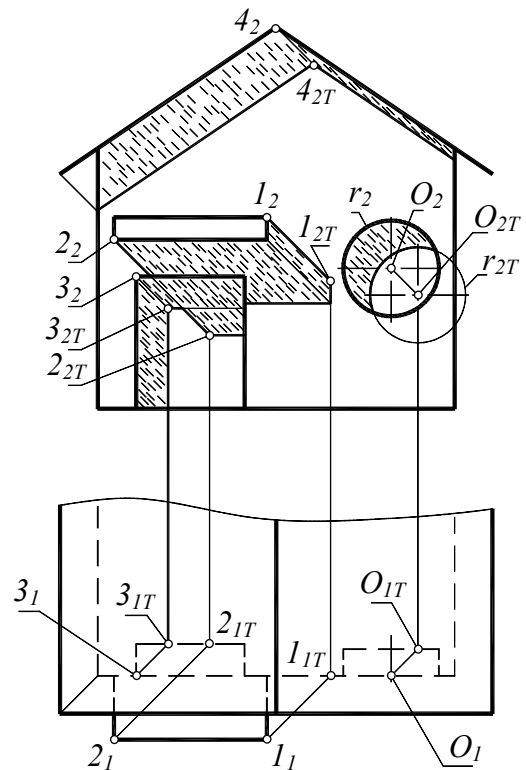


Рис. 15.17

Задача 15.15

Построить тени треугольника ABC и отрезка KL на плоскостях проекций. Построить тень, падающую от отрезка KL на треугольник ABC (рис. 15.18).

Решение. Рассмотрим построение тени от треугольника ABC . Вершина A треугольника ABC лежит на оси x , поэтому тень от точки A совпадает с точкой A (рис. 15.19). Тень B_{1T} от точки B падает на горизонтальную плоскость проекций, тень C_{2T} от точки C — на фронтальную плоскость проекций. Следовательно, тень от стороны AB попадает на плоскость Π_1 , тень от AC — на плоскость Π_2 , а тень от стороны BC терпит излом в некоторой точке R , лежащей на оси x .

Для построения тени от стороны BC найдена мнимая тень C_{1T}^* , падающая от точки C на плоскость Π_1 . Затем построена тень $B_{1T} C_{1T}^*$ от стороны BC , падающая на плоскость Π_1 . Эта тень частично действительная, а частично мнимая. В точке R на оси x тень стороны BC терпит излом и направляется не в мнимую теневую точку C_{1T}^* , а в действительную точку C_{2T} . Таким образом, тень от треугольника ABC частично попадает на плоскость Π_1 , а частично — на плоскость Π_2 (см. рис. 15.9).

Тени K_{2T} и L_{1T} от концов отрезка падают на разные плоскости проекций, поэтому тень отрезка KL терпит излом в некоторой точке R' на оси x . Для построения точки из-

лома находим мнимую тень L_{2T}^* , и строим тень $K_{2T}L_{2T}^*$, падающую от отрезка KL на плоскость Π_2 . Эта тень частично действительная, а частично мнимая. На пересечении тени $K_{2T}L_{2T}^*$ с осью x отмечаем точку излома R' . Из точки R' тень отрезка направляется не в мнимую точку L_{2T}^* , а в действительную теневую точку L_{1T} . Таким образом, тень отрезка KL частично попадает на плоскость Π_1 , а частично – на плоскость Π_2 .

Отрезок KL пересекает плоскость треугольника ABC в точке E (вспомогательные построения, необходимые для поиска проекций точки E , на рис. 15.9 условно не показаны). Треугольник считается непрозрачным, поэтому тень отрезка KL частично попадает на плоскости проекций, а частично – на плоскость треугольника.

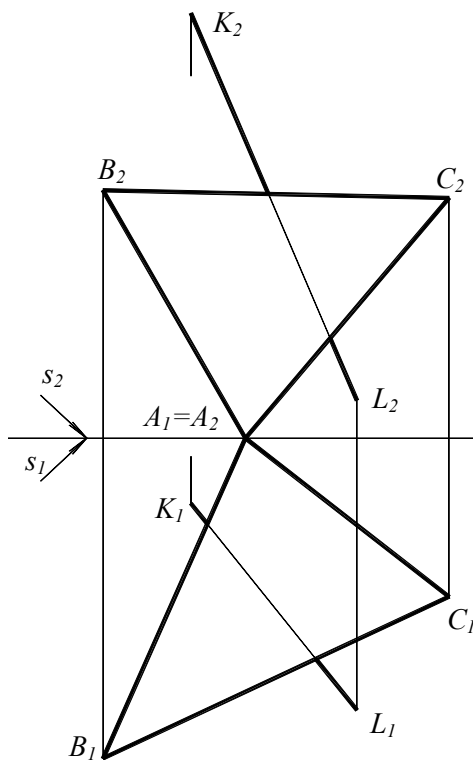


Рис. 15.8

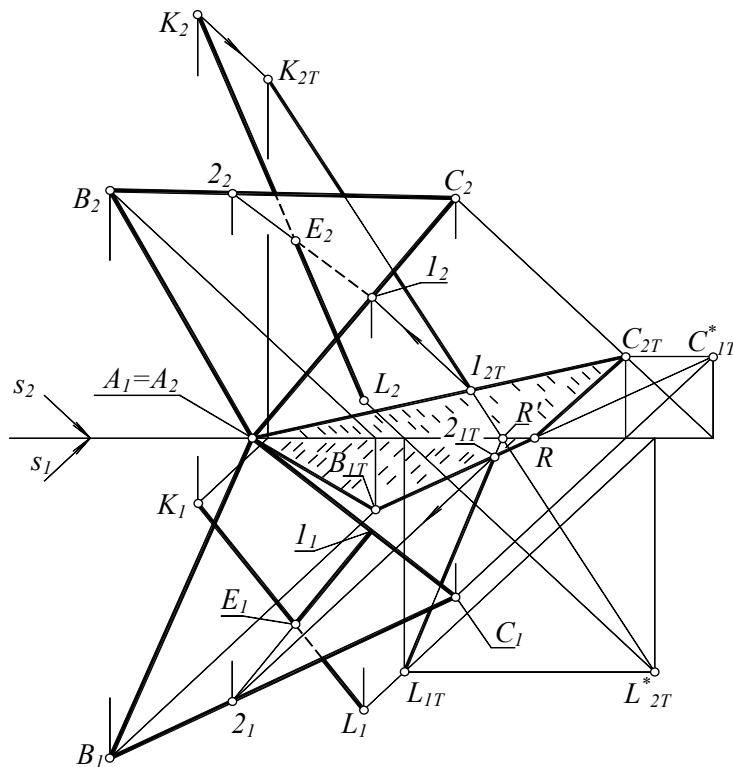


Рис. 15.9

Для построения тени отрезка, падающей на треугольник, используем *способ обратного луча*. Отмечаем точки I_{2T} и 2_{1T} пересечения падающих теней отрезка и сторон треугольника. Возвращая (с помощью обратного луча) эти точки на стороны треугольника, отмечаем точки I и 2 на сторонах AC и BC . Тень, падающая от отрезка KL на треугольник, проходит через точки I и 2 .

Если задача решена правильно, то тень отрезка KL на плоскости треугольника обязательно пройдет через точку E пересечения отрезка с треугольником (*почему?*).

Примечание. Треугольник ABC расположен в пространстве таким образом, что при “взгляде сверху” мы видим освещенную сторону треугольника, на которую упала тень $E-I$ от отрезка KL (участок $2-E$ – мнимый). При “взгляде спереди” мы видим неосвещенную сторону треугольника. Поэтому фронтальная проекция E_2-I_2 тени от отрезка KL – невидимая (показана на рис. 15.9 штриховой линией).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Короткий, В.А. Начертательная геометрия: конспект лекций / В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, И.В. Буторина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 191 с.
2. Короткий, В.А. Тени, аксонометрия, перспектива: электронный конспект лекций / В.А. Короткий. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2010. – 127 с.
3. Хмарова, Л.И. Упражнения по начертательной геометрии: рабочая тетрадь / Л.И. Хмарова, А.Л. Решетов, Л.Л. Карманова, Т.Ю. Попцова, Е.П. Дубовикова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 75 с.
4. Коркунова, Н.М. Рабочая тетрадь по начертательной геометрии для самостоятельной работы студентов: учебное пособие / Н.М. Коркунова, Г.И. Манакова, И.В. Буторина, В.Н. Васильева. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2011. – 76 с.