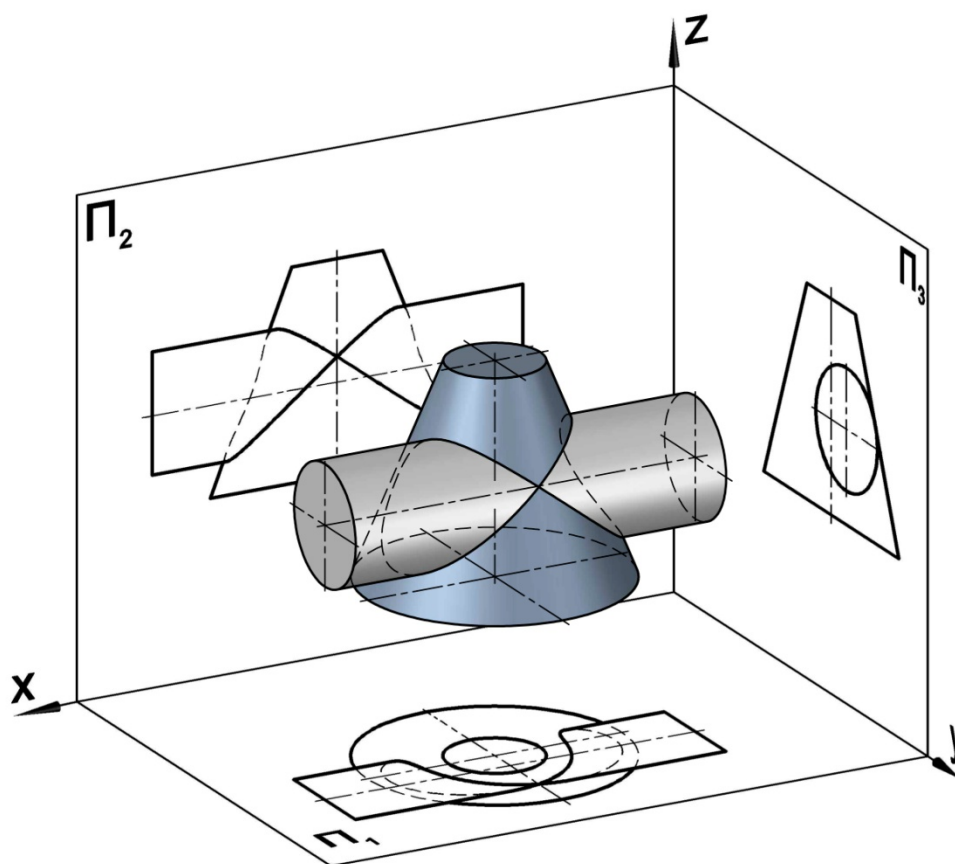


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, И.В. Буторина

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций



Челябинск
2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра графики

514.18(07)
К687

В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, И.В. Буторина

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Рекомендовано федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» в качестве учебного пособия для самостоятельной работы студентов высших учебных заведений, обучающихся по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки «Инженерное дело, технологии и технические науки»

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

УДК 514.18(075.8)
К 687

*Одобрено
учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета*

Рецензенты:

заведующий кафедрой “Инженерная геометрия и САПР” Омского государственного технического университета, доктор техн. наук К.Л. Панчук,
заведующий кафедрой “Сопротивление материалов” Челябинской государственной агроинженерной академии, доктор техн. наук А.Г. Игнатъев,
доцент кафедры “Сопротивление материалов” Челябинской государственной агроинженерной академии, кандидат техн. наук А.А. Зарезин.

Короткий, В. А.

К687 Начертательная геометрия: конспект лекций / В.А. Короткий, Л.И. Хмарова, И.В. Буторина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 191 с.

Конспект лекций по начертательной геометрии содержит теоретические основы построения обратимых изображений фигур трехмерного пространства и графические способы решения пространственных геометрических задач при помощи этих изображений. Рассмотрена плоская проекционная модель линейных подпространств четырехмерного пространства, реализованная на обобщенном чертеже Монжа.

Учебное пособие составлено для студентов, обучающихся по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки «Инженерное дело, технологии и технические науки».

УДК 514.18(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	8
Лекция 1. Предмет и основной метод начертательной геометрии	10
1.1. Центральное и параллельное проецирование.....	10
1.2. Свойства параллельного проецирования.....	11
1.3. Ортогональное проецирование.....	12
Вопросы для повторения.....	12
Лекция 2. Чертежи простейших геометрических фигур	13
2.1. Комплексный чертеж точки.....	13
2.2. Комплексные чертежи прямых линий.....	14
2.2.1. Комплексный чертеж прямой общего положения.....	14
2.2.2. Определение натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника.....	15
2.2.3. Построение отрезка заданной длины.....	16
2.2.4. Комплексные чертежи прямых частного положения.....	16
2.2.5. Принадлежность точки к прямой линии.....	18
2.2.6. Относительное положение двух прямых.....	19
2.3. Комплексный чертеж плоскости.....	19
2.3.1. Прямые и точки, принадлежащие плоскости общего положения.....	20
2.3.2. Главные линии плоскости.....	21
2.3.3. Комплексные чертежи плоскостей частного положения.....	22
2.3.4. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей.....	24
Вопросы для повторения.....	25
Лекция 3. Позиционные задачи	26
3.1. Первая позиционная задача (простейший случай).....	26
3.1.1. Вспомогательная задача.....	26
3.1.2. Основная задача.....	26
3.1.3. Определение видимости на чертеже.....	27
3.2. Вторая позиционная задача (простейший случай).....	28
3.3. Построение линии пересечения двух плоских фигур.....	29
Вопросы для повторения.....	31
Лекция 4. Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости	32
4.1. Признаки перпендикулярности прямых и плоскостей.....	32
4.2. Теорема 1 (о проекциях прямого угла).....	33
4.3. Теорема 2 (о взаимной перпендикулярности прямых и плоскостей).....	34
4.3.1. Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.....	35
4.3.2. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей.....	36
4.3.3. Построение взаимно перпендикулярных прямых.....	37
4.4. Решение типовых задач.....	37
Вопросы для повторения.....	40

Лекция 5. Способы преобразования чертежа	41
5.1. Способ замены плоскостей проекций.....	41
5.2. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций.....	43
5.2.1. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня.....	43
5.2.2. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую.....	44
5.2.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость.....	46
5.2.4. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.....	46
5.3. Примеры решения задач способом замены плоскостей проекций.....	48
5.4. Способ плоскопараллельного движения.....	52
5.5. Способ вращения вокруг проецирующей прямой.....	55
5.6. Способ вращения вокруг прямой уровня.....	57
Вопросы для повторения.....	58
Лекция 6. Линии и поверхности	59
6.1. Линии.....	59
6.1.1. Плоские кривые линии.....	60
6.1.2. Пространственные кривые линии.....	62
6.2. Поверхности.....	62
6.2.1. Гранные поверхности. Многогранники.....	63
6.2.2. Коническая поверхность общего вида.....	64
6.2.3. Цилиндрическая поверхность общего вида.....	65
6.2.4. Поверхности с плоскостью параллелизма.....	65
6.2.5. Поверхности вращения.....	66
6.2.6. Торсовые поверхности.....	70
6.2.7. Винтовые поверхности.....	73
6.2.8. Каркасные поверхности.....	74
6.3. Дополнительные сведения о линейчатых поверхностях.....	74
6.3.1. Размерность бесконечного множества.....	74
6.3.2. Образование линейчатой поверхности общего вида.....	76
6.3.3. Эллиптический однополостный гиперболоид.....	77
6.3.4. Гиперболический параболоид (косая плоскость).....	79
Вопросы для повторения.....	80
Лекция 7. Пересечение поверхности с плоскостью и с прямой линией	81
7.1. Пересечение многогранника с плоскостью.....	81
7.2. Пересечение кривой поверхности с плоскостью.....	82
7.3. Конические сечения.....	85
7.4. Пересечение поверхности с прямой линией.....	86
7.5. Пересечение поверхности с кривой линией.....	89
Вопросы для повторения.....	89
Лекция 8. Построение линии пересечения поверхностей (способ вспомогательных плоскостей)	90
8.1. Пересечение двух многогранников.....	91

8.2. Пересечение многогранника и кривой поверхности.....	92
8.3. Взаимное пересечение кривых поверхностей.....	94
8.4. Пересечение произвольной поверхности с проецирующей поверхностью	97
Вопросы для повторения.....	97
Лекция 9. Построение линии пересечения поверхностей (способ вспомогательных сфер).....	98
9.1. Способ концентрических сфер.....	98
9.2. Способ эксцентрических сфер.....	101
9.3. Примеры применения способа сфер.....	102
Вопросы для повторения.....	104
Лекция 10. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка.....	105
10.1. Взаимное пересечение поверхностей второго порядка. Особые случаи пересечения.....	105
10.2. Теорема 1 (о пересечении двух поверхностей второго порядка по плоской кривой).....	106
10.3. Теорема 2 (о двойном соприкосновении).....	107
10.4. Теорема Монжа.....	109
Вопросы для повторения.....	112
Лекция 11. Плоскость, касательная к поверхности.....	113
11.1. Общие определения.....	113
11.2. Три типа точек поверхности.....	114
11.3. Примеры построения касательных плоскостей.....	115
11.3.1. Касание в данной точке поверхности (задачи первого типа).....	116
11.3.2. Касание из внешней точки (задачи второго типа).....	118
11.3.3. Касание с учетом дополнительных условий (задачи третьего типа)	119
Вопросы для повторения.....	121
Лекция 12. Комбинированные задачи.....	122
12.1. Последовательность решения комбинированной задачи.....	122
12.2. Геометрические места точек или прямых, удовлетворяющих заданным условиям.....	123
12.3. Примеры решения комбинированных задач.....	123
Вопросы для повторения.....	134
Лекция 13. Развертки поверхностей.....	135
13.1. Построение разверток поверхностей многогранников.....	136
13.1.1. Развертка пирамиды.....	136
13.1.2. Развертка призмы.....	137
13.2. Построение разверток кривых развертывающихся поверхностей.....	138
13.2.1. Точная развертка поверхности прямого кругового конуса.....	139
13.2.2. Точная развертка поверхности усеченного кругового цилиндра.....	140

13.2.3. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса	140
13.2.4. Приближенная развертка поверхности наклонного конуса	142
13.2.5. Приближенная развертка поверхности усеченного конуса	142
13.2.6. Приближенная развертка поверхности наклонного цилиндра	144
13.3. Построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей	144
13.3.1. Построение условных разверток способом триангуляции	145
13.3.2. Построение условных разверток поверхностей вращения	146
Вопросы для повторения	149
Лекция 14. Компьютерная графика в начертательной геометрии	150
14.1. Система автоматизированного проектирования	150
14.2. Информационные революции	150
14.3. Двумерная и трехмерная графика	151
14.4. Аксонометрия как теоретическая основа трехмерной графики	152
14.4.1. Выбор плоскости проекций и направления проецирования	153
14.4.2. Показатели искажения	154
14.4.3. Ортогональная аксонометрия	155
14.4.4. Ортогональная изометрия	155
14.4.5. Ортогональная диметрия	156
14.4.6. Косоугольная аксонометрия	157
14.4.7. Основная теорема аксонометрии	158
14.5. Трехмерная графика в задачах начертательной геометрии	159
14.5.1. Позиционные задачи	159
14.5.2. Метрические задачи	161
14.5.3. Комбинированные (комплексные) задачи	162
14.5.4. Задачи на построение линии пересечения поверхностей	164
14.6. Кривые линии на экране компьютера	166
14.6.1. Кривые второго порядка	166
14.6.2. Кубическая парабола	167
14.6.3. Сплайны	169
14.6.4. Построение обводов	169
Вопросы для повторения	171
Лекция 15. Моделирование четырехмерного пространства	172
15.1. Точка, прямая, плоскость, гиперплоскость пространства E^4	172
15.2. Инцидентность элементов гиперплоскости пространства E^4	174
15.3. Пересечение подпространств четырехмерного пространства	175
15.3.1. Пересечение прямой с плоскостью	175
15.3.2. Пересечение двух плоскостей	176
15.3.3. Пересечение прямой и гиперплоскости	176
15.3.4. Пересечение плоскости и гиперплоскости	177
15.3.5. Пересечение двух гиперплоскостей	177
15.3.6. Размерность пространства пересечения	178
15.4. Перпендикулярность в четырехмерном пространстве	178
15.4.1. Перпендикуляр, восстановленный к плоскости проекций	179
15.4.2. Плоскость, вполне перпендикулярная плоскости проекций	180
15.4.3. Перпендикуляр, опущенный на плоскость проекций из произвольной точки пространства E^4	181

15.4.4. Гиперплоскость, перпендикулярная к плоскости проекций.....	181
15.4.5. Сопряженные элементы четырехмерного пространства.....	182
15.5. Позиционные задачи в четырехмерном пространстве.....	183
15.5.1. Прямая и плоскость.....	184
15.5.2. Прямая и гиперплоскость.....	185
15.5.3. Плоскость и гиперплоскость.....	185
15.5.4. Две плоскости.....	185
15.5.5. Две гиперплоскости.....	187
15.6. “Клетка” в четырехмерном пространстве.....	187
15.6.1. Гиперпятигранник.....	188
15.6.2. Гиперкуб.....	189
15.6.3. Гиперсвязка.....	189
Вопросы для повторения.....	190
Библиографический список.....	191

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия – раздел математики, изучающий *теорию методов отображения пространств различных структур и размерностей друг на друга*. В начертательной геометрии как учебной дисциплине рассматриваются *теоретические основы методов отображения трехмерного пространства на плоскость*.

Все многообразие плоских и пространственных геометрических фигур и отношения между ними составляют предмет начертательной геометрии. Различают позиционные (принадлежность, пересечение, параллельность) и метрические (расстояние, угол) отношения между фигурами.

В учебном курсе начертательной геометрии решаются две основные задачи. Первая задача (ее называют прямой задачей начертательной геометрии) – *построение изображения пространственной фигуры на плоскости*. Вторая задача (обратная задача начертательной геометрии) – *определение формы и размеров пространственной фигуры по ее плоскому изображению*.

Для решения обратной задачи пригодно не всякое изображение. Например, рисунок геометрической фигуры (призмы, конуса и др.), сделанный школьником на уроке рисования, является плоским изображением пространственной фигуры. Но рисунок дает лишь общее представление о фигуре, не позволяя определить ее истинную форму и размеры. Такое изображение не обладает *свойством обратимости*.

Если с помощью плоского изображения пространственной фигуры можно решить обратную задачу начертательной геометрии (определить истинную форму и размеры фигуры), то говорят, что изображение обладает свойством обратимости. Изображение пространственной фигуры, обладающее свойством обратимости, называют *чертежом*.

Основные задачи учебного курса начертательной геометрии впервые сформулировал Г. Монж [1]:

- 1) “...дать методы для изображения на листе чертежа, ... любых тел природы...”;
- 2) “...дать способ на основании точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, вытекающие из их формы и их взаимного расположения”.

Кроме построения плоских изображений пространственных фигур и определения размеров фигуры по ее обратимому изображению, в курсе начертательной геометрии рассматриваются разнообразные задачи, которые условно разделяют на позиционные, метрические и комбинированные.

Позиционными называют задачи, в которых требуется определить взаимное положение (принадлежность, параллельность, пересечение) двух или более фигур, заданных на чертеже. Например, если на чертеже заданы две пересекающиеся поверхности, то определяют линию их пересечения.

Метрическими называют задачи, в которых требуется найти линейные и угловые размеры данной фигуры или определить метрические свойства, обусловленные взаимным положением двух и более фигур (углы между прямыми и плоскостями, расстояние между фигурами и т.д.).

Комбинированными называют геометрические задачи, в которых содержатся как позиционные, так и метрические условия.

Таким образом, *в курсе начертательной геометрии изучают как теоретические основы построения изображений, так и способы графического решения пространственных задач при помощи этих изображений*.

Теория построения плоских изображений пространственных фигур, разработанная Г. Монжем, сохраняет свой геометрический характер при переходе к многомерным пространствам. В лекции 15 рассмотрен конструктивный способ отображения четырехмерного пространства на плоскость с помощью обобщенного чертежа Монжа.

Принятые обозначения

1. Точки обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, \dots или цифрами: $1, 2, 3, \dots$

2. Прямые и кривые линии, произвольно расположенные относительно плоскостей проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, \dots

3. Линии, занимающие особое положение, обозначаются:

h – горизонтальная прямая уровня (горизонталь);

f – фронтальная прямая уровня (фронталь);

p – профильная прямая уровня;

x, y, z – оси абсцисс (широт), ординат (глубин) и аппликат (высот);

k – постоянная прямая чертежа (линия преломления).

4. Поверхности (в том числе – плоскости) обозначаются заглавными буквами греческого алфавита: Γ (гамма), Δ (дельта), Θ (тета), Λ (лямбда), Σ (сигма), Ψ (пси), Φ (фи), Π (пи), Ω (омега).

5. Плоскости проекций обозначаются буквой Π с добавлением нижнего индекса:

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций,

Π_2 – фронтальная плоскость проекций,

Π_3 – профильная плоскость проекций.

6. Проекции точек, линий, поверхностей обозначаются теми же буквами или цифрами, что и сами точки, линии, поверхности, но с добавлением нижнего индекса:

$A_1, B_1, \dots; a_1, b_1, \dots; \Delta_1, \Theta_1, \dots$ – горизонтальные проекции;

$A_2, B_2, \dots; a_2, b_2, \dots; \Delta_2, \Theta_2, \dots$ – фронтальные проекции;

$A_3, B_3, \dots; a_3, b_3, \dots; \Delta_3, \Theta_3, \dots$ – профильные проекции.

7. Для обозначения несобственных (бесконечно удаленных) элементов используется верхний индекс ∞ : $A^\infty, m^\infty, \Psi^\infty$.

8. Также используются следующие символы:

\in – принадлежность точки (элемента множества) геометрической фигуре (множеству): $A \in m, B \in \Theta$;

\subset – принадлежность геометрической фигуры (подмножества) данной фигуре (множеству): $m \subset \Sigma, \Delta \supset t$;

\cap – пересечение множеств: $a \cap \Omega, \Delta \cap \Sigma$;

$=$ – совпадение, результат, присвоение: $A_1 = B_1, A = m \cap \Sigma$;

\equiv – тождество: $\Delta_1 \equiv \Pi_1$;

\parallel – параллельность: $a \parallel m, b \parallel \Sigma$;

\perp – перпендикулярность: $t \perp \Phi$;

Если символ перечеркнут наклонной чертой, то это означает отсутствие данного свойства: $A \not\subset m$ (точка A не принадлежит прямой m).

Лекция 1

ПРЕДМЕТ И ОСНОВНОЙ МЕТОД НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В учебном курсе начертательной геометрии изучают *теоретические основы построения плоских изображений пространственных фигур и способы графического решения пространственных задач при помощи этих изображений.*

Предмет начертательной геометрии – *все многообразие геометрических фигур трехмерного пространства.*

Известны три основных способа построения изображений: аксиоматический, аналитический и конструктивный. При аксиоматическом способе связь между фигурами пространства и их изображениями устанавливается посредством системы аксиом. При аналитическом способе точкам ставятся в соответствие их координаты, поверхностям – уравнения, линиям – системы уравнений. При конструктивном способе между фигурой пространства и ее изображением устанавливается непосредственная геометрическая связь с помощью *проецирующих линий и поверхностей.*

В курсе начертательной геометрии рассматривают конструктивный способ построения изображений. Поэтому основным методом начертательной геометрии является *метод проецирования.*

1.1. Центральное и параллельное проецирование

Чтобы построить изображение (проекцию) произвольной точки A , выбирают плоскость проекций Π_1 и точку S , которую называют *центром проекций* (рис. 1.1). Проводят проецирующую прямую SA и отмечают точку A_1 пересечения прямой SA с плоскостью проекций. Такое проецирование называют *центральной*, а точку A_1 называют *центральной проекцией* точки A на плоскость Π_1 .

На плоскости Π_1 можно построить проекции всех точек A, B, C, \dots пространства, за исключением тех, которые лежат в плоскости, параллельной Π_1 и проходящей через центр S . Например, через точку D (см. рис. 1.1) проходит проецирующий луч SD , параллельный плоскости проекций Π_1 . В этом случае считают, что проекция D_1 точки D находится в бесконечности, а евклидово пространство дополняют *несобственными* (бесконечно удаленными) точками. Получается *расширенное евклидово пространство*.

Всякая прямая такого пространства пополняется одной несобственной точкой. У всякой плоскости есть одна несобственная прямая, состоящая из несобственных точек всех прямых данной плоскости. Все несобственные точки и прямые расширенного евклидова пространства принадлежат несобственной плоскости этого пространства.

В расширенном трехмерном евклидовом пространстве плоскость и прямая линия всегда пересекаются (в собственной или несобственной точке). Две плоскости пересекаются по собственной или несобственной прямой. Прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются (в собственной или несобственной точке).

Если центр проекций S “удалить в бесконечность”, то проецирующие лучи становятся параллельны друг другу и определяют *направление*

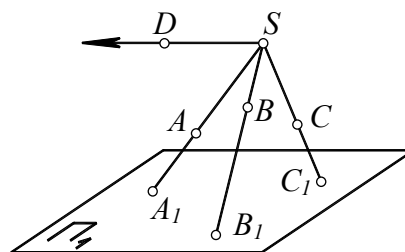


Рис. 1.1

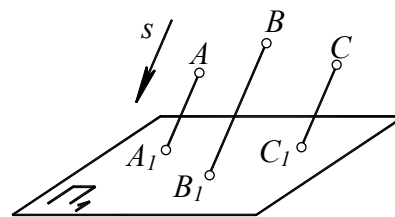


Рис. 1.2

проецирования s (рис. 1.2). Такое проецирование называют *параллельным*, а точки A_1, B_1, C_1 – называют *параллельными проекциями* точек A, B, C . Параллельное проецирование – частный случай центрального проецирования.

1.2. Свойства параллельного проецирования

1. Проекция точки есть точка.
2. Проекция прямой – в общем случае прямая. Но если прямая параллельна направлению проецирования, то проекция прямой вырождается в точку (прямая MN на рис. 1.3). Плоскость Δ , образованная проецирующими лучами, называется *проецирующей плоскостью*. Проекция прямой образуется на пересечении плоскости Δ с плоскостью проекций Π_1 .

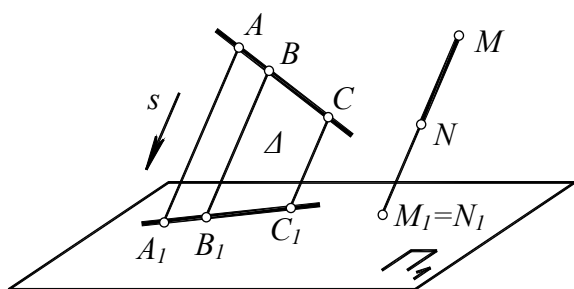


Рис. 1.3

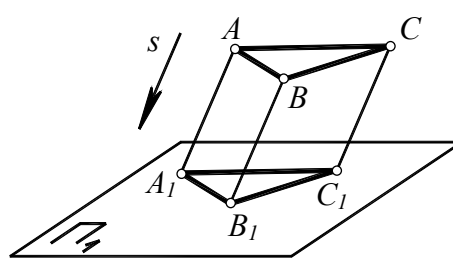


Рис. 1.4

Следствие 1. Для построения проекции прямой достаточно построить проекцию двух ее точек.

Следствие 2. Если точка принадлежит прямой линии, то проекция точки принадлежит проекции прямой линии.

3. Если плоская геометрическая фигура параллельна плоскости проекций (рис. 1.4), то проекция фигуры *конгруэнтна* самой фигуре (конгруэнтными называют фигуры, совпадающие при наложении).

4. Проекции параллельных прямых параллельны (рис. 1.5).

5. Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения их проекций (рис. 1.6).

6. Проекция предмета не меняется при параллельном переносе плоскости проекций (рис. 1.7).

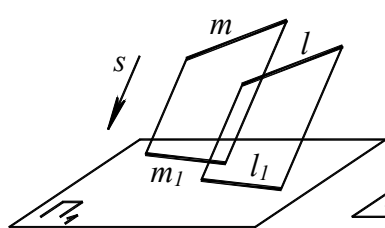


Рис. 1.5

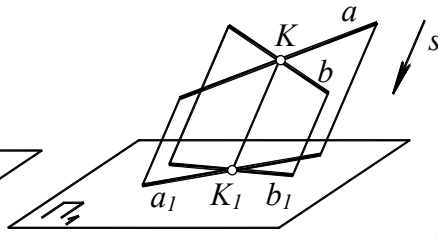


Рис. 1.6

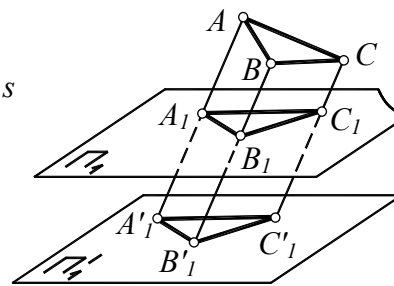


Рис. 1.7

7. Если точка делит отрезок прямой в каком-то отношении, то проекция точки делит проекцию отрезка в таком же отношении. Например, на рис. 1.3 точка B делит отрезок AC в отношении $AB:AC=1:3$. Проекция B_1 точки B делит проекцию A_1C_1 отрезка AC в точно таком же отношении: $A_1B_1:A_1C_1=AB:AC=1:3$.

1.3. Ортогональное проецирование

Если направление проецирования перпендикулярно к плоскости проекций, то параллельное проецирование называют *ортогональным* (прямоугольным), а проекцию предмета называют *ортогональной проекцией*. Например, на рис. 1.8 показана ортогональная проекция A_1 точки A на плоскость Π_1 .

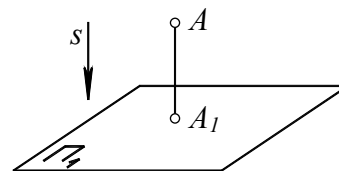


Рис. 1.8

Все вышеперечисленные свойства параллельного проецирования справедливы для ортогонального проецирования. Требуется количественное дополнение только седьмое свойство, в соответствии с которым точка B делит отрезок AC в том же отношении, в каком проекция B_1 точки B делит проекцию A_1C_1 отрезка AC , то есть $A_1B_1:A_1C_1=AB:AC$ (рис. 1.9).

Последнее соотношение можно переписать в виде: $A_1C_1:AC=A_1B_1:AB$. В случае ортогонального проецирования это соотношение можно вычислить, зная угол наклона α отрезка AC к плоскости проекций. Из рассмотрения прямоугольного треугольника ACC_0 и учитывая, что $AC_0=A_1C_1$, получаем:

$$A_1C_1 = AC \cdot \cos \alpha .$$

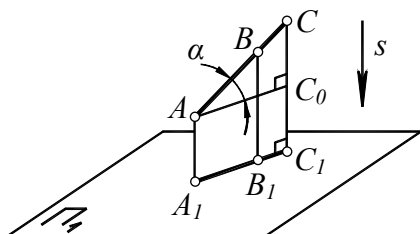


Рис. 1.9

Отсюда следует, что $A_1C_1:AC=\cos \alpha$, то есть в случае ортогонального проецирования отношение длины проекции отрезка к длине самого отрезка равно косинусу угла наклона отрезка к плоскости проекций. Величину $\cos \alpha$ называют “коэффициентом искажения”. Коэффициент искажения показывает, во сколько раз длина проекции отрезка меньше, чем длина самого отрезка. Например, если угол наклона отрезка AC к плоскости Π_1 составляет 60° , то

коэффициент искажения равен $\cos 60^\circ=0,5$. Это означает, что длина A_1C_1 проекции отрезка AC в два раза меньше, чем истинная длина самого отрезка.

Рассмотренное дополнительное свойство ортогонального проецирования будет использовано в следующей лекции для определения истинной длины отрезка по его изображению на ортогональном чертеже.

Вопросы для повторения

1. Что составляет предмет начертательной геометрии?
2. Какой основной метод построения плоских изображений пространственных фигур используется в начертательной геометрии?
3. Перечислить основные свойства параллельного проецирования.
4. В каком случае проекция плоской фигуры конгруэнтна самой фигуре?
5. Дать определение понятию “ортогональное проецирование”.
6. Как определить истинную длину отрезка, если известна длина его ортогональной проекции и известен угол наклона отрезка к плоскости проекций?

Лекция 2

ЧЕРТЕЖИ ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

В 1784 году английский изобретатель Дж. Уатт разработал и запатентовал первую универсальную паровую машину. С небольшими усовершенствованиями она более ста лет оставалась единственным промышленным двигателем: приводила в движение станки и паровозы, пароходы и даже первые автомобили. Вызванная изобретением паровой машины научно-техническая революция и последующее развитие промышленного производства потребовало разработки простых и точных изображений деталей машин и механизмов.

Французский математик и инженер Г. Монж (1746 – 1818 гг.) предложил получать чертежи пространственных предметов путем их ортогонального проецирования на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций предмета, расположенных на одной плоскости, называют *комплексным чертежом*. Рассмотрим комплексные чертежи основных геометрических фигур трехмерного пространства – точки, прямой и плоскости.

2.1. Комплексный чертеж точки

На рис. 2.1 изображена прямоугольная (декартова) система координат $xOyOz$. Координатную плоскость xOy называют *горизонтальной плоскостью проекций Π_1* , плоскость xOz называют *фронтальной плоскостью проекций Π_2* , плоскость yOz – *профильной плоскостью проекций Π_3* . Ортогонально проецируя точку A на плоскости проекций Π_1, Π_2, Π_3 , получают горизонтальную A_1 , фронтальную A_2 и профильную A_3 проекции точки.

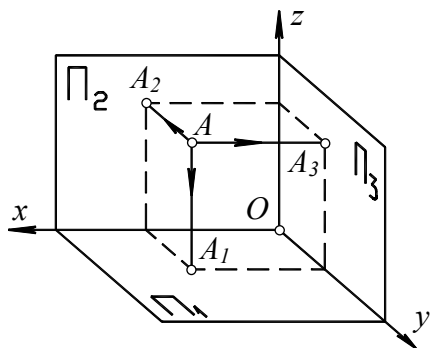


Рис. 2.1

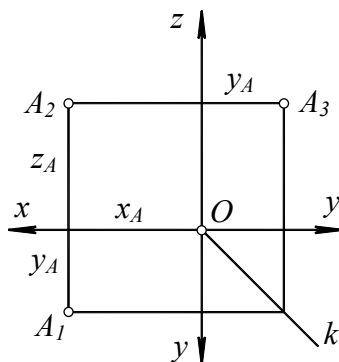


Рис. 2.2

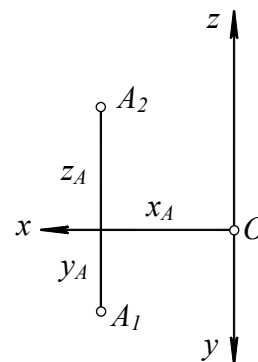


Рис. 2.3

Мысленно повернем плоскость Π_1 вокруг оси x , а плоскость Π_3 – вокруг оси z до совмещения этих плоскостей с плоскостью Π_2 . Получаем комплексный *трехпроекционный* чертеж точки (рис. 2.2). На этом чертеже проекции точки соединены тонкими линиями, которые называют *линиями связи*. Запишем условия связи между проекциями.

1. Фронтальная A_2 и горизонтальная A_1 проекции точки соединены вертикальной линией связи.

2. Фронтальная A_2 и профильная A_3 проекции точки соединены горизонтальной линией связи.

3. Горизонтальная A_1 и профильная A_3 проекции точки соединены ломаной линией связи. Точка излома этой линии находится на прямой k , которую называют *постоянной*

прямой чертежа. Постоянная прямая k проходит через начало координат и составляет 45° с осью x .

На рис. 2.3 показан комплексный *двухпроекционный* чертеж этой же точки A . Двух проекций достаточно, чтобы по чертежу определить координаты x_A, y_A, z_A точки A , то есть двухпроекционный чертеж обладает свойством обратимости.

Трехпроекционный чертеж (см. рис. 2.2) содержит избыточную информацию. Действительно, зная две проекции точки, например, A_1 и A_2 , нетрудно построить ее третью проекцию A_3 с помощью условий связи.

2.2. Комплексные чертежи прямых линий

Аксиома. *Через две различные точки пространства проходит единственная прямая линия.* Следовательно, положение прямой линии в пространстве вполне определяется двумя ее точками.

Прямая линия проецируется в прямую линию. Чтобы на комплексном чертеже задать прямую линию, достаточно указать проекции двух ее точек A, B . Проекции прямой пройдут через одноименные проекции точек A, B .

Прямая линия может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2, Π_3 . Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют *прямой общего положения*. Если прямая параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую прямую называют *прямой частного положения*.

2.2.1. Комплексный чертеж прямой общего положения

Прямая l общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. Зададим на чертеже две точки A и B , разности координат которых по осям x, y, z не равны нулю (рис. 2.4):

$$\Delta x = x_B - x_A \neq 0, \quad \Delta y = y_B - y_A \neq 0, \quad \Delta z = z_B - z_A \neq 0.$$

Соединяя одноименные проекции A_1, B_1 и A_2, B_2 , получаем проекции прямой общего положения: $l_1 = A_1B_1, l_2 = A_2B_2$.

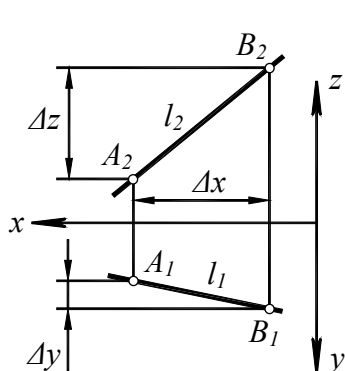


Рис. 2.4

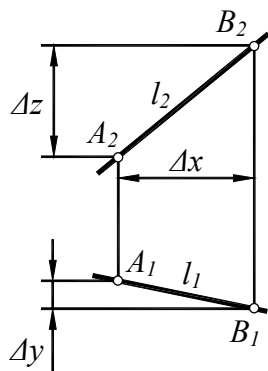


Рис. 2.5

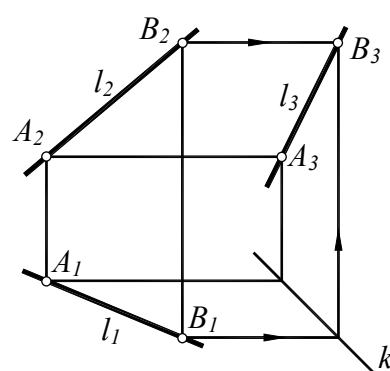


Рис. 2.6

На чертеже рис. 2.4 показаны оси координат x, y, z . Такой чертеж называют *осным чертежом*. Оси координат на чертеже играют роль базы для отсчета расстояний от фигуры до фиксированных плоскостей проекций. В технической практике обычно в этом нет необходимости, так как для определения формы и размеров предмета важно знать лишь относительное расположение отдельных его точек. Поэтому на чертеже, как пра-

вило, не указывают оси координат. Чертеж, на котором не показаны оси координат, называют *безосным чертежом*.

На рис. 2.5 дан безосный чертеж прямой общего положения l , проходящей через точки A, B . Такой чертеж обратим, так как с его помощью можно точно определить относительное положение точек A, B : точка B *выше* точки A на величину Δz , точка A *левее* точки B на величину Δx , точка B *перед* точкой A на величину Δy .

Для построения третьей проекции на безосном чертеже используют условия связи между проекциями. Третью проекцию какой-либо точки, например, точки A , указывают на горизонтальной линии связи, идущей от A_2 . Расстояние между A_2 и A_3 выбирается произвольно (рис. 2.6). Затем чертят ломаную линию связи, соединяющую проекции A_1 и A_3 . Через точку излома проводят постоянную прямую чертежа k . Третья проекция B_3 точки B будет найдена на пересечении двух линий связи: горизонтальной B_2B_3 и ломаной B_1B_3 .

2.2.2. Определение натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника

На рис. 2.7, *а* показан произвольно расположенный в пространстве отрезок AB и его горизонтальная проекция A_1B_1 . Длина проекции меньше, чем истинная длина отрезка: $A_1B_1 = AB \cos \alpha$, где угол α – угол наклона отрезка к плоскости Π_1 (см. п. 1.3).

Рассмотрим прямоугольный треугольник $AB'B$ (см. рис. 2.7, *а*). Один его катет (катет AB') равен горизонтальной проекции A_1B_1 отрезка AB , другой катет (катет BB') равен разности высот Δz концов отрезка. Гипотенуза этого треугольника – сам отрезок AB . Угол α , противолежащий катету Δz , равен истинному углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

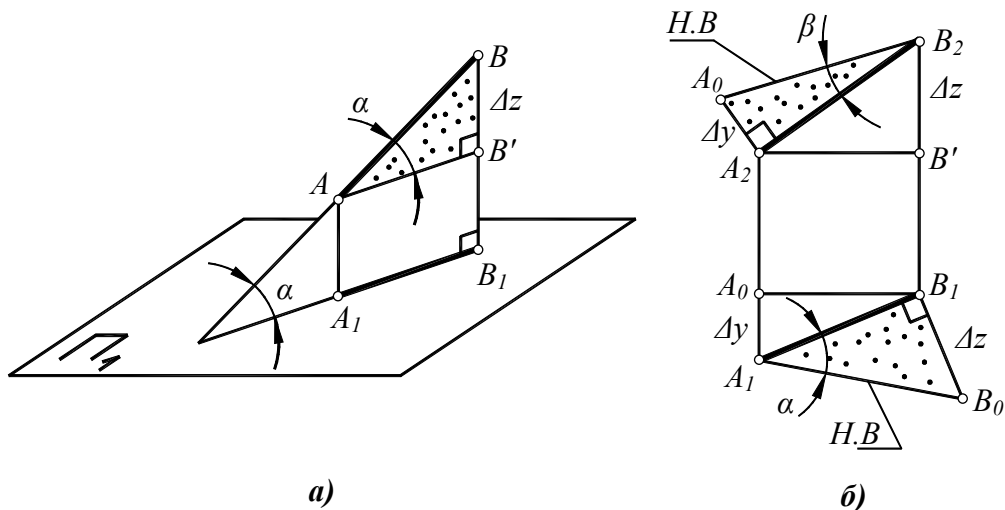


Рис. 2.7

Построим на двухпроекционном чертеже отрезка вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$ (рис. 2.7, *б*). Катет A_1B_1 этого треугольника совпадает с горизонтальной проекцией отрезка AB , а катет B_1B_0 равен разности высот Δz концов отрезка.

Катеты треугольника $A_1B_1B_0$ на рис. 2.7, *б* равны катетам треугольника $AB'B$ на рис. 2.7, *а*. Поэтому гипотенуза A_1B_0 вспомогательного треугольника $A_1B_1B_0$ равна гипотенузе треугольника $AB'B$, а следовательно – равна истинной длине отрезка AB . Угол α во вспомогательном треугольнике $A_1B_1B_0$, противолежащий катету $B_1B_0 = \Delta z$, равен истинному углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Таким образом, истинная длина отрезка AB равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого совпадает с горизонтальной проекцией отрезка, а другой катет равен разности высот концов отрезка.

Горизонтальная и фронтальная плоскости проекций вполне “равноправны”, поэтому для определения длины отрезка можно построить вспомогательный прямоугольный треугольник $A_2B_2A_0$, один из катетов которого совпадает не с горизонтальной, а с фронтальной проекцией A_2B_2 отрезка. При этом в качестве другого катета A_2A_0 следует взять не разность высот, а разность глубин Δy концов отрезка. Гипотенуза построенного таким образом прямоугольного треугольника также равна истинной длине отрезка AB , а угол β , противолежащий катету Δy , равен истинному углу наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций Π_2 (см. рис. 2.7, б).

Рассмотренное построение формулируется в виде следующего правила.

Чтобы определить истинную длину отрезка AB прямой общего положения и углы его наклона к плоскостям проекций Π_1, Π_2 , надо на чертеже построить два вспомогательных прямоугольных треугольника. Катеты одного треугольника: горизонтальная проекция A_1B_1 и разность высот Δz концов отрезка. Катеты другого треугольника: фронтальная проекция A_2B_2 и разность глубин Δy концов отрезка. Гипотенузы этих треугольников равны между собой и равны истинной длине отрезка, а углы, противолежащие катетам Δz и Δy , равны углам наклона отрезка к плоскостям Π_1 и Π_2 соответственно.

2.2.3. Построение отрезка заданной длины

В некоторых задачах требуется не просто определить истинную длину данного на чертеже отрезка, а начертить отрезок заранее заданной длины, лежащий на данной прямой. Такое построение также выполняется способом прямоугольного треугольника.

Задача. На комплексном двухпроекционном чертеже дана прямая l общего положения и точка A на ней (рис. 2.8). Требуется вдоль данной прямой от точки A отложить отрезок заданной длины m .

Решение. Отмечаем на прямой l произвольную точку R . На горизонтальной проекции отрезка строим прямоугольный треугольник $A_1R_1R_0$, катет которого R_1R_0 равен разности высот Δz точек A и R . Гипотенуза A_1R_0 треугольника $A_1R_1R_0$ равна истинной длине отрезка AR . Откладываем вдоль гипотенузы A_1R_0 расстояние m и отмечаем точку B_0 . “Возвращая” точку B_0 на проекции данной прямой, получаем чертеж отрезка AB , длина которого равна заданной величине m .

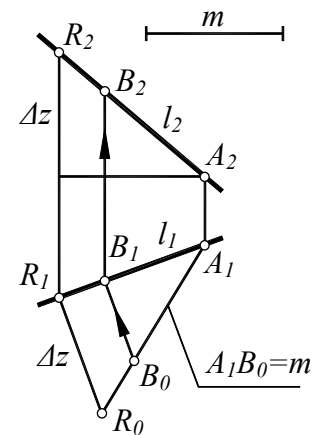


Рис. 2.8

2.2.4. Комплексные чертежи прямых частного положения

Прямые частного положения разделяются на две группы: прямые уровня и проецирующие прямые.

Прямая уровня – прямая, параллельная одной из плоскостей проекций.

Проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная одной из плоскостей проекций.

2.2.4.1. Прямые уровня

Горизонталь h – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 2.9). Отрезок AB горизонтали и угол β ее наклона к фронтальной плоскости проекций проектируются на Π_1 в натуральную величину.

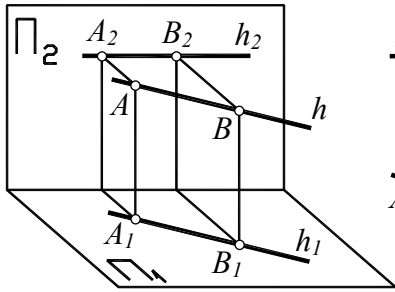


Рис. 2.9. Горизонталь

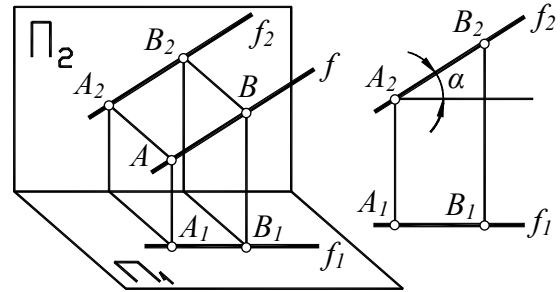


Рис. 2.10. Фронталь

Фронталь f – прямая линия, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 2.10). Отрезок AB фронтали и угол α ее наклона к горизонтальной плоскости проекций проектируются на Π_2 в натуральную величину.

Профильная прямая p – прямая линия, параллельная профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 2.11). Отрезок AB профильной прямой, а также углы α и β наклона этой прямой к плоскостям Π_1 и Π_2 проектируются на плоскость Π_3 в натуральную величину. Отрезок AB профильной прямой рекомендуется изображать на чертеже в трех проекциях, как показано на рис. 2.11. В этом случае чертеж становится более наглядным.

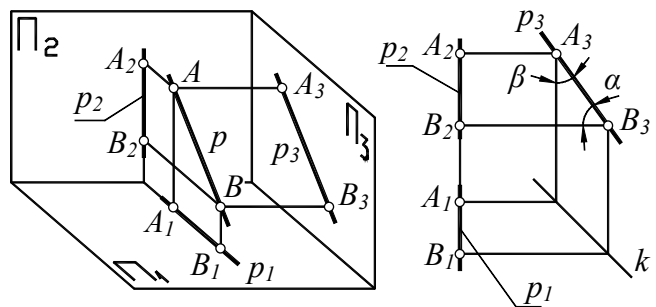


Рис. 2.11. Профильная прямая

2.2.4.2. Проецирующие прямые

Горизонтально-проецирующая прямая – прямая q , перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 2.12). Горизонтальная проекция q_1 этой прямой вырождается в точку.

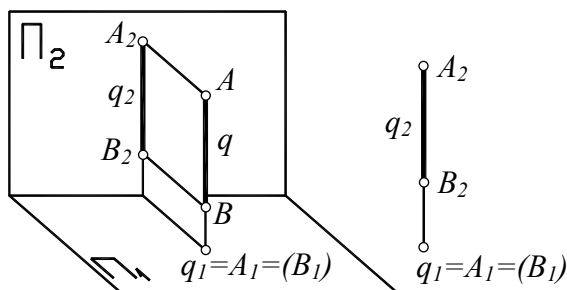


Рис. 2.12. Горизонтально-проецирующая прямая

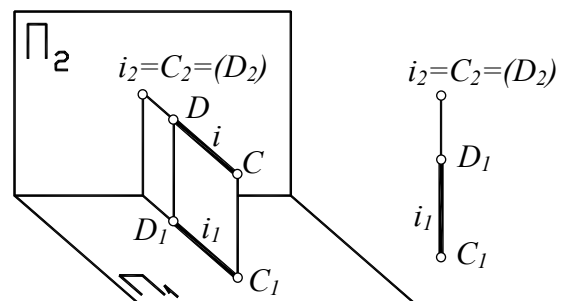


Рис. 2.13. Фронтально-проецирующая прямая

Точки A и B на прямой q называют *горизонтально-конкурирующими*, так как они “конкурируют” друг с другом относительно горизонтальной плоскости проекций: точка A *выше* точки B . При взгляде сверху точка A заслоняет точку B . Говорят, что горизонтальная проекция точки B “невидима”, так как она закрыта горизонтальной проекцией точки A . Поэтому на чертеже (см. рис. 2.12) проекция B_1 точки B заключена в скобки. Горизонтально-конкурирующие точки применяют для определения видимости проекций геометрических фигур на плоскости Π_1 .

Фронтально-проецирующая прямая – прямая i , перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 2.13). Фронтальная проекция i_2 этой прямой вырождается в точку.

Точки C и D на прямой i называют фронтально-конкурирующими, так как они “конкурируют” друг с другом относительно фронтальной плоскости проекций: точка C находится *перед* точкой D . При взгляде спереди точка C заслоняет точку D , то есть фронтальная проекция точки D невидима. Поэтому на чертеже (см. рис. 2.13) проекция D_2 точки D заключена в скобки. Фронтально-конкурирующие точки применяют для определения видимости проекций геометрических фигур на плоскости Π_2 .

Профильно-проецирующая прямая – прямая j , перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 2.14). Профильная проекция j_3 этой прямой вырождается в точку.

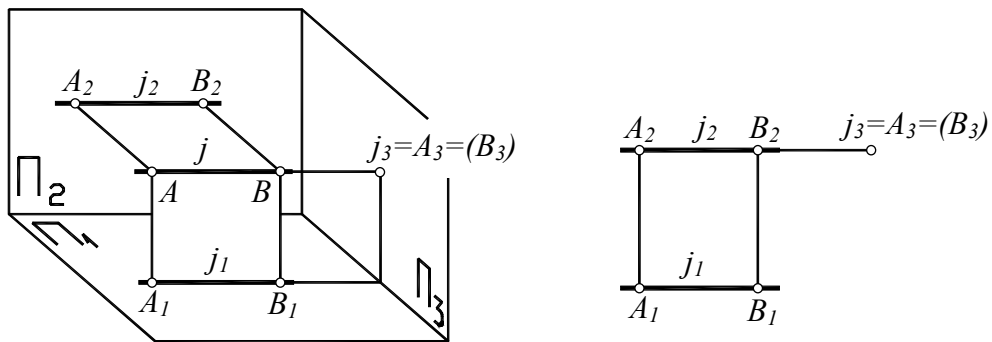


Рис. 2.14. Профильно-проецирующая прямая

Точки A и B на прямой j называют *профильно-конкурирующими*, так как они “конкурируют” друг с другом относительно профильной плоскости проекций: точка A *левее* точки B . При взгляде слева точка A заслоняет точку B , то есть профильная проекция точки B невидима. Поэтому на чертеже (см. рис. 2.14) проекция B_3 точки B заключена в скобки. Профильно-конкурирующие точки применяют для определения видимости проекций геометрических фигур на плоскости Π_3 .

2.2.5. Принадлежность точки к прямой линии

Если точка лежит на прямой, то проекции точки лежат на проекциях этой прямой. Например, точка C на рис. 2.15 лежит на прямой a , так как проекции C_1 и C_2 точки C лежат на проекциях a_1 и a_2 прямой a . Точки 1 и 2 также принадлежат прямой a .

Точки A, B, D не лежат на прямой a . Точка A и точка 1 – горизонтально-конкурирующие точки, причем точка A *выше* точки 1 . Значит, точка A находится *выше* прямой a . Точки B и 2 – фронтально-конкурирующие, причем точка B находится *перед* точкой 2 . Значит, точка B находится *перед* прямой a .

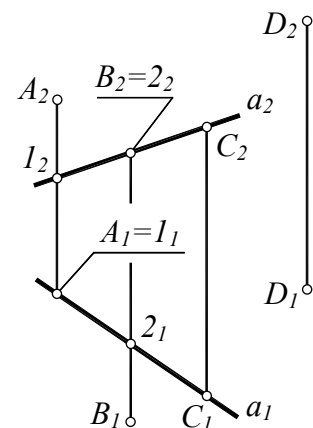


Рис. 2.15

2.2.6. Относительное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут *пересекаться*, быть *параллельными* (то есть пересекаться в несобственной точке) или *скрещиваться*.

На рис. 2.16 показан чертеж прямых a и b , пересекающихся в точке K . Проекции K_1 и K_2 точки K находятся на одной вертикальной линии связи.

На рис. 2.17 представлен чертеж параллельных прямых m и n . Одноименные проекции этих прямых параллельны, следовательно, прямые m и n параллельны.

На рис. 2.18 показан чертеж двух скрещивающихся прямых c и d . Прямые называют скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны.

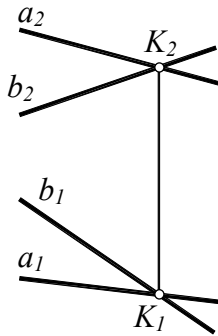


Рис. 2.16

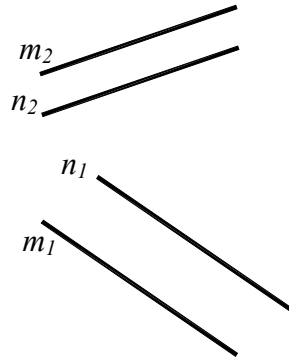


Рис. 2.17

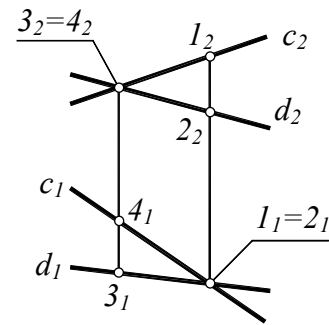


Рис. 2.18

Если две прямые скрещиваются, то с помощью горизонтально-конкурирующих точек можно определить, какая прямая *выше* другой. Например, на рис. 2.18 показана пара горизонтально-конкурирующих точек 1 и 2 . Точка 1 , принадлежащая прямой c , расположена выше точки 2 , лежащей на прямой d . Следовательно, прямая c располагается в пространстве *выше*, чем прямая d (прямая c проходит *над* прямой d).

С помощью фронтально-конкурирующих точек определяют, какая из двух скрещивающихся прямых находится *перед* другой. Например, на рис. 2.18 отмечены фронтально-конкурирующие точки 3 и 4 . Точка 3 , лежащая на прямой d , располагается перед точкой 4 , лежащей на прямой c . Следовательно, прямая d – *перед* прямой c .

2.3. Комплексный чертеж плоскости

Аксиома. *Через три различные точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.* Следовательно, положение плоскости в пространстве вполне определяется тремя ее точками. Чтобы на комплексном чертеже задать плоскость, надо указать проекции трех точек A, B, C , принадлежащих этой плоскости (рис. 2.19).

Но такой чертеж лишен наглядности. Чтобы сделать чертеж плоскости более наглядным, можно соединить заданные точки A, B, C отрезками прямых (рис. 2.20). В результате получается чертеж плоской фигуры (треугольника). Следовательно, плоскость на чертеже может быть задана проекциями плоской фигуры.

Если соединить отрезком прямой только пару точек A, C , то получим чертеж прямой линии AC и точки B , которые вполне определяют положение плоскости в пространстве (рис. 2.21). Поэтому плоскость на чертеже может быть задана прямой линией и точкой.

Если плоскость на чертеже задана треугольником ABC , то одну из сторон треугольника можно стереть. Получим чертеж двух пересекающихся прямых, которые фикси-

руют положение плоскости в пространстве. Следовательно, плоскость на чертеже может быть задана двумя пересекающимися прямыми (рис. 2.22).

Через две параллельные прямые в пространстве проходит единственная плоскость. Поэтому на чертеже плоскость может быть задана проекциями двух параллельных прямых m, n (рис. 2.23).

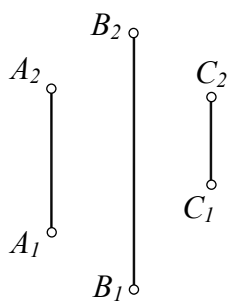


Рис. 2.19

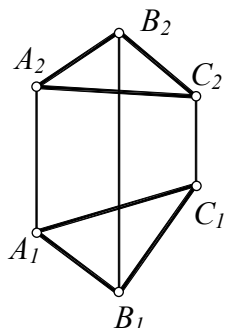


Рис. 2.20

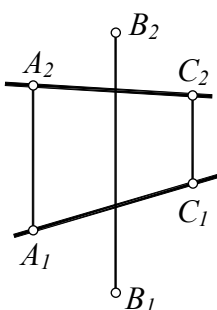


Рис. 2.21

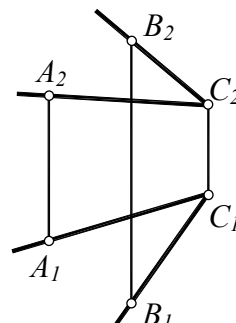


Рис. 2.22

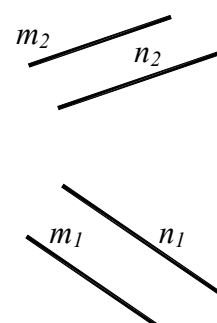


Рис. 2.23

Таким образом, из основного способа задания плоскости (проекциями трех точек, рис. 2.19) следуют еще четыре способа, позволяющие более наглядно изобразить плоскость на чертеже:

- проекциями плоской фигуры (см. рис. 2.20);
- проекциями прямой и точки (см. рис. 2.21);
- проекциями двух пересекающихся прямых (см. рис. 2.22);
- проекциями двух параллельных прямых (см. рис. 2.23).

Плоскость может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2, Π_3 . Если плоскость не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют *плоскостью общего положения*. Если плоскость параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую плоскость называют *плоскостью частного положения*.

2.3.1. Прямые и точки, принадлежащие плоскости общего положения

Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. Пусть плоскость Σ общего положения задана на чертеже двумя пересекающимися прямыми a и b (рис. 2.24).

Для построения точки или прямой, принадлежащей данной плоскости, используют аксиому, известную из школьного курса геометрии [13]: *если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости*. Из этой аксиомы следуют признаки принадлежности точки и прямой к плоскости.

Признак 1. Точка лежит в плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в данной плоскости.

Признак 2. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через две точки, лежащие в этой плоскости.

Признак 3. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через какую-либо точку плоскости и при этом параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (то есть проходит через две точки плоскости, одна из которых несобственная).

Например, на рис. 2.24 точки 1 и 2 лежат в плоскости Σ , так как они принадлежат прямым a и b , лежащим в этой плоскости (признак 1). Прямая l , проходящая через точки 1 и 2 , принадлежит плоскости Σ (признак 2). На этом же чертеже показана прямая b' ,

параллельная прямой b и проходящая через точку 3 , лежащую в плоскости Σ . Прямая b' также принадлежит плоскости Σ (признак 3).

Рассмотрим примеры применения признаков принадлежности в задачах начертательной геометрии.

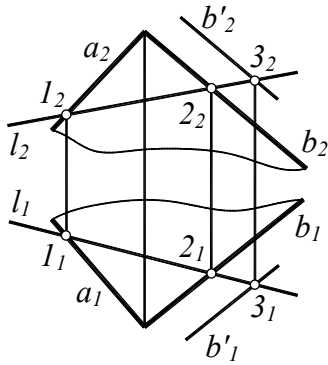


Рис. 2.24

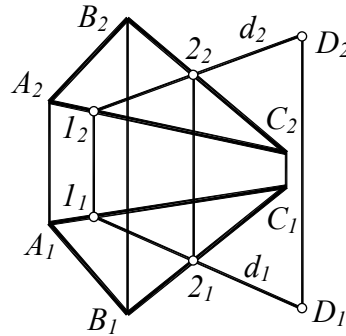


Рис. 2.25

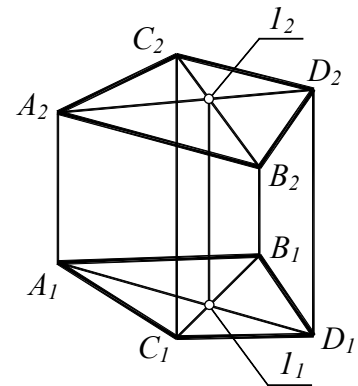


Рис. 2.26

Задача 1. Плоскость Γ задана на чертеже треугольником ABC (рис. 2.25). Дана фронтальная проекция D_2 точки D , принадлежащей плоскости $\Gamma(ABC)$. Построить горизонтальную проекцию D_1 точки D .

В плоскости треугольника проводим прямую d , фронтальная проекция которой d_2 проходит через заданную проекцию D_2 точки D . Находим горизонтальную проекцию d_1 прямой d с помощью точек $1, 2$, “прикрепляющих” прямую d к треугольнику ABC . Искомая горизонтальная проекция D_1 точки D находится на горизонтальной проекции d_1 прямой d .

Задача 2. Построить чертеж плоского четырехугольника.

Произвольно зададим на чертеже три вершины A, B, C искомого плоского четырехугольника (рис. 2.26). Одну из проекций четвертой вершины D также можно задать произвольно, но другая проекция точки D должна быть построена из условия принадлежности точки D плоскости ABC (см. рис. 2.25). Если построение выполнено правильно, то диагонали четырехугольника пересекутся между собой (точка I на рис. 2.26).

2.3.2. Главные линии плоскости

Главными линиями плоскости называют горизонталь h , фронталь f и профильную прямую p , лежащие в данной плоскости.

Пусть плоскость Σ задана проекциями треугольника ABC (рис. 2.27). Через любую точку данной плоскости можно провести горизонталь, лежащую в этой плоскости. Например, надо начертить в плоскости Σ горизонталь, проходящую через точку A . Построение горизонтали h начинают с построения ее фронтальной проекции h_2 . Координаты по оси z всех точек горизонтали одинаковы: $\Delta z = 0$. Горизонтальную проекцию h_1 горизонтали строят из условия ее принадлежности данной плоскости $\Sigma(ABC)$.

Построение фронтали f , лежащей в плоскости Σ , начинают с построения горизонтальной проекции f_1 фронтали. Координаты по оси y всех точек фронтали одинаковы: $\Delta y = 0$. Фрон-

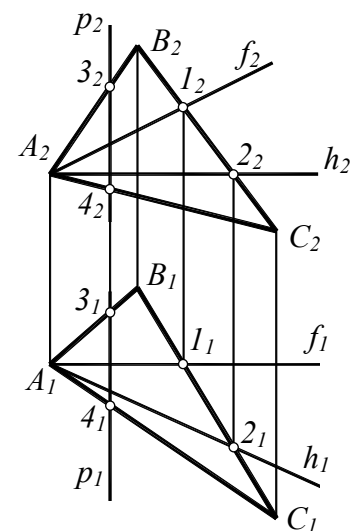


Рис. 2.27

тальную проекцию f_2 фронтали строят из условия принадлежности ее к данной плоскости.

Профильная прямая p , принадлежащая данной плоскости, определяется точками 3 и 4, принадлежащими данной плоскости и расположенными на равных расстояниях от плоскости проекций Π_3 (см. рис. 2.27). Координаты всех точек профильной прямой по оси x одинаковы: $\Delta x = 0$.

В плоскости можно провести множество горизонталей, фронталей и профильных прямых. Все горизонталы данной плоскости параллельны между собой. Точно так же параллельны между собой все фронталы и все профильные прямые, лежащие в одной плоскости.

2.3.3. Комплексные чертежи плоскостей частного положения

Плоскости частного положения разделяются на две группы: проецирующие плоскости и плоскости уровня.

Проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций.

Плоскость уровня – плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций.

2.3.3.1. Проецирующие плоскости

Горизонтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (плоскость Σ на рис. 2.28). Горизонтальная проекция плоскости Σ вырождается в прямую линию Σ_1 .

Фронтальная проекция этой плоскости представляет собой поле точек, совпадающее с полем Π_2 , то есть $\Sigma_2 \equiv \Pi_2$. Горизонтальная проекция любой фигуры, лежащей в плоскости Σ (например, треугольника ABC) совпадает с горизонтальной проекцией Σ_1 плоскости Σ , то есть $A_1B_1C_1 \equiv \Sigma_1$.

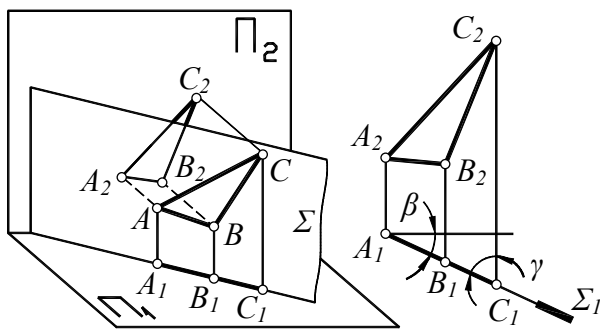


Рис. 2.28. Горизонтально-проецирующая плоскость

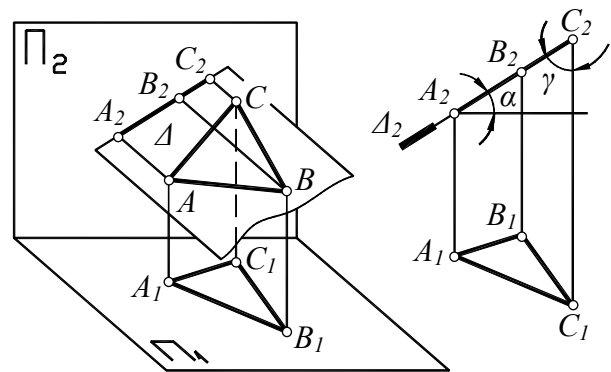


Рис. 2.29. Фронтально-проецирующая плоскость

Чтобы задать на чертеже горизонтально-проецирующую плоскость, достаточно указать ее горизонтальную проекцию Σ_1 . При этом положение плоскости Σ в пространстве вполне определено, так как известны углы наклона β и γ этой плоскости к плоскостям проекций Π_2 и Π_3 (см. рис. 2.28).

Фронтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2 (плоскость Δ на рис. 2.29). Фронтальная проекция плоскости Δ вырождается в прямую линию Δ_2 .

Горизонтальная проекция этой плоскости представляет собой поле точек, совпадающее с полем Π_1 , то есть $\Delta_1 \equiv \Pi_1$. Фронтальная проекция фигуры, лежащей в плоскости Δ (например, треугольника ABC на рис. 2.29), совпадает с фронтальной проекцией Δ_2 плоскости Δ , то есть $A_2B_2C_2 \equiv \Delta_2$.

Чтобы задать на чертеже фронтально-проецирующую плоскость, достаточно указать только ее фронтальную проекцию Δ_2 . При этом положение плоскости Δ в пространстве вполне определено, так как известны углы наклона α и γ этой плоскости к плоскостям проекций Π_1 и Π_3 (см. рис. 2.29).

Профильно-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3 (плоскость Θ на рис. 2.30).

Профильная проекция плоскости Θ вырождается в прямую линию Θ_3 . Горизонтальная и фронтальная проекции этой плоскости представляют собой поля точек, совпадающие соответственно с точечными полями плоскостей проекций Π_1 и Π_2 , то есть $\Theta_1 \equiv \Pi_1$, $\Theta_2 \equiv \Pi_2$.

Профильная проекция любой фигуры, лежащей в профильно-проецирующей плоскости Θ (например, треугольника ABC), совпадает с профильной проекцией Θ_3 плоскости Θ , то есть $A_3B_3C_3 \equiv \Theta_3$.

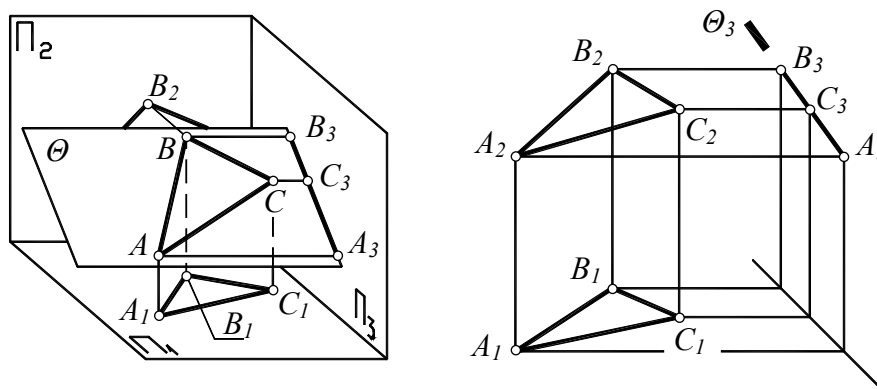


Рис. 2.30. Профильно-проецирующая плоскость

Чтобы задать на чертеже профильно-проецирующую плоскость, достаточно указать только ее профильную проекцию Θ_3 . При этом положение плоскости Θ в пространстве вполне определено, так как углы наклона α , β этой плоскости к плоскостям Π_1 и Π_2 определяются по ее профильной проекции Θ_3 (отметить эти углы на рис. 2.30 самостоятельно).

2.3.3.2. Плоскости уровня

Горизонтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (плоскость Σ на рис. 2.31). Горизонтальная плоскость уровня Σ перпендикулярна плоскостям Π_2 и Π_3 , то есть является дважды проецирующей плоскостью (фронтально и профильно).

Любая фигура, лежащая в горизонтальной плоскости уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций Π_1 без искажения. Например, треугольник ABC , лежащий в плоскости Σ , проецируется на плоскость Π_1 в натуральную величину (см. рис. 2.31).

Фронтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 (плоскость Γ на рис. 2.32). Фронтальная плоскость уровня Γ перпендикулярна плоскостям Π_1 и Π_3 , то есть является дважды проецирующей плоскостью (го-

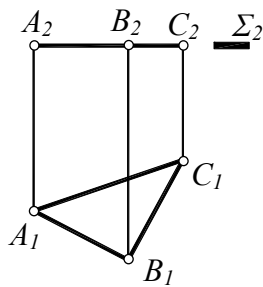


Рис. 2.31

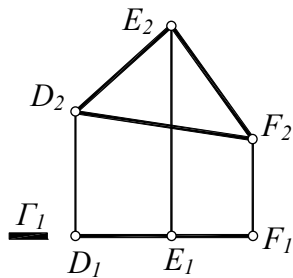


Рис. 2.32

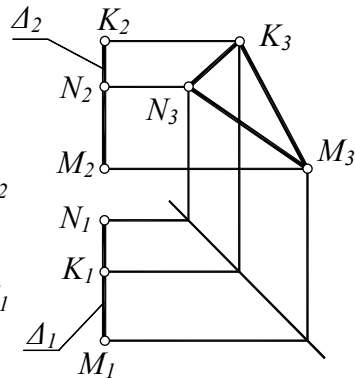


Рис. 2.33

ризонально и профильно). Любая фигура, лежащая во фронтальной плоскости уровня, проецируется на Π_2 без искажения. Например, треугольник DEF , лежащий в плоскости Γ , проецируется на плоскость Π_2 в натуральную величину (см. рис. 2.32).

Профильная плоскость уровня – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций Π_3 (плоскость Δ на рис. 2.33). Профильная плоскость уровня Δ перпендикулярна плоскостям Π_1 и Π_2 , то есть является дважды проецирующей плоскостью (горизонтально и фронтально). Любая фигура, лежащая в профильной плоскости уровня, проецируется на Π_3 без искажения. Например, треугольник MNK , лежащий в плоскости Δ , проецируется на плоскость Π_3 в натуральную величину (см. рис. 2.33).

2.3.4. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

Определение. Плоскость и прямая называются параллельными, если они пересекаются в несобственной точке (см. п. 1.1). Отсюда следует **теорема** [13]: если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости (доказать самостоятельно).

Пусть через точку M требуется провести прямую, параллельную данной плоскости Γ . Плоскость Γ задана на чертеже треугольником ABC (рис. 2.34). Начертим в плоскости Γ произвольную прямую (например, прямую CK) и проведем через точку M прямую l , параллельную прямой CK . Прямая l параллельна плоскости Γ .

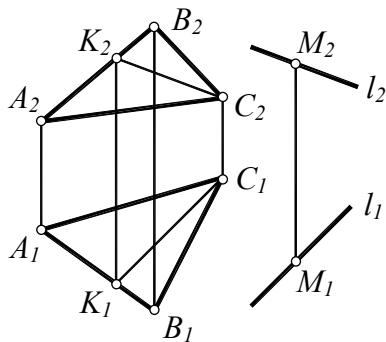


Рис. 2.34

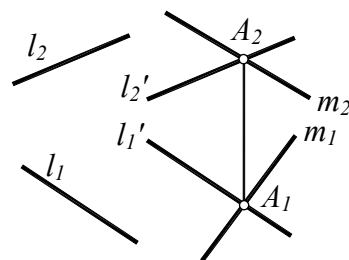


Рис. 2.35

Пусть через прямую m надо провести плоскость, параллельную данной прямой l (рис. 2.35). Через произвольную точку A на прямой m проведем прямую l' , параллель-

ную прямой l . Две пересекающиеся прямые m и l' определяют плоскость, параллельную прямой l .

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они пересекаются по несобственной прямой (см. п. 1.1). Отсюда следует **теорема** [13]: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (доказать самостоятельно).

Задача. Пусть через точки M и N требуется провести плоскости, параллельные данной плоскости Σ . Плоскость Σ задана треугольником ABC (рис. 2.36). Проведем через точку M две прямые a и b , параллельные сторонам AB и BC . Пересекающиеся прямые a и b определяют плоскость Σ' , параллельную данной плоскости Σ .

Проведем в данной плоскости $\Sigma(ABC)$ горизонталь h и фронталь f . Плоскость Σ'' , параллельная плоскости Σ , может быть задана горизонталью h'' и фронталью f'' , парал-

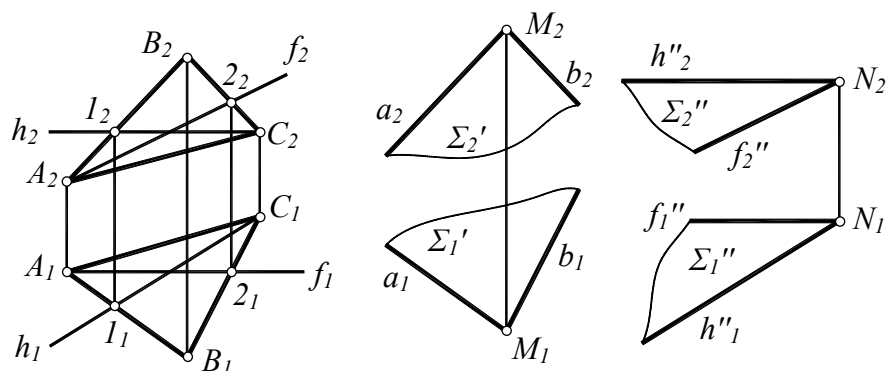


Рис. 2.36

лельными горизонтали h и фронтали f плоскости Σ . Такая плоскость проведена через точку N (см. рис. 2.36). Плоскости $\Sigma(h \cap f)$, $\Sigma'(a \cap b)$ и $\Sigma''(h'' \cap f'')$ взаимно параллельны.

Вопросы для повторения

1. Какую прямую называют прямой общего положения?
2. Какие прямые называют проецирующими прямыми, прямыми уровня?
3. Какие точки называют конкурирующими? Как расположены в пространстве горизонтально-конкурирующие точки? Как расположены в пространстве фронтально-конкурирующие точки?
4. Как определить истинную длину отрезка прямой общего положения, заданного двумя своими проекциями? Как определить истинную длину отрезка прямой частного положения (горизонтали, фронтали, проецирующей прямой)?
5. Как на прямой общего положения отложить отрезок заданной длины?
6. Как задать плоскость на ортогональном чертеже?
7. Какую плоскость называют плоскостью общего положения?
8. Какие плоскости называют плоскостями частного положения?
9. Какие линии называют главными линиями плоскости?
10. Назвать признаки принадлежности прямой и точки к плоскости.
11. Сформулировать признаки параллельности прямой и плоскости; признаки параллельности двух плоскостей.
12. Сколько плоскостей, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку пространства?
13. Сколько прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку пространства? Где располагаются все эти прямые?

Лекция 3

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционными задачами называют задачи, в которых надо определить общие элементы геометрических фигур, заданных на чертеже. В начертательной геометрии рассматривают две позиционные задачи.

Первая позиционная задача: определение точки (или точек) пересечения произвольной кривой линии с произвольной поверхностью. В простейшем случае надо *найти точку пересечения прямой с плоскостью* (прямая – это простейшая линия, а плоскость – простейшая поверхность).

Вторая позиционная задача: построение линии пересечения двух произвольных поверхностей. В простейшем случае надо *найти линию пересечения двух плоскостей*.

3.1. Первая позиционная задача (простейший случай)

Напомним, что первой позиционной задачей в простейшем случае называют *построение точки пересечения прямой линии с плоскостью*.

Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу, в которой надо построить “линию разреза” плоскости общего положения проецирующей плоскостью.

3.1.1. Вспомогательная задача

На чертеже (рис. 3.1) задана плоскость общего положения $\Gamma(ABC)$ и фронтально-проецирующая плоскость Σ . Требуется построить линию их пересечения.

Треугольник ABC “разрезан” (разрезан) проецирующей плоскостью Σ , поэтому проецирующую плоскость иногда называют “секущей плоскостью”. Линия разреза вполне определена двумя точками. В точке 1 секущая плоскость Σ пересекает сторону AC треугольника ABC , в точке 2 – сторону BC . Следовательно, линия $1-2$ – линия разреза плоскости $\Gamma(ABC)$ секущей плоскостью Σ . Символически это записывают так: $\Gamma(ABC) \cap \Sigma = 1-2$. Задача решена.

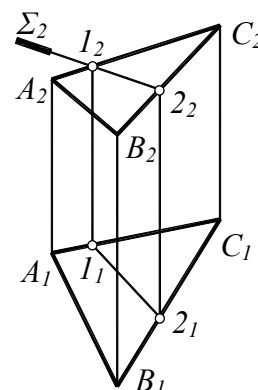


Рис. 3.1

3.1.2. Основная задача

Рассмотренная вспомогательная задача позволяет решить первую позиционную задачу для простейшего случая (построение точки пересечения прямой и плоскости).

Первая позиционная задача. На чертеже задана плоскость общего положения $\Gamma(ABC)$ и прямая общего положения l (рис. 3.2). Требуется построить точку их пересечения.

Для решения задачи надо выполнить три действия.

1. Через прямую l проведем вспомогательную секущую плоскость Σ и обязательно отметим ее на чертеже. На рис. 3.2 вспомогательная плоскость Σ , проходящая через l , выбрана фронтально-проецирующей.

Внимание! Первое действие – самое главное! Если на чертеже не отметить вспомогательную секущую плос-

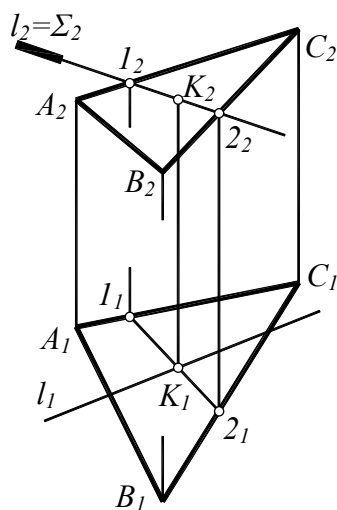


Рис. 3.2

кость, то последующие действия утрачивают геометрический смысл!

2. Секущая плоскость Σ разрезает данную плоскость ABC . Отмечаем на чертеже линию разреза $1-2$.

3. Линия разреза $1-2$ и прямая l лежат в одной и той же плоскости (в секущей плоскости Σ). Следовательно, прямые $1-2$ и l пересекутся между собой в некоторой точке K . Эта точка и есть искомая точка пересечения прямой l и плоскости ABC .

Проверим, правильно ли найдена точка K пересечения прямой l и плоскости $\Gamma(ABC)$. Эта точка должна одновременно принадлежать и прямой l , и данной плоскости $\Gamma(ABC)$. Найденная на чертеже (см. рис. 3.2) точка K – точка пересечения прямой l и линии $1-2$. Значит, найденная нами точка K находится и на данной прямой l , и на линии $1-2$. Но линия $1-2$ находится в плоскости $\Gamma(ABC)$. Следовательно, точка K находится как на прямой l , так и на плоскости $\Gamma(ABC)$, то есть K – искомая точка пересечения данной прямой l и данной плоскости $\Gamma(ABC)$. Точка K найдена правильно.

Запишем порядок решения первой позиционной задачи в символической форме (в виде алгоритма).

Определение. Алгоритм – совокупность последовательных однозначных операций, которые необходимо совершить для решения задачи.

1. $l \subset \Sigma \perp P_2$ (через прямую l проводим вспомогательную секущую фронтально-проецирующую плоскость Σ).

2. $\Sigma \cap \Gamma(ABC) = 1-2$ (строим линию $1-2$ пересечения данной плоскости $\Gamma(ABC)$ и вспомогательной плоскости Σ).

3. $l \cap (1-2) = K$ (отмечаем искомую точку K). Задача решена.

Результат построения не изменится, если в первом действии алгоритма через прямую l будет проведена другая вспомогательная секущая плоскость, например, горизонтально-проецирующая (проверить самостоятельно).

3.1.3. Определение видимости на чертеже

Плоскость треугольника ABC считается непрозрачной. Проекции прямой l частично будут невидимы (“закрыты” от зрителя непрозрачным треугольником). Поэтому для полного решения первой позиционной задачи надо не только найти точку K пересечения прямой с плоскостью, но и показать на чертеже видимые участки этой прямой (*определить видимость*). Для определения видимости проекций прямой l применяют способ конкурирующих точек (см. п. 2.2.6).

Чтобы определить видимость на горизонтальной плоскости проекций, берем какую-либо пару горизонтально-конкурирующих точек, например, горизонтально-конкурирующие точки 1 и 2 (рис. 3.3). Точка 1 находится на стороне AB треугольника, точка 2 – на прямой l . Точка 2 расположена *выше* точки 1 , поэтому прямая l проходит *над* стороной AB . Следовательно, на горизонтальной проекции левый участок прямой l – видимый. В точке K прямая l пересекается с плоскостью треугольника. Поэтому на горизонтальной проекции правый участок прямой l – невидимый.

Чтобы определить видимость фигур на фронтальной плоскости проекций, берем какую-либо пару фронтально-конкурирующих точек, например, пару точек 3 и 4 (см. рис. 3.3). Точка 3 находится на стороне BC треугольника, точка 4 – на прямой l . Точка 3 расположена *перед* точкой 4 , поэтому на фронтальной проекции сторона BC треугольника проходит *перед* прямой l . В этом

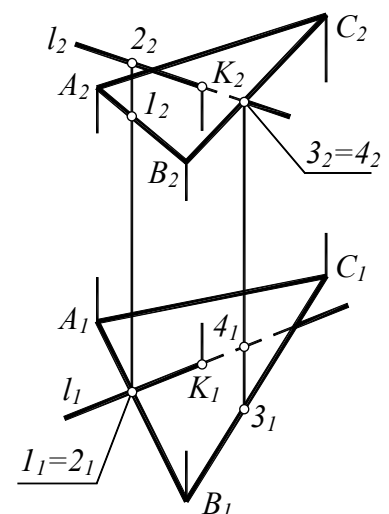


Рис. 3.3

месте треугольник закрывает от зрителя прямую l . Поэтому правая часть фронтальной проекции прямой l – невидимая. В точке K прямая l пересекается с плоскостью треугольника, поэтому левый участок фронтальной проекции прямой l – видимый.

3.2. Вторая позиционная задача (простейший случай)

Второй позиционной задачей в простейшем случае называют построение линии пересечения двух плоскостей общего положения.

Вторая позиционная задача. На чертеже заданы плоскости общего положения $\Gamma(a \cap b)$ и $\Delta(c \cap d)$ (рис. 3.4). Построить линию их пересечения.

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Прямая линия вполне определена двумя своими точками. Поэтому для построения линии пересечения плоскостей надо найти всего две общие точки этих плоскостей. Рассмотрим решение задачи *способом вспомогательных секущих плоскостей*.

Чтобы найти одну общую точку данных плоскостей, проводим произвольную вспомогательную секущую плоскость Σ (на рис. 3.4 плоскость Σ выбрана горизонтально-проецирующей). Эта вспомогательная плоскость “разрезает” заданные плоскости Γ и Δ по прямым $l=1-2$ и $m=3-4$. Линии разреза пересекаются между собой в точке N , принадлежащей одновременно обеим заданным плоскостям Γ и Δ .

Чтобы найти еще одну общую точку заданных плоскостей, надо провести еще одну вспомогательную секущую плоскость Θ . На рис. 3.4 вспомогательная плоскость Θ проведена параллельно вспомогательной плоскости Σ . Снова вычерчиваем две линии разреза l', m' и отмечаем точку K их пересечения. Точка K принадлежит обеим данным плоскостям Γ и Δ . Прямая NK – искомая линия пересечения данных плоскостей.

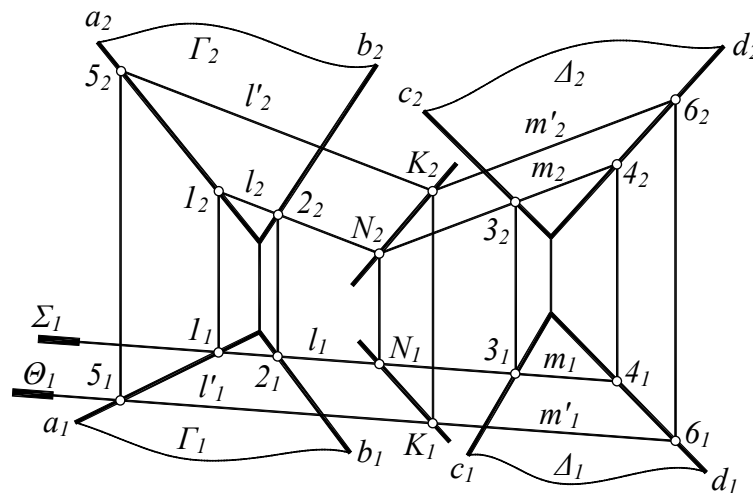


Рис. 3.4

Сформулируем схему решения задачи.

1. Проводим (и обязательно указываем на чертеже!) вспомогательную секущую плоскость, пересекающую заданные плоскости. В качестве вспомогательной секущей плоскости обычно используют проецирующую плоскость или плоскость уровня.

2. Определяем линии разреза обеих заданных плоскостей вспомогательной секущей плоскостью.

3. Отмечаем точку пересечения найденных линий разреза. Полученная точка принадлежит обеим плоскостям, поэтому через нее пройдет искомая линия пересечения заданных плоскостей.

4. Вторая общая точка заданных плоскостей определяется аналогично: проводим еще одну вспомогательную секущую плоскость и снова повторяем действия 1...3. Через две общие точки двух плоскостей проходит искомая линия пересечения этих плоскостей.

Запишем последовательность решения задачи в виде алгоритма.

Алгоритм построения точки N (см. рис. 3.4)

1. $\Sigma \perp \Pi_l$ (проводим вспомогательную секущую горизонтально-проецирующую плоскость Σ).
2. $\Sigma \cap \Gamma = l$; $\Sigma \cap \Delta = m$ (определяем линии разреза $l=1-2$ и $m=3-4$ заданных плоскостей Γ и Δ вспомогательной секущей плоскостью Σ).
3. $l \cap m = N$ (отмечаем точку пересечения найденных линий разреза). Точка N принадлежит обеим заданным плоскостям Γ и Δ , поэтому через нее пройдет искомая линия пересечения заданных плоскостей.

Алгоритм построения точки K (см. рис. 3.4)

1. $\Theta \perp \Pi_l$ (проводим вспомогательную секущую горизонтально-проецирующую плоскость Θ). Плоскость Θ проведена параллельно плоскости Σ . Такой выбор секущей плоскости Θ позволяет несколько упростить последующее построение линий разреза, так как параллельные между собой секущие плоскости Σ и Θ пересекают любую плоскость по параллельным прямым.
2. $\Theta \cap \Gamma = l'$; $\Theta \cap \Delta = m'$ (определяем линии разреза l' и m' заданных плоскостей Γ и Δ вспомогательной секущей плоскостью Θ). Секущая плоскость Θ параллельна секущей плоскости Σ , поэтому линии l' и m' параллельны линиям l и m .
3. $l' \cap m' = K$ (отмечаем точку пересечения найденных линий разреза). Точка K принадлежит обеим заданным плоскостям Γ и Δ , поэтому через точку K и ранее найденную точку N проходит искомая линия пересечения заданных плоскостей. Задача решена.

3.3. Построение линии пересечения двух плоских фигур

Задача. Даны две плоские фигуры общего положения: треугольник ABC и треугольник DEF (рис. 3.5). Требуется построить линию их пересечения (решить вторую позиционную задачу).

Напомним, что в соответствии со схемой решения второй позиционной задачи надо провести произвольную секущую плоскость, начертить линии разреза данных треугольников, а затем отметить точку пересечения найденных линий разреза. Отмеченная точка – общая для обоих треугольников. Еще одна произвольная секущая плоскость даст еще одну общую точку двух треугольников. Соединяя найденные точки, получаем искомую линию пересечения данных фигур.

Но можно поступить немного иначе: найти точку пересечения какой-нибудь стороны одного треугольника с плоскостью другого треугольника (по схеме решения первой позиционной задачи). Для этого надо провести секущую плоскость не произвольно, а через какую-нибудь сторону одного из треугольников. Например, про-

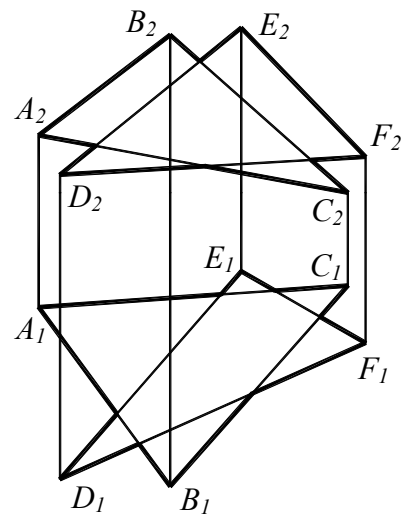


Рис. 3.5

ведем секущую плоскость Σ через сторону DE треугольника DEF (рис. 3.6, а). Плоскость Σ разрежет треугольник ABC по линии $1-2$. Отметим точку M пересечения сторо-

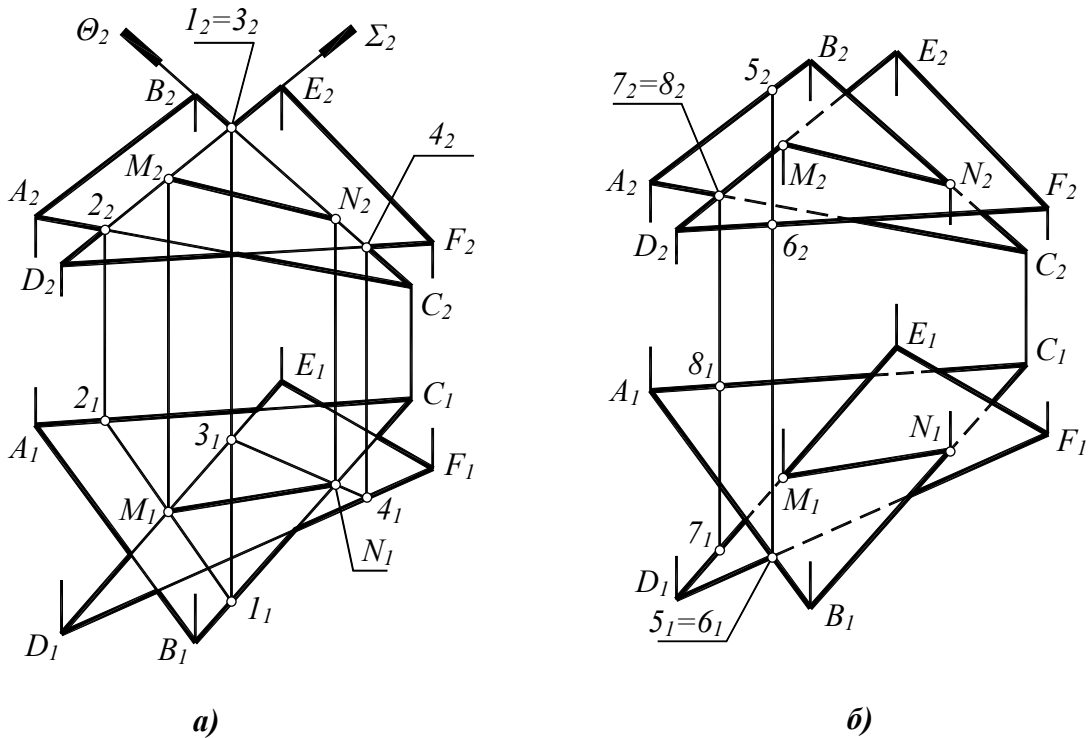


Рис. 3.6

ны DE и линии $1-2$. Точка M – общая точка данных треугольников.

Еще одну секущую плоскость проведем через какую-нибудь другую сторону одного из треугольников. Например, через сторону BC проведем фронтально-проецирующую плоскость Θ . Повторяя алгоритм решения первой позиционной задачи, найдем точку N пересечения стороны BC с треугольником DEF (см. рис. 3.6, а). Соединяя точку N с ранее найденной точкой M , получаем искомую линию MN пересечения треугольников.

Таким образом, можно построить линию пересечения двух плоских фигур, дважды решив первую позиционную задачу. Запишем алгоритмы построения точек M и N .

Алгоритм построения точки M (см. рис. 3.6, а)

1. $\Sigma \supset DE, \Sigma \perp \Pi_2$ (через прямую DE проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Σ).
2. $\Sigma \cap ABC = 1-2$ (вспомогательная плоскость Σ разрезает треугольник ABC по линии $1-2$).
3. $M = DE \cap (1-2)$ (отмечаем точку пересечения прямой DE и линии $1-2$). В точке M прямая DE пересекается с плоскостью треугольника ABC .

Алгоритм построения точки N (см. рис. 3.6, а)

1. $\Theta \supset BC, \Theta \perp \Pi_2$ (через прямую BC проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Θ).
2. $\Theta \cap DEF = 3-4$ (вспомогательная плоскость Θ разрезает треугольник DEF по линии $3-4$).

3. $N=BC \cap (3-4)$ (отмечаем точку пересечения прямой BC и линии $3-4$). Найденная точка N – точка пересечения стороны BC с треугольником DEF .

Отрезок MN , соединяющий найденные точки M, N – искомая линия пресечения данных треугольников ABC и DEF .

Видимость проекций фигур

Кроме линии пересечения данных треугольников, на чертеже обязательно показывают “видимость” их проекций, так как обе фигуры считаются непрозрачными. Видимость определяется с помощью конкурирующих точек (см. лекцию 2).

Для выявления видимости на горизонтальной плоскости проекций отмечаем пару каких-нибудь горизонтально-конкурирующих точек, например, 5 и 6 (рис. 3.6, б). Точка 5, лежащая на стороне AB , располагается *выше* точки 6, лежащей на стороне DF . Значит, сторона AB треугольника ABC *выше* стороны DF треугольника DEF . Поэтому сторона AB на горизонтальной проекции – *видимая*. Этого достаточно, чтобы определить видимость всех сторон данных треугольников на горизонтальной плоскости проекций.

Для выявления видимости на фронтальной плоскости проекций отмечаем пару каких-нибудь фронтально-конкурирующих точек, например, 7 и 8 (см. рис. 3.6, б). Точка 7, лежащая на стороне DE , располагается *перед* точкой 8, лежащей на стороне AC . Значит, сторона DE треугольника DEF находится *перед* стороной AC треугольника ABC . Поэтому левая часть стороны DE (до точки M) на фронтальной проекции – *видимая*. Этого достаточно, чтобы определить видимость всех сторон данных треугольников на фронтальной плоскости проекций.

Вопросы для повторения

1. Какие геометрические задачи называют позиционными?
2. В чем состоит различие первой и второй позиционных задач?
3. Почему задачи на построение общих элементов прямых линий и плоскостей называют *простейшими* позиционными задачами?
4. Сформулировать схему решения первой позиционной задачи.
5. Сформулировать схему решения второй позиционной задачи.
6. Можно ли для решения второй позиционной задачи использовать схему решения первой позиционной задачи? Как это сделать?
7. Что называется алгоритмом?
8. Как определяется видимость проекций фигур на комплексном чертеже?

Лекция 4

ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Определение 1. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Перпендикулярные прямые могут пересекаться, но могут быть и скрещивающимися.

Определение 2. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Определение 3. Две пересекающиеся плоскости называются взаимно перпендикулярными, если образованный ими двугранный угол равен 90° .

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей, доказываемые в школьном курсе геометрии [13], могут быть сформулированы в виде признаков перпендикулярности.

4.1. Признаки перпендикулярности прямых и плоскостей

Признак 1. Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых, перпендикулярна к обеим параллельным прямым.

Пусть прямые a и b параллельны (рис. 4.1). Проведем перпендикуляр t к одной из прямых, например, к прямой a . Тогда прямая t будет перпендикулярна не только к прямой a , но и к прямой b .

Из этого признака следует, что две взаимно перпендикулярные прямые в пространстве не обязаны пересекаться. Они могут скрещиваться, но при этом быть взаимно перпендикулярными. Например, на рис. 4.1 каждая из параллельных прямых t и t' перпендикулярна каждой из прямых a и b .

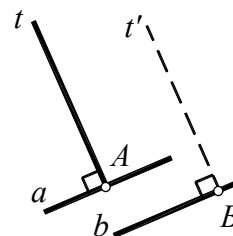


Рис. 4.1

Признак 2. Если прямая t перпендикулярна каким-нибудь двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости Σ , то прямая t перпендикулярна к этой плоскости Σ (рис. 4.2).

Две пересекающиеся прямые a и b определяют в пространстве некоторую плоскость Σ . Проведем перпендикуляр t к этим прямым (см. рис. 4.2). Согласно признаку 2, прямая t перпендикулярна к плоскости Σ .

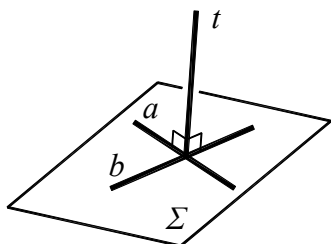


Рис. 4.2

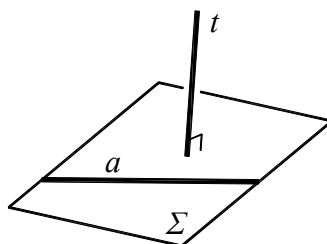


Рис. 4.3

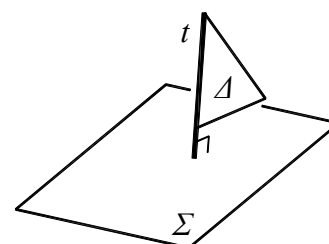


Рис. 4.4

Признак 3. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости (этот признак перпендикулярности следует непосредственно из определения 2).

Дана плоскость Σ . Проведем к ней перпендикуляр t (рис. 4.3). Согласно признаку 3, прямая t перпендикулярна к произвольной прямой a , лежащей в плоскости Σ .

Признак 4. Если плоскость Δ проходит через перпендикуляр к плоскости Σ , то плоскости Δ и Σ взаимно перпендикулярны (рис. 4.4).

Дана плоскость Σ . Проведем к ней перпендикуляр t . Через прямую t проведем произвольную плоскость Δ (см. рис. 4.4). Согласно признаку 4, плоскость Δ перпендикулярна плоскости Σ .

Признаки перпендикулярности используются при построении взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей на комплексном чертеже.

4.2. Теорема 1 (о проекциях прямого угла)

Если одна сторона прямого угла параллельна какой-либо плоскости проекций, а другая сторона является прямой общего положения, то прямой угол изображается на этой плоскости проекций прямым углом.

Пусть отрезок AB перпендикулярен отрезку BC , причем отрезок AB – горизонталь ($AB \parallel \Pi_1$), а отрезок BC – прямая общего положения (рис. 4.5). Докажем, что угол $A_1B_1C_1$ – прямой, то есть $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

Доказательство

1) Отрезок AB перпендикулярен отрезку BC по условию: $AB \perp BC$.

2) Отрезок AB перпендикулярен линии связи BB_1 по построению.

Следовательно (в соответствии с признаком 2 перпендикулярности прямой и плоскости), отрезок AB перпендикулярен плоскости $\Delta(BC \cap BB_1)$.

3) Проекция A_1B_1 отрезка AB параллельна самому отрезку AB по условию. Отрезок AB перпендикулярен плоскости Δ , следовательно, проекция A_1B_1 также перпендикулярна плоскости Δ .

4) Поскольку прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости Δ , то она перпендикулярна прямой B_1C_1 , лежащей в плоскости Δ (признак 3). Следовательно, $A_1B_1 \perp B_1C_1$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 1. *Если одна из взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, то данные скрещивающиеся прямые изображаются на этой плоскости проекций прямым углом.*

Одну из сторон “висящего в воздухе” прямого угла ABC , показанного на рис. 4.5 (например, сторону BC), можно мысленно переместить в пространстве параллельно самой себе. Тогда прямая BC выйдет из пересечения со стороной AB . Но горизонтальные проекции прямых AB и BC все равно образуют прямой угол.

Рассмотрим примеры построения комплексных чертежей взаимно перпендикулярных прямых.

Задача 1. На чертеже дана горизонталь h и точка A (рис. 4.6). Требуется из точки A опустить перпендикуляр t на прямую h . Требование “опустить перпендикуляр на прямую” означает, что перпендикуляр к прямой должен с ней пересечься.

В соответствии с теоремой 1, если прямая t перпендикулярна горизонтали h , то их горизонтальные проекции t_1 и h_1 должны быть взаимно перпендикулярны. Горизонталь h и прямая t , показанные на рис. 4.6, пересекаются в точке B и образуют прямой угол. Задача имеет единствен-

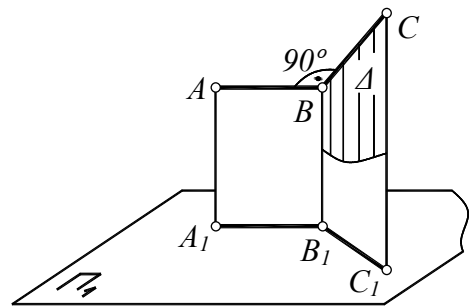


Рис. 4.5

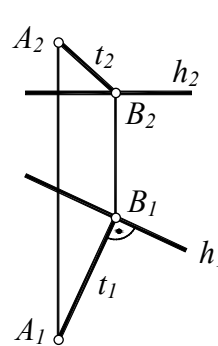


Рис. 4.6

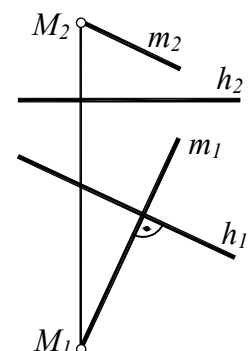


Рис. 4.7

ное решение, так как из точки A можно опустить единственный перпендикуляр на прямую h .

Задача 2. Дана горизонталь h и точка M (рис. 4.7). Требуется через точку M провести прямую, перпендикулярную к горизонтали h , но не пересекающуюся с ней.

Проведем через точку M какую-нибудь прямую t , горизонтальная проекция t_1 которой образует прямой угол с h_1 . В соответствии со следствием из теоремы 1, горизонталь h и прямая t перпендикулярны друг другу, но не пересекаются между собой (см. рис. 4.7). Задача имеет бесчисленное множество решений. Все прямые, проходящие через точку M и перпендикулярные к горизонтали h ,

образуют плоскость, перпендикулярную к h .

Задача 3. Дана фронталь f и точка A (рис. 4.8). Требуется из точки A опустить перпендикуляр t на прямую f .

Если прямая t перпендикулярна фронтали f , то, в соответствии с теоремой 1, их фронтальные проекции t_2 и f_2 должны быть взаимно перпендикулярны (см. рис. 4.8). Фронталь f и прямая t , показанные на чертеже, пересекаются в точке B и образуют прямой угол. Задача имеет единственное решение.

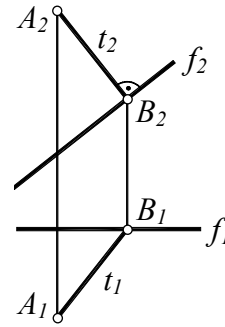


Рис. 4.8

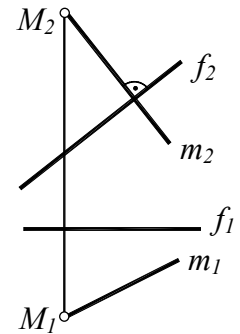


Рис. 4.9

Задача 4. Дана фронталь f и точка M (рис. 4.9). Требуется через точку M провести прямую, перпендикулярную к фронтали f , но не пересекающуюся с ней.

Проведем через точку M какую-нибудь прямую t , фронтальная проекция t_2 которой образует прямой угол с f_2 . Фронталь f и прямая t , показанные на рис. 4.9, перпендикулярны друг другу (согласно следствию из теоремы 1), но между собой не пересекаются (скрещиваются). Задача имеет бесчисленное множество решений. На рис. 4.9 показано только одно из решений задачи.

4.3. Теорема 2 (о взаимной перпендикулярности прямых и плоскостей)

Напомним признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости (см. п. 4.1). В частности, прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна к главным линиям плоскости – горизонтали и фронтали. Отсюда следует теорема об изображении на комплексном чертеже перпендикуляра к плоскости общего положения.

Если прямая d перпендикулярна к плоскости, то на комплексном чертеже горизонтальная проекция d_1 прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали ($d_1 \perp h_1$), а фронтальная проекция d_2 прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали ($d_2 \perp f_2$), принадлежащим этой плоскости.

Пусть прямая d перпендикулярна к плоскости общего положения Σ (рис. 4.10). Начертим в плоскости Σ ее главные линии – горизонталь h и фронталь f . Докажем, что на комплексном чертеже проекции перпендикуляра d подчиняются условиям: $d_1 \perp h_1$, $d_2 \perp f_2$.

Доказательство

1) Прямая d перпендикулярна плоскости Σ по условию. Следовательно, в соответствии с третьим признаком перпендикулярности, прямая d перпендикулярна главным линиям плоскости Σ – горизонтали h и фронтали f : $d \perp h$, $d \perp f$.

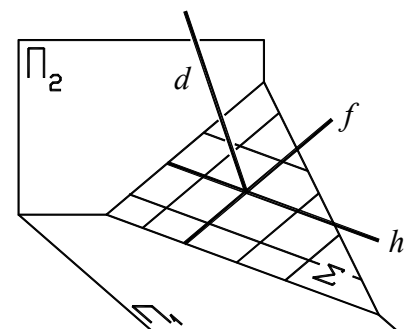


Рис. 4.10

2) Прямые d и h образуют прямой угол, причем сторона h параллельна горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, в соответствии с теоремой 1, горизонтальные проекции прямых d и h взаимно перпендикулярны: $d_1 \perp h_1$. Первая часть теоремы доказана.

3) Прямые d и f также образуют прямой угол, причем сторона f параллельна фронтальной плоскости проекций. Следовательно, в соответствии с теоремой 1, фронтальные проекции прямых d и f взаимно перпендикулярны: $d_2 \perp f_2$. Вторая часть теоремы, а вместе с тем и вся теорема, доказана.

Запишем теорему 2 в символической форме.

Если $d \perp \Sigma$, то $d_1 \perp h_1$, а $d_2 \perp f_2$, где h и f – главные линии плоскости Σ .

Рассмотрим примеры построения на чертеже взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей во всех возможных сочетаниях. Таких сочетаний всего три:

- 1) взаимно перпендикулярные прямая и плоскость,
- 2) две взаимно перпендикулярные плоскости,
- 3) две взаимно перпендикулярные прямые.

4.3.1. Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости

Напомним утверждение теоремы 2. Плоскость Σ и прямая m взаимно перпендикулярны, если на чертеже выполнены условия: $m_1 \perp h_1$, $m_2 \perp f_2$, где h и f – главные линии плоскости Σ .

“Прямая” задача. Через данную точку M провести прямую m , перпендикулярную к плоскости Σ общего положения. Плоскость Σ задана на чертеже прямыми a и b , пересекающимися в точке K (рис. 4.11).

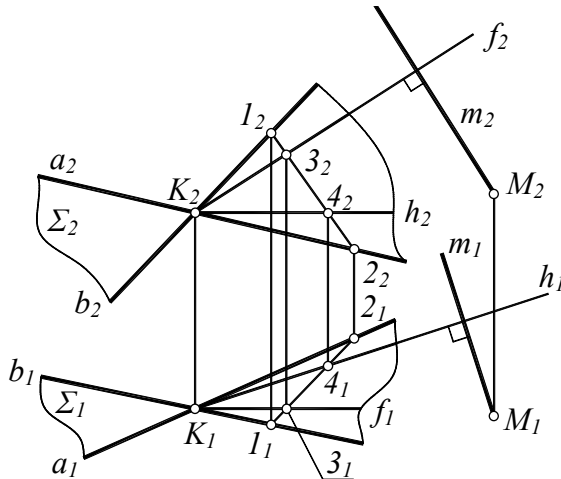


Рис. 4.11

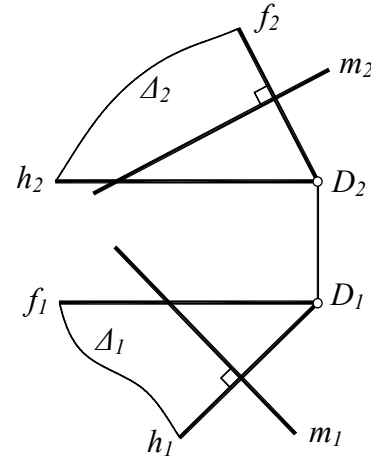


Рис. 4.12

Начертим главные линии плоскости Σ (горизонталь h и фронталь f). Для построения этих линий в плоскости Σ проведена произвольная вспомогательная прямая l -2. На этой прямой отмечены точки 3 и 4, принадлежащие фронталу и горизонтали.

Проведем через точку M прямую m таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2: горизонтальная проекция m_1 прямой m перпендикулярна к h_1 , а фронтальная проекция m_2 прямой m перпендикулярна к f_2 . Прямая $m(m_1, m_2)$ перпендикулярна к плоскости Σ . Задача решена.

“Обратная” задача. Через точку D провести плоскость Δ , перпендикулярную прямой общего положения t (рис. 4.12).

Плоскость, перпендикулярная к прямой общего положения, может быть задана пересекющимися горизонталью и фронталью, перпендикулярными к данной прямой. На рис. 4.12 через точку D проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$. Задача решена. Действительно, в соответствии с теоремой 2, начерченная на рис. 4.12 плоскость $\Delta(h \cap f)$ перпендикулярна прямой t . Прямая t перпендикулярна как горизонтали h , так и фронтали f .

4.3.2. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей

Плоскость, перпендикулярную к данной плоскости, можно провести двумя способами: либо через прямую, перпендикулярную данной плоскости, либо перпендикулярно прямой, принадлежащей заданной плоскости.

Задача. Плоскость Σ общего положения задана пересекающимися прямыми a и b . Требуется через данную точку M провести плоскость Δ , перпендикулярную к плоскости Σ .

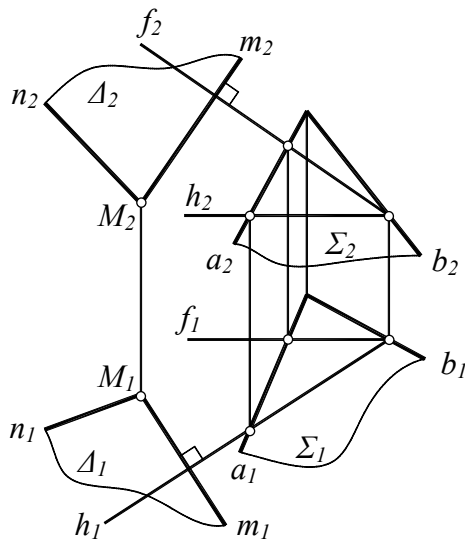


Рис. 4.13

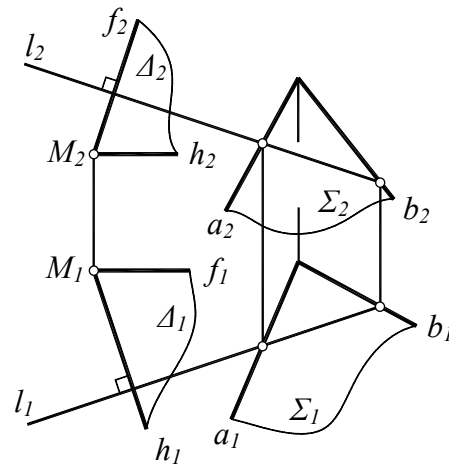


Рис. 4.14

Первый способ

Начертим в плоскости Σ главные линии (горизонталь и фронталь), затем в соответствии с теоремой 2 проведем через точку M перпендикуляр t к плоскости Σ : $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$ (рис. 4.13). Любая плоскость, проходящая через прямую t , перпендикулярна плоскости Σ . Проведем через точку M произвольную прямую n . Пересекающиеся прямые t и n определяют в пространстве плоскость Δ , перпендикулярную плоскости Σ .

Имеется бесчисленное множество решений, так как через перпендикуляр к плоскости Σ можно провести бесчисленное множество плоскостей. Все они перпендикулярны плоскости Σ .

Второй способ

Проведем в плоскости $\Sigma(a \cap b)$ произвольную прямую l (рис. 4.14). Плоскость Δ , перпендикулярная к прямой l , задается пересекющимися горизонталью и фронталью. На рис. 4.14 через точку M проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости: $h_1 \perp l_1$ и $f_2 \perp l_2$. Плоскость Δ , заданная горизонталью h и фронталью f , перпендикулярна к прямой l .

Прямая l лежит в плоскости Σ , следовательно, плоскость $\Delta(h \cap f)$ перпендикулярна к плоскости Σ .

Имеется бесчисленное множество решений: плоскость, перпендикулярная любой прямой l в плоскости Σ , будет перпендикулярна к Σ .

4.3.3. Построение взаимно перпендикулярных прямых

Напомним один из признаков перпендикулярности прямых и плоскостей: *если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости*. Следовательно, для построения перпендикуляра к данной прямой m надо провести плоскость Σ , перпендикулярную к этой прямой. Любая прямая, лежащая в плоскости Σ , будет перпендикулярна прямой m .

Задача. На чертеже (рис. 4.15) дана прямая m общего положения. Требуется через данную точку M провести прямую a , перпендикулярную прямой m .

Через точку M проведем плоскость Σ , перпендикулярную прямой m . Плоскость Σ , перпендикулярная к прямой общего положения m , может быть задана пересекающимися горизонталью и фронталью, каждая из которых проводится перпендикулярно к прямой m .

На рис. 4.15 через точку M проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$. В соответствии с теоремой 2, начерченная на рис. 4.15 плоскость Σ , заданная горизонталью h и фронталью f , перпендикулярна прямой m .

Любая прямая в плоскости Σ перпендикулярна прямой m . На чертеже показана только одна такая прямая (прямая a). Скрещивающиеся прямые общего положения m и a взаимно перпендикулярны.

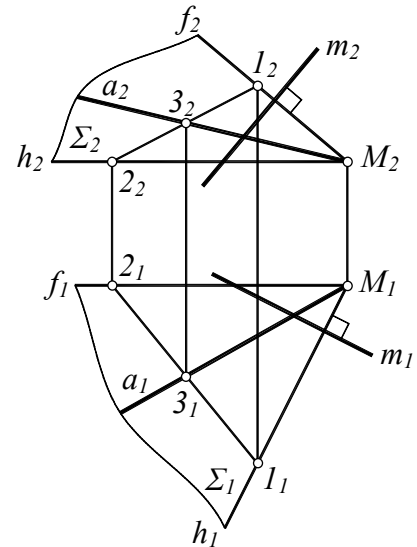


Рис. 4.15

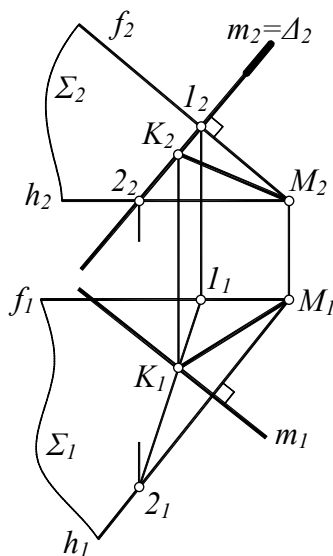


Рис. 4.16

Задача имеет множество решений: любая прямая в плоскости Σ , проходящая через точку M , перпендикулярна прямой m , то есть удовлетворяет условию задачи.

Среди найденного множества прямых, проходящих через точку M , есть единственная прямая, которая не только перпендикулярна к прямой m , но и пересекается с ней. Как построить такую прямую? Эта задача будет рассмотрена в следующем параграфе.

4.4. Решение типовых задач

Рассмотрим несколько геометрических задач, в которых требуется выполнять на чертеже построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.

Задача 1. Опустить перпендикуляр из точки M на прямую t общего положения (рис. 4.16).

Через точку M проведем плоскость Σ , перпендикулярную прямой t . Зададим эту плоскость горизонталью и фронталью так, чтобы на чертеже выполнялись условия теоремы 2: $h_1 \perp t_1$ и $f_2 \perp t_2$. Все прямые в плоскости Σ перпендикулярны прямой t .

Найдем точку K пересечения прямой m с плоскостью Σ . Для построения точки K следует применить схему решения первой позиционной задачи: провести через m вспомогательную секущую плоскость Δ , построить линию разреза $1-2$ и отметить искомую точку $K=m \cap (1-2)$.

Прямая MK лежит в плоскости Σ , следовательно, она перпендикулярна прямой m . При этом прямая MK пересекает прямую m . Поэтому отрезок MK есть искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую m .

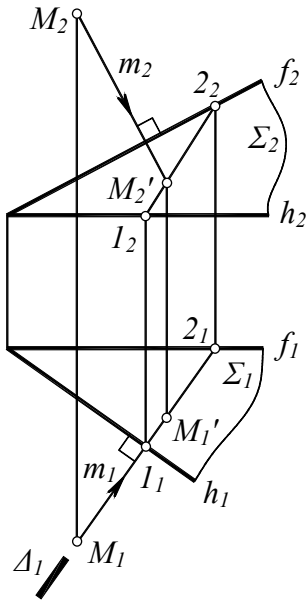


Рис. 4.17

Задача 2. Найти расстояние от точки M до прямой m . Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую m . Поэтому сначала надо опустить перпендикуляр MK на прямую m (см. рис. 4.16), а затем определить истинную длину отрезка MK способом прямоугольного треугольника (см. п. 2.2.2).

Задача 3. Построить ортогональную проекцию точки M на плоскость Σ общего положения (рис. 4.17).

Для построения ортогональной проекции надо через точку M провести проецирующий луч m , перпендикулярный плоскости Σ . Точка пересечения M' этого луча с плоскостью Σ – ортогональная проекция точки M на плоскость Σ .

Чтобы начертить прямую m , перпендикулярную плоскости Σ , надо выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$, где h и f – главные линии плоскости Σ (теорема 2). После построения перпендикуляра m находим точку M' пересечения этого перпендикуляра m с плоскостью Σ , используя вспомогательную секущую плоскость Δ (первая позиционная задача, см. лекцию 3). Точка M' – искомая ортогональная проекция.

Задача 4. Найти расстояние от точки M до плоскости Σ .

Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Поэтому сначала надо опустить перпендикуляр MM' из точки M на плоскость Σ (см. рис. 4.17), затем определить истинную длину отрезка MM' способом прямоугольного треугольника (см. п. 2.2.2).

Задача 5. Построить ортогональную проекцию отрезка AB на плоскость Σ , заданную горизонталью и фронталью (рис. 4.18).

Чтобы найти ортогональные проекции A' , B' концов отрезка AB на плоскость Σ , проведем через точки A и B перпендикуляры к плоскости Σ (теорема 2). Затем найдем точки A' , B' пересечения этих перпендикуляров с плоскостью Σ (первая позиционная задача). Отрезок $A'B'$ – искомая ортогональная проекция данного отрезка AB на плоскость Σ . Если задача решена правильно, то ортогональная проекция $A'B'$ пройдет через точку K пересечения прямой AB с плоскостью Σ (см. рис. 4.18).

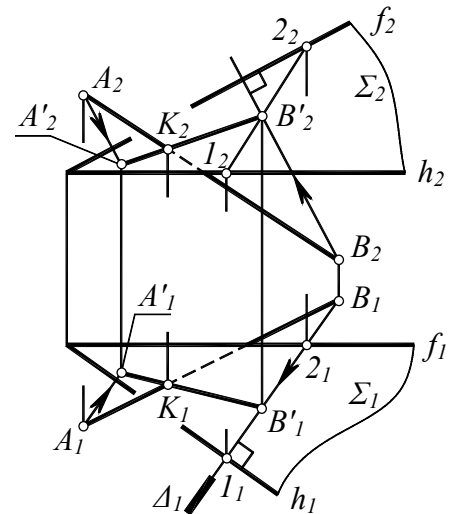


Рис. 4.18

Задача 6. Построить ортогональную проекцию треугольника ABC на плоскость параллелограмма (рис. 4.19).

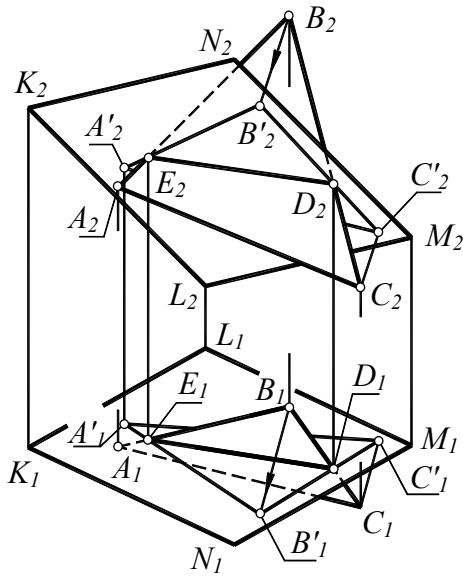


Рис. 4.19

Для решения задачи надо построить ортогональные проекции сторон треугольника на плоскость параллелограмма (так же, как и в предыдущей задаче).

Ортогональная проекция какой-либо стороны треугольника на плоскость параллелограмма проходит через точку пересечения этой стороны с плоскостью параллелограмма. Например, в точке E сторона AB треугольника пересекается с плоскостью параллелограмма. Ортогональная проекция $A'B'$ стороны AB проходит через точку E . Аналогичным образом, ортогональная проекция $B'C'$ стороны BC проходит через точку D пересечения стороны BC с плоскостью параллелограмма.

Точки D и E находят по схеме решения первой позиционной задачи. Вспомогательные построения на рис. 4.19 условно не показаны.

Задача 7. Построить множество точек, удаленных от плоскости $\Sigma(ABC)$ на расстояние 30 мм (рис. 4.20).

Множество точек, удаленных от данной плоскости на заданное расстояние, расположено в плоскости Σ' , параллельной данной плоскости Σ и удаленной от нее на заданное расстояние.

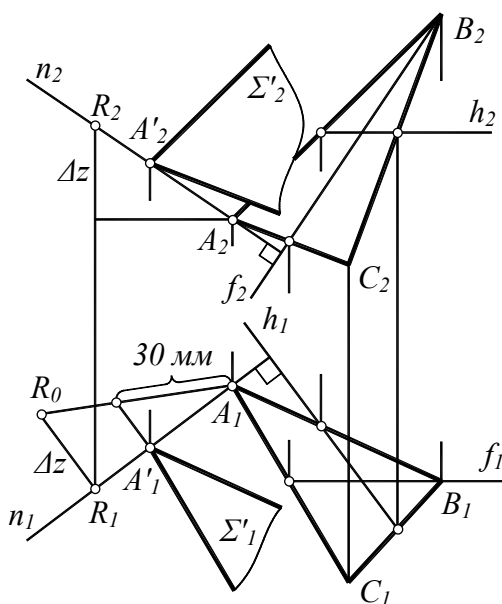


Рис. 4.20

Восставим перпендикуляр n к плоскости Σ из любой точки этой плоскости (например, из точки A). Для этого в плоскости Σ начертим ее главные линии (горизонталь и фронталь) и начертим проекции перпендикуляра n в соответствии с условиями теоремы 2 ($n_1 \perp h_1$ и $n_2 \perp f_2$).

Отложим вдоль перпендикуляра n от точки A отрезок AA' длиной 30 мм (см. п. 2.2.3). Через точку A' проведем плоскость Σ' , параллельную плоскости Σ . На рис. 4.20 плоскость Σ' задана парой пересекающихся прямых, параллельных сторонам треугольника ABC . Задача решена.

Задача имеет два решения. Второе решение будет получено, если заданное расстояние 30 мм отложить вдоль перпендикуляра n в другую сторону от точки A .

Задача 8. Построить множество точек, равноудаленных от данных точек A и B (рис. 4.21).

Точки, одинаково удаленные от двух данных точек A и B , располагаются в плоскости Σ , перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину. Искомую плоскость Σ зададим горизонталью и фронталью, перпендикулярными к отрезку AB и проходящими через его середину (точка O на рис. 4.21). Согласно теореме о перпендикулярности прямой и плоскости, на чертеже должны быть выполнены условия: $h_1 \perp$

$A_1B_1, f_2 \perp A_2B_2$, где h и f – главные линии искомой плоскости Σ , перпендикулярной отрезку AB . Поскольку плоскость $\Sigma(h \cap f)$ перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину, то все точки плоскости Σ равноудалены от данных точек A и B . Задача решена.

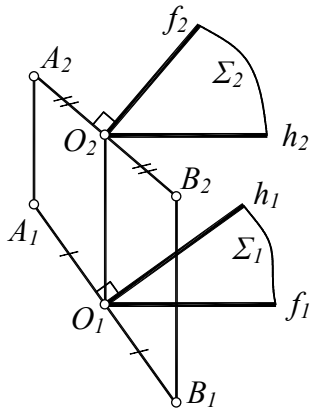


Рис. 4.21

Действие 1. Опускаем перпендикуляр AB из точки A на прямую b . Для этого проводим через точку A плоскость Θ , перпендикулярную прямым a и b (теорема 2). Затем с помощью проведенной через b вспомогательной секущей плоскости Σ находим точку B пересечения прямой b с плоскостью Θ (первая позиционная задача).

Действие 2. Способом прямоугольного треугольника (см. п. 2.2.2) определяем истинную длину отрезка AB . Задача решена.

Задача 9. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми a и b (рис. 4.22).

Отметим на одной из параллельных прямых (например, на прямой a) произвольную точку A . Из точки A опустим перпендикуляр AB на прямую b (см. задачу 1). Расстояние между параллельными прямыми равно длине отрезка AB . Составим схему решения задачи.

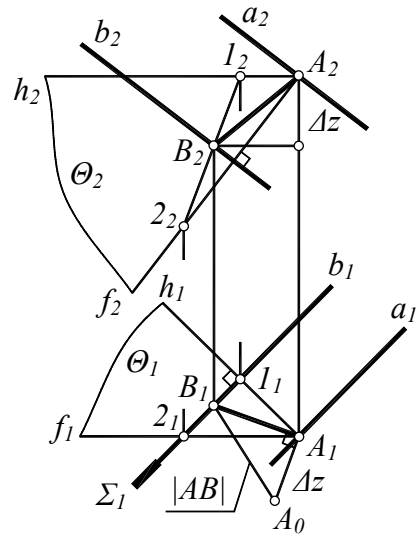


Рис. 4.22

Вопросы для повторения

1. Сформулировать признаки перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей.
2. Могут ли скрещивающиеся прямые быть взаимно перпендикулярны?
3. Сформулировать условие, при котором две прямые, расположенные в пространстве перпендикулярно друг другу, изображаются на плоскости проекций Π_1 или Π_2 взаимно перпендикулярными прямыми (теорема 1 о проекциях прямого угла).
4. Сколько прямых, перпендикулярных к данной прямой, можно провести через данную точку пространства?
5. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки пространства на данную прямую?
6. Как изображается на чертеже прямая линия, перпендикулярная к данной плоскости (теорема 2 о проекциях прямой, перпендикулярной к плоскости)?
7. Сколько перпендикуляров к плоскости можно провести через данную точку пространства?
8. Сколько плоскостей, перпендикулярных к данной плоскости, можно провести через данную точку пространства?

Лекция 5

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

Решение многих геометрических задач (как метрических, так и позиционных) упрощается, если исходные фигуры занимают частное положение относительно плоскостей проекций.

Пусть, например, требуется определить расстояние между параллельными прямыми a , b . Если эти прямые занимают общее положение (рис. 5.1, а), то для решения задачи требуется построить общий перпендикуляр к данным прямым, а затем способом прямоугольного треугольника определить его длину (см. п. 4.4, задача 9).

Если же эти прямые перпендикулярны к Π_1 (рис. 5.1, б), то для решения задачи надо всего лишь измерить расстояние между горизонтальными проекциями a_1 , b_1 данных прямых a , b .

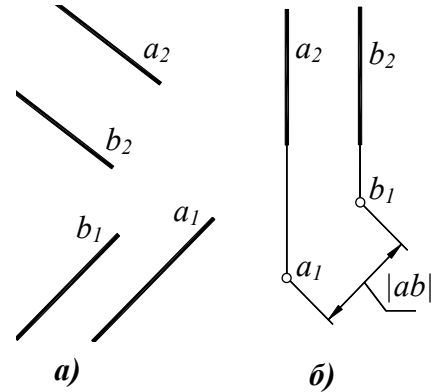


Рис. 5.1

Чертеж пространственных геометрических фигур можно преобразовать двумя способами: либо меняя положение системы координат относительно заданных неподвижных геометрических фигур, либо меняя положение фигур относительно заданной неподвижной системы координат. В обоих случаях цель преобразования состоит в том, чтобы какая-либо из заданных фигур заняла частное положение по отношению к одной из плоскостей проекций.

В настоящей лекции рассмотрены следующие способы.

1. *Способ замены плоскостей проекций*, основанный на изменении положения системы координат относительно заданных неподвижных геометрических фигур.

2. *Способ плоскопараллельного движения и способ вращения (вокруг проецирующей прямой или вокруг прямой уровня)*, основанные на перемещении фигур относительно неподвижной системы координат.

5.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций состоит в том, что одна из двух плоскостей проекций (Π_1 или Π_2) заменяется новой плоскостью проекций Π_4 , которая располагается перпендикулярно к незаменяемой плоскости проекций и при этом располагается частным образом относительно заданной фигуры. Образуется новая прямоугольная система плоскостей проекций, в которой заданная геометрическая фигура располагается частным образом относительно новой плоскости проекций.

Замена плоскости Π_2

Даны плоскости проекций Π_1/Π_2 и построены проекции A_1 , A_2 точки A (рис. 5.2). Плоскость Π_2 перпендикулярна к плоскости Π_1 . Вместо плоскости Π_2 введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , также перпендикулярную к плоскости Π_1 . Построим ортогональную проекцию A_4 точки A на плоскость проекций Π_4 . Сравним чертежи в исходной системе координат Π_1/Π_2 и в “новой” системе координат Π_1/Π_4 .

При переходе от системы координатных плоскостей Π_1/Π_2 к системе Π_1/Π_4 остались неизменными (инвариантными):

- положение точки A ,
- положение плоскости проекций Π_1 ,
- горизонтальная проекция A_1 точки A ,
- высота z_A точки A (расстояние от точки A до плоскости Π_1).

Выявленные инварианты позволяют на основании чертежа точки A в исходной системе координат Π_1/Π_2 построить чертёж точки A в новой системе координат Π_1/Π_4 .

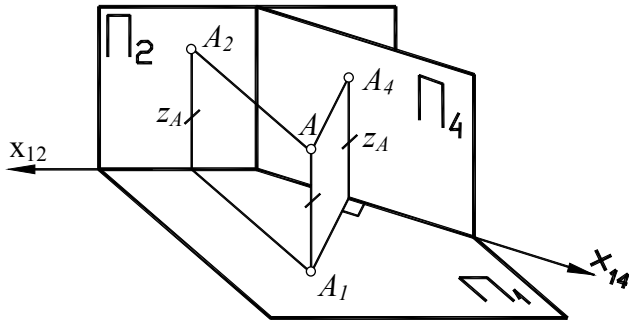


Рис. 5.2

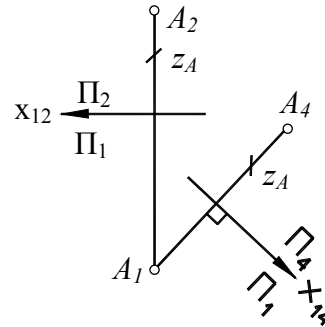


Рис. 5.3

На рис. 5.3 дан чертёж точки A как в исходной системе Π_1/Π_2 , так и в новой системе координат Π_1/Π_4 . Особо отмечено, что высота z_A точки A не изменилась при переходе от системы координат Π_1/Π_2 к системе Π_1/Π_4 : $|A_2-x_{12}|=|A_4-x_{14}|$ (почему?).

Новая ось координат x_{14} определяется как линия пересечения неизменяемой плоскости проекций Π_1 с новой плоскостью проекций Π_4 . Линия связи A_1A_4 на новом чертеже (в системе координат Π_1/Π_4) перпендикулярна новой оси координат x_{14} .

Чтобы на новой плоскости проекций Π_4 найти проекцию A_4 точки A , надо измерить расстояние от A_2 до x_{12} на плоскости Π_2 (высоту z_A точки A) и отложить это расстояние вдоль линии связи от новой оси координат x_{14} до искомой проекции A_4 точки A .

В результате выполненных построений получен чертёж точки A в “новой” системе координат Π_1/Π_4 (см. рис. 5.3).

Замена плоскости Π_1

В системе координатных плоскостей Π_1/Π_2 дана точка A и построены ее проекции A_1, A_2 . Вместо плоскости Π_1 введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , перпендикулярную Π_2 (рис. 5.4). Построим ортогональную проекцию A_4 точки A на новую плоскость проекций. Сравним чертежи в системах координат Π_1/Π_2 и Π_4/Π_2 .

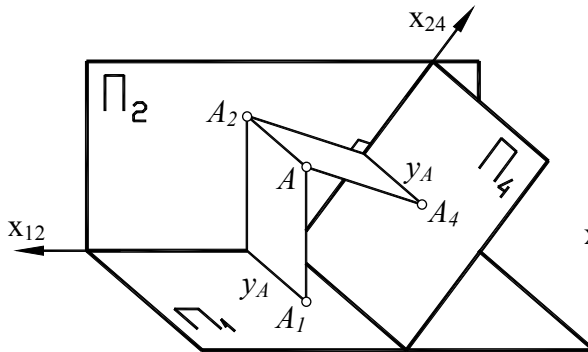


Рис. 5.4

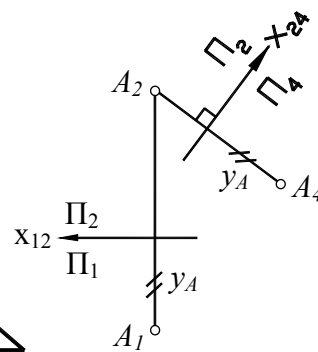


Рис. 5.5

При переходе от системы координатных плоскостей Π_1/Π_2 к системе координат Π_4/Π_2 остались неизменными (инвариантными):

- положение точки A ,
- положение плоскости проекций Π_2 ,
- фронтальная проекция A_2 точки A ,
- глубина y_A точки A (расстояние от точки A до плоскости Π_2).

Выявленные инварианты позволяют от чертежа точки в “старой” системе координат Π_1/Π_2 перейти к чертёжу точки в новой системе координат Π_2/Π_4 (рис. 5.5).

На рис. 5.5 дан чертеж точки A в исходной системе координат Π_1/Π_2 и в новой системе Π_2/Π_4 . Особо отмечено, что глубина u_A точки A (расстояние от оси x_{12} до горизонтальной проекции A_1 точки A) не изменилась при переходе от системы координат Π_1/Π_2 к системе Π_2/Π_4 : $|A_1-x_{12}|=|A_4-x_{24}|$ (почему?).

Новая ось координат x_{24} определяется как линия пересечения незаменимой плоскости проекций Π_2 с новой плоскостью проекций Π_4 . Линия связи A_2A_4 на новом чертеже (в системе координат Π_2/Π_4) перпендикулярна новой оси координат x_{24} .

Чтобы на новой плоскости проекций Π_4 найти проекцию A_4 точки A , надо измерить расстояние от A_1 до x_{12} на плоскости Π_1 (глубину u_A точки A) и отложить это расстояние вдоль линии связи от новой оси координат x_{24} до искомой проекции A_4 точки A .

В результате выполненных построений получен чертеж точки A в “новой” системе координат Π_2/Π_4 (см. рис. 5.5).

Сформулируем основное правило преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций.

Правило. Если фронтальная плоскость проекций Π_2 заменяется на новую плоскость проекций Π_4 , то высота z_A точки A (то есть расстояние от точки A до плоскости Π_1) в новой системе координат Π_1/Π_4 не меняется, так как горизонтальная плоскость проекций Π_1 остается неизменной.

Если горизонтальная плоскость проекций Π_1 заменяется на новую плоскость проекций Π_4 , то глубина u_A точки A (то есть расстояние от точки A до плоскости Π_2) в новой системе координат Π_2/Π_4 не меняется, так как фронтальная плоскость проекций Π_2 остается неизменной.

Это правило можно не вполне строго, но более кратко сформулировать следующим образом, более удобным для запоминания: *координата точки на новой плоскости проекций равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций*. Здесь под координатой точки следует понимать расстояние от ее проекции до оси координат (как на новой, так и на заменяемой плоскостях проекций).

5.2. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций

Способом замены плоскостей проекций решают следующие четыре задачи:

- преобразование прямой общего положения в прямую уровня,
- преобразование прямой уровня в проецирующую прямую,
- преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость,
- преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.

Последовательно рассмотрим каждую из перечисленных задач.

5.2.1. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

Чтобы преобразовать прямую общего положения AB в прямую уровня, надо одну из плоскостей проекций (например, Π_2) заменить новой плоскостью проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно незаменимой плоскости проекций Π_1 и параллельно данной прямой AB (рис. 5.6, *a*). Тогда в новой системе координат Π_1/Π_4 прямая AB займет положение линии уровня относительно новой плоскости проекций Π_4 . Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4, \text{ где } \Pi_4 \parallel AB, \Pi_4 \perp \Pi_1.$$

Чтобы выполнить такое преобразование, надо новую ось координат x_{14} провести параллельно горизонтальной проекции A_1B_1 данной прямой AB (см. рис. 5.6, *a*). Расстояние между x_{14} и A_1B_1 выбирается произвольно.

Проекции A_4, B_4 концов отрезка AB на новой плоскости проекций Π_4 определяются в соответствии с основным правилом замены плоскостей проекций: *координата любой точки на новой плоскости проекций (на Π_4) равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций (в данном примере – на Π_2)*.

В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая AB занимает положение линии уровня ($AB \parallel \Pi_4$), поэтому на плоскости Π_4 отрезок AB и угол α его наклона к Π_1 изображаются в натуральную величину (см. рис. 5.6, а). Таким образом, способ замены плоскостей проекций может быть использован для определения истинной длины отрезка прямой общего положения.

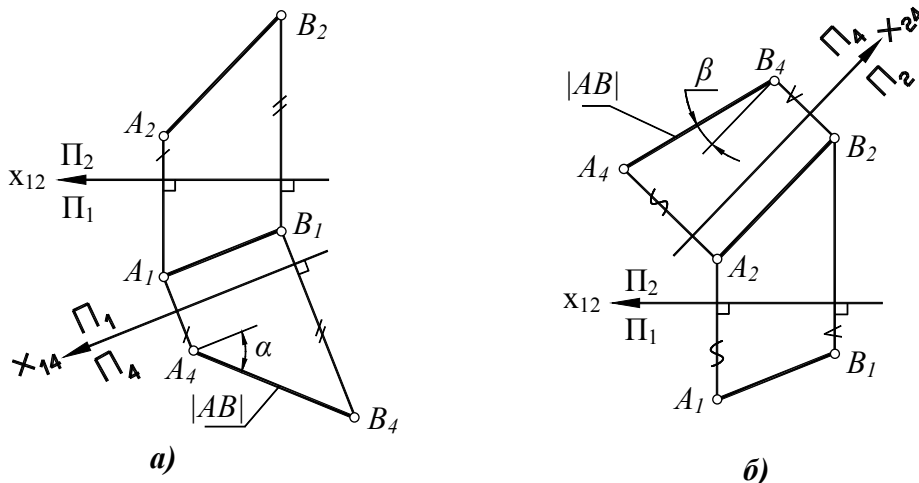


Рис. 5.6

Плоскости проекций Π_1 и Π_2 вполне “равноправны”, поэтому для преобразования прямой общего положения в линию уровня можно заменять не плоскость Π_2 (как показано на рис. 5.6, а), а плоскость Π_1 . Заменяем плоскость Π_1 новой плоскостью проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно плоскости Π_2 и параллельно данной прямой AB . Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_4/\Pi_2, \text{ где } \Pi_4 \parallel AB, \Pi_4 \perp \Pi_2.$$

Такое преобразование показано на рис. 5.6, б, где новая ось координат x_{24} проведена параллельно фронтальной проекции A_2B_2 прямой AB . В новой системе координат Π_2/Π_4 прямая AB занимает положение линии уровня ($AB \parallel \Pi_4$), поэтому на плоскости проекций Π_4 отрезок AB и угол β его наклона к Π_2 изображены в натуральную величину.

Рекомендуется самостоятельно выполнить два варианта замены плоскостей проекций, показанные на рис. 5.6, и убедиться, что величина $|AB| = A_4B_4$ не зависит от выбора заменяемой плоскости проекций.

5.2.2. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую

Линия уровня – это прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций. Пусть, например, дана фронталь $f=AB$ (рис. 5.7, а). Требуется преобразовать чертеж так, чтобы в новой системе координат фронталь $f=AB$ заняла проецирующее положение. Для этого надо ввести в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , установив ее перпендикулярно к фронтالي. Фронталь параллельна плоскости Π_2 , поэтому новая плоскость проекций Π_4 , перпендикулярная к $f=AB$, будет располагаться перпендикулярно к Π_2 . В новой системе взаимно перпендикулярных плоскостей Π_4/Π_2 фронталь $f=AB$ становится проецирующей прямой.

Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_4/\Pi_2, \text{ где } \Pi_4 \perp f(AB).$$

Преобразование показано на рис. 5.7, а, где новая ось координат x_{24} проведена перпендикулярно к фронтальной проекции f_2 фронтали. В новой системе координат Π_2/Π_4 прямая $f=AB$ становится проецирующей прямой ($AB \perp \Pi_4$), поэтому на Π_4 вся прямая $f=AB$ изображается точкой: $f_4=A_4=B_4$. На чертеже особо отмечено, что координата точки $A_4=B_4$ на новой плоскости проекций Π_4 равна координате точек A_1, B_1 на заменяемой плоскости проекций Π_1 .

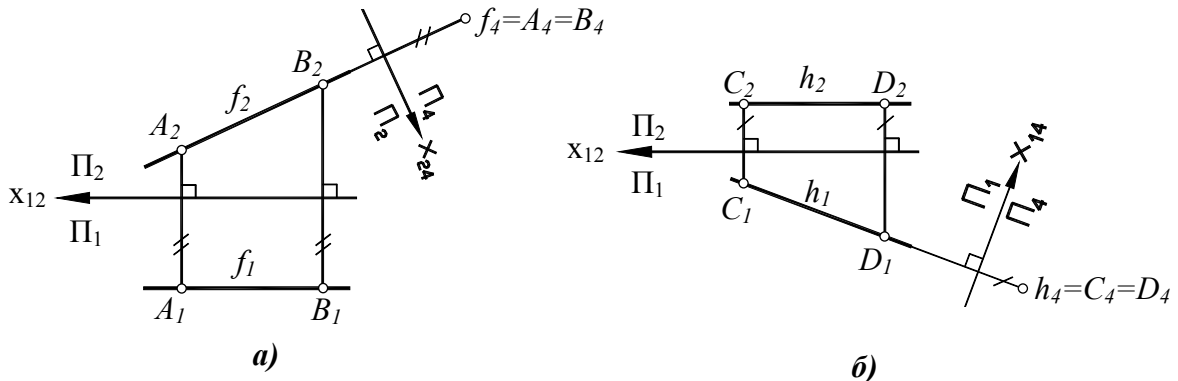


Рис. 5.7

Пусть дана горизонталь $h=CD$ (рис. 5.7, б). Для преобразования горизонтали в проецирующую прямую надо ввести в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , установив ее перпендикулярно к горизонтали. Горизонталь параллельна плоскости Π_1 , поэтому новая плоскость проекций Π_4 , перпендикулярная к $h=CD$, будет располагаться перпендикулярно к Π_1 . В новой системе взаимно перпендикулярных плоскостей Π_1/Π_4 горизонталь $h=CD$ становится проецирующей прямой.

Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4, \text{ где } \Pi_4 \perp h(CD).$$

Преобразование показано на рис. 5.7, б, где новая ось координат x_{14} проведена перпендикулярно к горизонтальной проекции h_1 горизонтали. В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая $h=CD$ стала проецирующей прямой ($CD \perp \Pi_4$), поэтому на Π_4 вся прямая $h=CD$ изображается точкой: $h_4=C_4=D_4$. Координата точки $C_4=D_4$ равна координате точек C_2, D_2 на заменяемой плоскости Π_2 .

Примечание. Для преобразования прямой общего положения в проецирующую прямую необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены прямая общего положения преобразуется в прямую уровня. В результате второй замены прямая уровня преобразуется в проецирующую прямую.

Например, на рис. 5.8 прямая общего положения AB преобразована в проецирующую прямую. Для этого потребовалось выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. Первая замена плоскостей проекций: $\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4$, где $\Pi_4 \parallel AB$, $\Pi_4 \perp \Pi_1$. В системе координат Π_1/Π_4 прямая AB стала прямой уровня ($AB \parallel \Pi_4$). Вторая замена плоскостей проекций: $\Pi_1/\Pi_4 \rightarrow \Pi_5/\Pi_4$, где $\Pi_5 \perp AB$. В системе координат Π_5/Π_4 прямая AB стала проецирующей прямой ($AB \perp \Pi_5$).

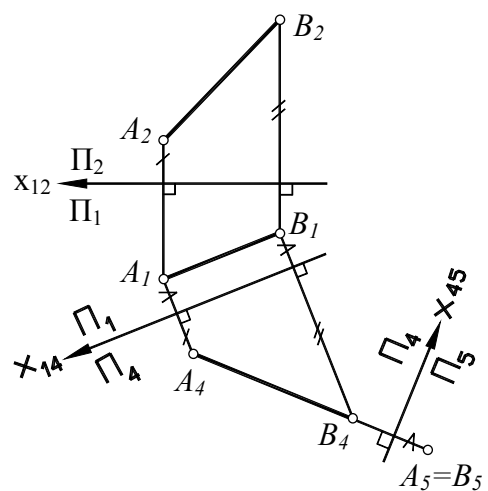


Рис. 5.8

5.2.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость

В системе координат Π_1/Π_2 задана плоскость общего положения $\Sigma(ABC)$. Проведем в плоскости Σ какую-нибудь линию уровня, например, горизонталь h (рис. 5.9, а). Введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно горизонтали h :

$$\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4, \text{ где } \Pi_4 \perp h.$$

При этом не только горизонталь, но вся плоскость Σ располагается перпендикулярно плоскости Π_4 (см. четвертый признак перпендикулярности плоскостей, п. 4.1). Следовательно, в новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость общего положения Σ становится проецирующей плоскостью ($\Sigma \perp \Pi_4$). На плоскости Π_4 проекция всей плоскости Σ вырождается в прямую линию $A_4B_4C_4$ (см. рис. 5.9, а).

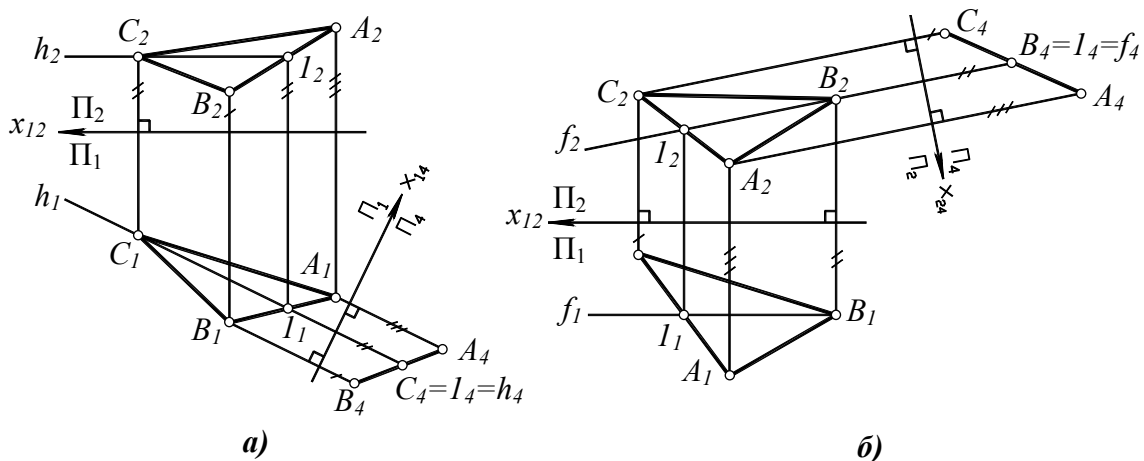


Рис. 5.9

Новую плоскость проекций можно расположить перпендикулярно не горизонтали (как на рис. 5.9, а), а перпендикулярно фронтالي f , лежащей в плоскости Σ (рис. 5.9, б):

$$\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_4/\Pi_2, \text{ где } \Pi_4 \perp f.$$

Фронталь f , лежащая в $\Sigma(ABC)$, перпендикулярна к плоскости Π_4 . Следовательно, в новой системе координат Π_4/Π_2 плоскость общего положения Σ становится проецирующей плоскостью ($\Sigma \perp \Pi_4$). Поэтому на плоскости Π_4 проекция всей плоскости $\Sigma(ABC)$ вырождается в прямую линию $A_4B_4C_4$ (см. рис. 5.9, б).

Таким образом, чтобы преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость, требуется выполнить одну замену плоскостей проекций.

5.2.4. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня

Чтобы преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня, надо новую плоскость проекций разместить параллельно данной проецирующей плоскости.

Пусть требуется преобразовать горизонтально-проецирующую плоскость $\Sigma(ABC)$ в плоскость уровня (рис. 5.10, а). Заменяем плоскость Π_2 плоскостью Π_4 , расположив её параллельно данной плоскости $\Sigma(ABC)$: $\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4$, где $\Pi_4 \parallel \Sigma$.

В новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость $\Sigma(ABC)$ стала плоскостью уровня относительно новой плоскости проекций Π_4 : $\Sigma \parallel \Pi_4$. Поэтому проекция $A_4B_4C_4$ представляет собой натуральную величину треугольника ABC (см. рис. 5.10, а).

Чтобы преобразовать фронтально-проецирующую плоскость $\Gamma(DEF)$ в плоскость уровня (рис. 5.10, б), заменяем плоскость Π_1 плоскостью Π_4 , расположив плоскость Π_4 параллельно данной плоскости: $\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_4/\Pi_2$, где $\Pi_4 \parallel \Gamma(DEF)$.

В новой системе координат Π_4/Π_2 плоскость $\Gamma(DEF)$ стала плоскостью уровня относительно новой плоскости проекций Π_4 : $\Gamma \parallel \Pi_4$. Поэтому проекция $D_4E_4F_4$ представляет собой натуральную величину треугольника DEF (см. рис. 5.10, б).

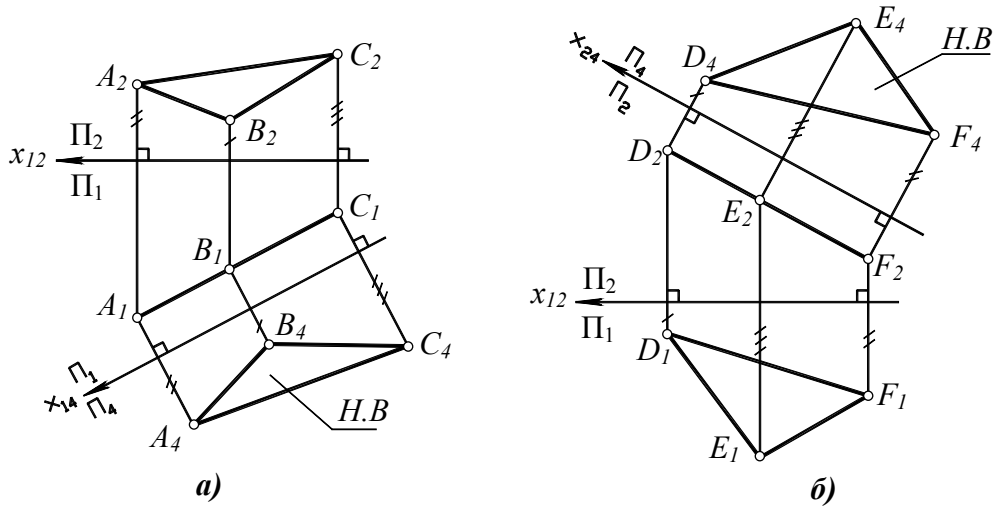


Рис. 5.10

Таким образом, чтобы преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня, требуется выполнить одну замену плоскостей проекций.

Примечание. Для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены плоскость общего положения преобразуется в проецирующую плоскость. В результате второй замены проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

Например, на рис. 5.11 показано преобразование плоскости общего положения $\Sigma(ABC)$ в плоскость уровня. Для этого потребовалось выполнить две последовательные замены плоскостей проекций.

Первая замена плоскостей проекций: $\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4$, где $\Pi_4 \perp h$. Заменяется плоскость Π_2 , поэтому координаты точек A, B, C переносятся с плоскости Π_2 на новую плоскость проекций Π_4 (например, координата a точки A перенесена с Π_2 на Π_4). В новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость $\Sigma(ABC)$ стала занимать проецирующее положение ($\Sigma \perp \Pi_4$).

Вторая замена плоскостей проекций: $\Pi_1/\Pi_4 \rightarrow \Pi_5/\Pi_4$, где $\Pi_5 \parallel \Sigma$. Заменяется плоскость Π_1 , поэтому координаты точек A, B, C переносятся с плоскости Π_1 на новую плоскость проекций Π_5 (например, координата b точки B перенесена с Π_1 на Π_5). В новой системе координат Π_5/Π_4 плоскость

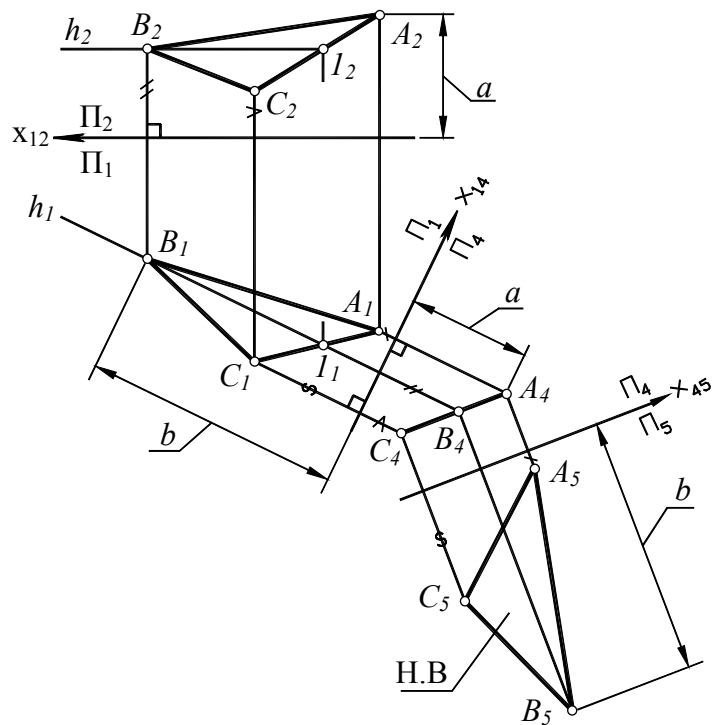


Рис. 5.11

$\Sigma(ABC)$ стала плоскостью уровня ($\Sigma \parallel \Pi_5$), поэтому на плоскости Π_5 треугольник ABC изображен в натуральную величину.

Таким образом, способ замены плоскостей проекций может быть использован для определения истинной формы геометрической фигуры, лежащей в плоскости общего положения.

5.3. Примеры решения задач способом замены плоскостей проекций

Задача 1. Определить истинную длину отрезка AB и углы его наклона к плоскостям проекций (рис. 5.12, а). Решить задачу двумя способами: способом замены плоскостей проекций и способом прямоугольного треугольника. Решения сравнить и проверить числовым расчетом с помощью теоремы Пифагора ($AB^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$).

Решение способом замены плоскостей проекций (рис. 5.12, б)

Вместо плоскости Π_2 введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее параллельно данному отрезку AB и перпендикулярно плоскости Π_1 :

$$\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_4/\Pi_1.$$

Отрезок AB и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций (угол α) проецируются на новую плоскость проекций Π_4 в натуральную величину.

Чтобы определить угол наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций Π_2 , введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_5 , разместив ее параллельно отрезку AB и перпендикулярно плоскости Π_2 : $\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_2/\Pi_5$ (см. рис. 5.12, б). Отрезок AB и угол его наклона к фронтальной плоскости проекций (угол β) проецируются на новую плоскость проекций Π_5 в натуральную величину.

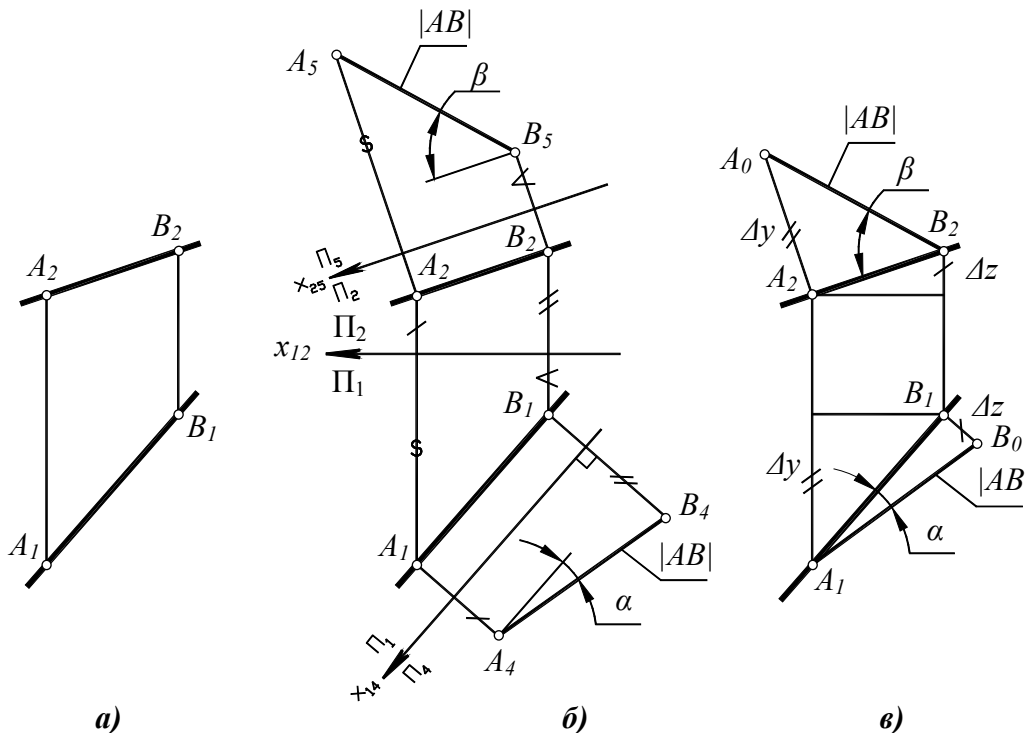


Рис. 5.12

Решение способом прямоугольного треугольника (рис. 5.12, в)

Для определения истинной длины отрезка начертим вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$ (см. п. 2.2.2). Один его катет равен горизонтальной проекции A_1B_1 отрезка, другой катет равен разности высот Δz концов отрезка. Гипотенуза этого

треугольника равна истинной длине отрезка AB . Угол α , противолежащий катету Δz , равен истинному углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Чтобы определить угол наклона отрезка к плоскости проекций Π_2 , построим еще один вспомогательный прямоугольный треугольник $A_2B_2A_0$ (см. рис. 5.12, в). Один его катет равен фронтальной проекции A_2B_2 отрезка AB , другой катет равен разности глубин Δy концов отрезка. Гипотенуза этого треугольника равна истинной длине отрезка AB . Угол β , противолежащий катету Δy , равен истинному углу наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций.

Проверка решения по теореме Пифагора

На чертеже измеряем разность координат Δx , Δy , Δz концов A , B отрезка и по формуле $AB^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ вычисляем его длину. Углы наклона отрезка к плоскостям проекций определяются из тригонометрических соотношений: $\sin \alpha = \Delta z / |AB|$, $\sin \beta = \Delta y / |AB|$. Если задача решена правильно, то все три способа дадут одинаковый результат.

Задача 2. На прямой l общего положения отложить от точки A отрезок AB длиной 25 мм (рис. 5.13, а).

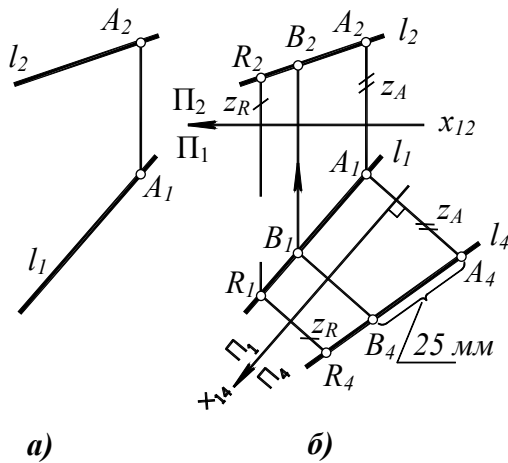


Рис. 5.13

Отметив на прямой l произвольную точку R , преобразуем прямую l в прямую уровня. Для этого вместо плоскости Π_2 введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее параллельно прямой l и перпендикулярно плоскости Π_1 (рис. 5.13, б): $\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_4/\Pi_1$. Любой отрезок прямой l проецируется на новую плоскость проекций Π_4 в натуральную величину. Поэтому откладываем от точки A_4 вдоль l_4 заданное расстояние 25 мм, отмечаем точку B_4 и “возвращаем” ее с помощью линий связи в исходную систему координат Π_2/Π_1 .

Задача имеет два решения, так как на прямой l от точки A можно отложить отрезок 25 мм в двух направлениях.

Задача 3. Построить проекции и определить длину перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую a (рис. 5.14).

Если прямая a занимает проецирующее положение (например, $a \perp \Pi_1$), то задача решается безо всяких затруднений, поскольку в этом случае взаимно перпендикулярные прямые KA и a изображаются на Π_2 сторонами прямого угла, а горизонтальная проекция K_1A_1 перпендикуляра KA равна его истинной длине (почему?).

Если же прямая a занимает общее положение (рис. 5.14, б), то надо предварительно преобразовать данную прямую в проецирующую (то есть чертеж, показанный на рис. 5.14, б, преобразовать к виду, показанному на рис. 5.14, а). Для этого необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены прямая общего положения преобразуется в прямую уровня. В результате второй замены прямая уровня преобразуется в проецирующую прямую.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой a и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 (рис. 5.14, в). В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая a становится прямой уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5 , перпендикулярную прямой a (см. рис. 5.14, в). В новой системе координат Π_4/Π_5 прямая a становится проецирующей прямой.

Далее задача решается так, как показано на чертеже рис. 5.14, а. Точку A (основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую a), построенную в системе координат Π_4/Π_5 , “возвращаем” в исходную систему координат Π_2/Π_1 (см. рис. 5.14, в).

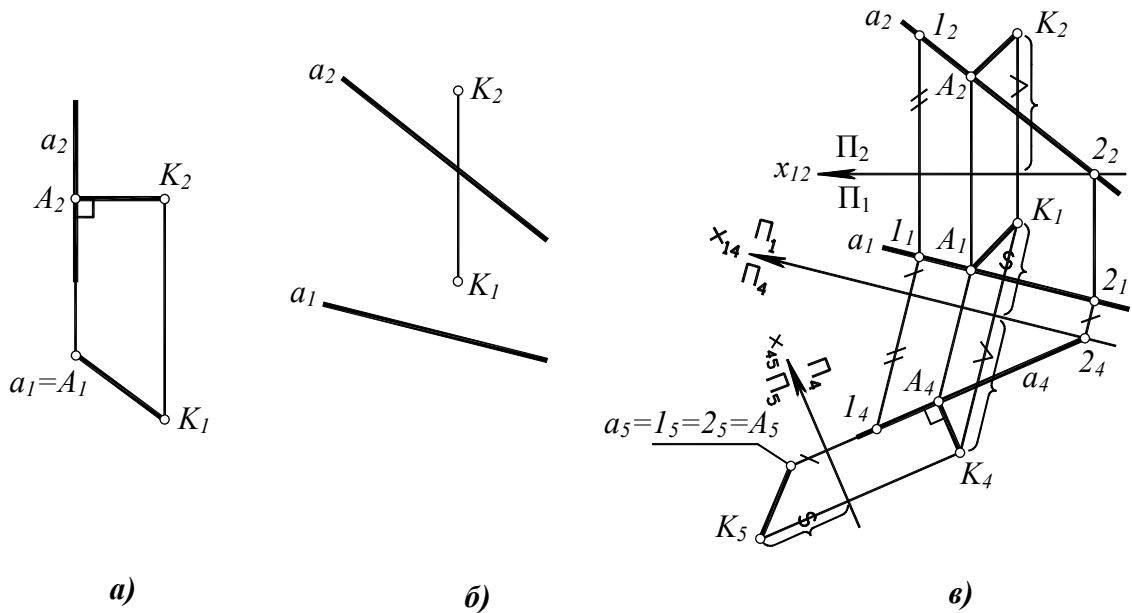


Рис. 5.14

Задача 4. Определить расстояние $|AB|$ между параллельными прямыми a и b (рис. 5.15, а). Построить проекции отрезка AB в исходной системе координат Π_2/Π_1 .

Преобразуем данные параллельные прямые a, b общего положения в проецирующие прямые. Для этого надо выполнить две замены плоскостей проекций.

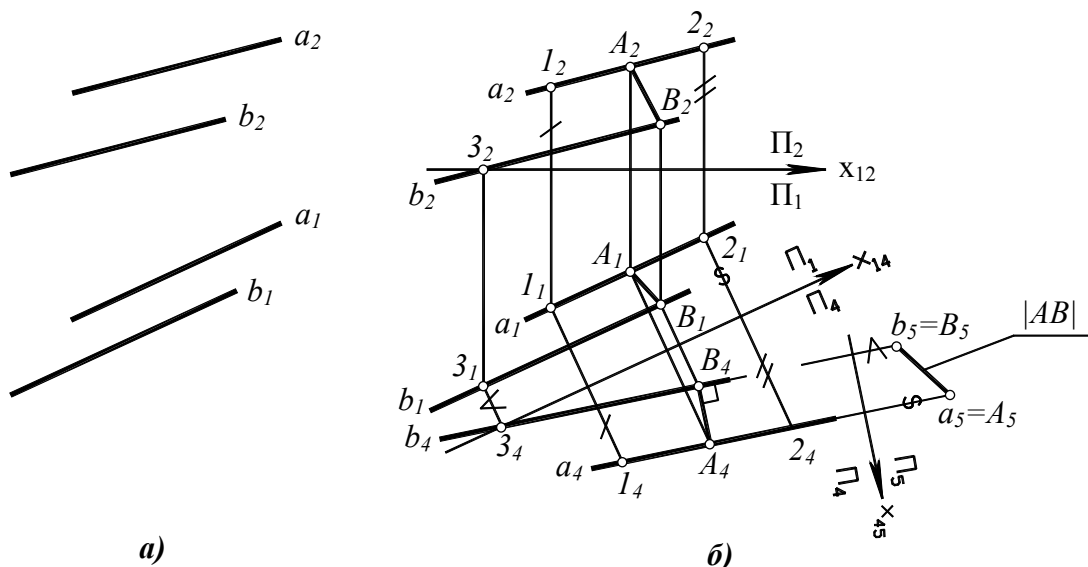


Рис. 5.15

Первая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямым a, b и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 (рис. 5.15, б). В новой системе координат Π_1/Π_4 прямые a, b становятся прямыми уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5 , перпендикулярную прямым a, b . В новой системе координат Π_4/Π_5 прямые a, b становятся проецирующими прямыми.

Для окончательного решения задачи надо всего лишь измерить расстояние между проекциями a_5, b_5 данных прямых a, b (как показано на рис. 5.1). Отрезок AB общего перпендикуляра к данным прямым “возвращаем” с помощью линий связи в исходную систему координат Π_2/Π_1 (см. рис. 5.15, б).

Задача 5. *Определить расстояние AK от точки A до плоскости $\Sigma(BCD)$ общего положения (рис. 5.16, а). Построить отрезок AK в исходной системе координат.*

Преобразуем чертеж так, чтобы плоскость общего положения $\Sigma(BCD)$ заняла проецирующее положение. Для этого вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно плоскости $\Sigma(BCD)$ (рис. 5.16, б).

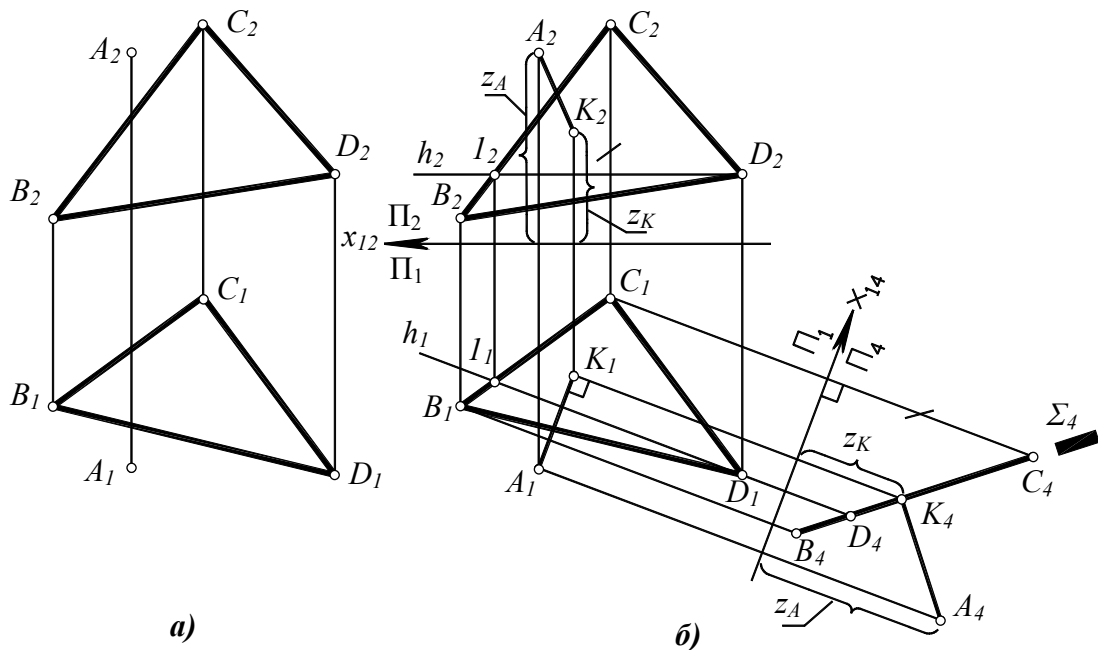


Рис. 5.16

В новой системе координат Π_1/Π_4 проекция $B_4C_4D_4$ плоскости $\Sigma(BCD)$ вырождается в прямую линию. Из точки A_4 опускаем перпендикуляр A_4K_4 на вырожденную проекцию $B_4C_4D_4$ плоскости $\Sigma(BCD)$. Искомое расстояние от точки A до плоскости Σ равно длине отрезка A_4K_4 .

Заметим, что в новой системе координат Π_1/Π_4 прямая AK является прямой уровня (прямая AK параллельна плоскости Π_4). С учетом этого находим проекцию K_1 точки K , а затем “возвращаем” отрезок AK в исходную систему координат Π_1/Π_2 .

Задача 6. *Определить истинную форму параллелограмма $ABCD$, лежащего в плоскости Σ общего положения (рис. 5.17).*

Для решения задачи надо преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения $\Sigma(ABCD)$ стала плоскостью уровня. Для этого требуется выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены плоскость общего положения $\Sigma(ABCD)$ преобразуется в проецирующую плоскость. В результате второй замены проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

Первая замена плоскостей проекций

Вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее перпендикулярно плоскости $\Sigma(ABCD)$. Вместо чертежа в системе координат Π_2/Π_1 получаем чертеж в новой системе координат Π_4/Π_1 . Напомним основное правило: координата точки

на новой плоскости проекций Π_4 равна координате этой точки на заменяемой плоскости проекций Π_2 . Например, координата точки C на плоскости проекций Π_4 равна координате z_C точки C на плоскости Π_2 .

В новой системе координат Π_4/Π_1 плоскость $\Sigma(ABCD)$ заняла проецирующее положение. Проекция параллелограмма $A_4B_4C_4D_4$ на плоскость Π_4 выродилась в прямую линию (см. рис. 5.17).

Вторая замена плоскостей проекций

Вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_5 , расположив ее параллельно плоскости $\Sigma(ABCD)$. Получаем чертеж в новой системе координат Π_4/Π_5 . Согласно основному правилу (см. п. 5.1), координата любой точки на новой плоскости проекций Π_5 равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций Π_1 . Например, координата точки D_5 на плоскости проекций Π_5 равна координате δ_D точки D_1 на плоскости Π_1 . Проекция $A_5B_5C_5D_5$ – натуральная величина (Н.В) параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 5.17).

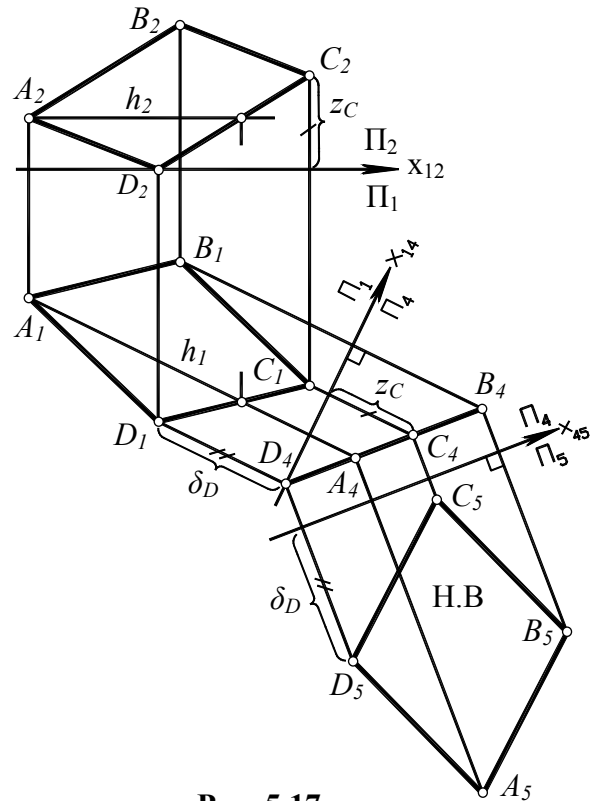


Рис. 5.17

5.4. Способ плоскопараллельного движения

Способом плоскопараллельного движения данная геометрическая фигура приводится в частное положение в результате ее перемещения в пространстве относительно неподвижной системы плоскостей проекций.

Определение. Движение фигуры в пространстве называется плоскопараллельным, если все ее точки перемещаются в параллельных плоскостях.

Будем рассматривать только такие плоскопараллельные движения фигуры относительно плоскостей проекций, когда все точки данной фигуры перемещаются либо параллельно плоскости Π_1 , либо параллельно плоскости Π_2 .

Пусть, например, треугольник ABC совершает плоскопараллельное движение относительно фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 5.18). Его вершины перемещаются во фронтальных плоскостях уровня, следовательно, горизонтальные проекции вершин перемещаются по горизонтальным прямым. При таком движении угол наклона плоскости треугольника к плоскости Π_2 не меняется, поэтому фронтальная проекция треугольника не меняет свою форму. Отсюда следует теорема.

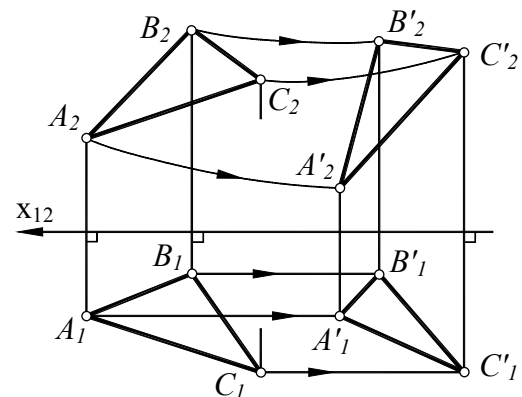


Рис. 5.18

Теорема. При плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскости Π_2 горизонтальные проекции ее точек перемещаются по прямым, перпендикулярным вер-

тикальным линиям связи, а фронтальная проекция фигуры остается конгруэнтной самой себе.

Взаимно перпендикулярные плоскости проекций Π_1 и Π_2 вполне “равноправны”, поэтому теорема справедлива и для случая плоскопараллельного перемещения относительно плоскости Π_1 : при плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскости Π_1 фронтальные проекции ее точек перемещаются по прямым, перпендикулярным вертикальным линиям связи, а горизонтальная проекция фигуры остается конгруэнтной самой себе.

Примечание. Плоскопараллельное движение данной фигуры из своего исходного положения в конечное положение может происходить по произвольной криволинейной траектории. Каждая точка фигуры описывает при этом некоторую плоскую кривую. Например, на рис. 5.18 вершины треугольника ABC описывают кривые линии $A-A'$, $B-B'$, $C-C'$, форма которых никак не влияет на результат преобразования. Существенное значение имеет только конечное положение перемещаемой фигуры, а не траектория плоскопараллельного перемещения.

Основные задачи, решаемые способом плоскопараллельного движения

Перемещая данную геометрическую фигуру, можно разместить ее частным образом относительно плоскостей проекций: прямую общего положения можно передвинуть в положение прямой уровня или проецирующей прямой, а плоскость общего положения – переместить в положение проецирующей плоскости или плоскости уровня.

Напомним, что в п. 5.2 рассматривался способ замены плоскостей проекций, когда перемещались плоскости проекций, а данная фигура оставалась неподвижной. Сейчас будет рассмотрен “обратный” способ: будем перемещать данные фигуры относительно неподвижных плоскостей проекций.

Задача 1. Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня.

Пусть требуется прямую AB общего положения преобразовать в прямую уровня, например, во фронталь (рис. 5.19). Иначе говоря, надо так передвинуть отрезок AB , чтобы он стал располагаться параллельно фронтальной плоскости проекций.

Выполним плоскопараллельное перемещение отрезка AB относительно плоскости Π_1 (по произвольной траектории). В соответствии со сформулированной выше теоремой, фронтальные проекции точек A , B будут при этом перемещаться по горизонтальным прямым A_2-A_2' , B_2-B_2' . Длина горизонтальной проекции отрезка при таком движении не изменяется: $A_1B_1=A_1'B_1'$. Перемещение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет требуемое в задаче положение фронтали: $A'B' \parallel \Pi_2$.

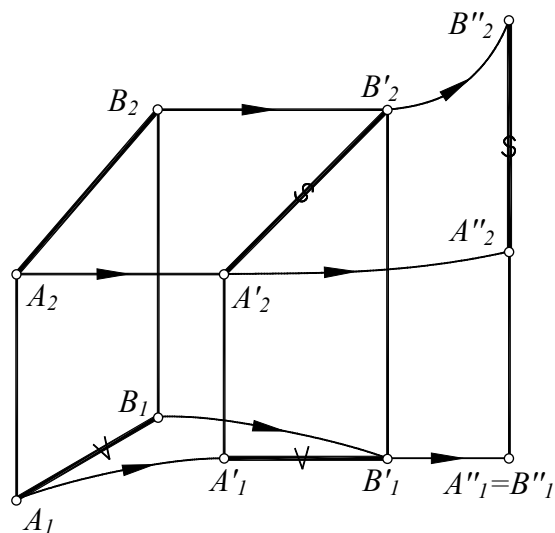


Рис. 5.19

Задача 2. Преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую.

Пусть требуется преобразовать прямую уровня $A'B'$ (фронталь) в горизонтально-проецирующую прямую (см. рис. 5.19). Иначе говоря, надо так передвинуть отрезок $A'B'$, параллельный фронтальной плоскости проекций, чтобы он расположился перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций.

Перемещаем отрезок $A'B'$ по произвольной траектории в новое положение $A''B''$, сохраняя параллельность отрезка плоскости Π_2 (то есть выполняем плоскопараллельное перемещение отрезка $A'B'$ относительно плоскости проекций Π_2). Перемещение заканчивается, когда отрезок становится горизонтально-проецирующей прямой: $A''B'' \perp \Pi_1$.

Чертеж, представленный на рис. 5.19, можно рассматривать как решение задачи преобразования прямой общего положения AB в проецирующую прямую $A''B''$ посредством двух последовательных плоскопараллельных перемещений.

Задача 3. *Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость.*

Дана плоскость ABC общего положения (рис. 5.20). Проведем в плоскости какую-нибудь линию уровня (например, фронталь f). Выполним плоскопараллельное перемещение треугольника $ABC \rightarrow A'B'C'$ относительно фронтальной плоскости проекций (по произвольной траектории). Закончим перемещение, когда фронталь f займет горизонтально-проецирующее положение f' . При этом вся плоскость $A'B'C'$ становится горизонтально-проецирующей плоскостью (почему?).

Фронтальные проекции треугольников ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны. Горизонтальные проекции криволинейных траекторий $A-A'$, $B-B'$, $C-C'$ – прямые линии (см. рис. 5.20).

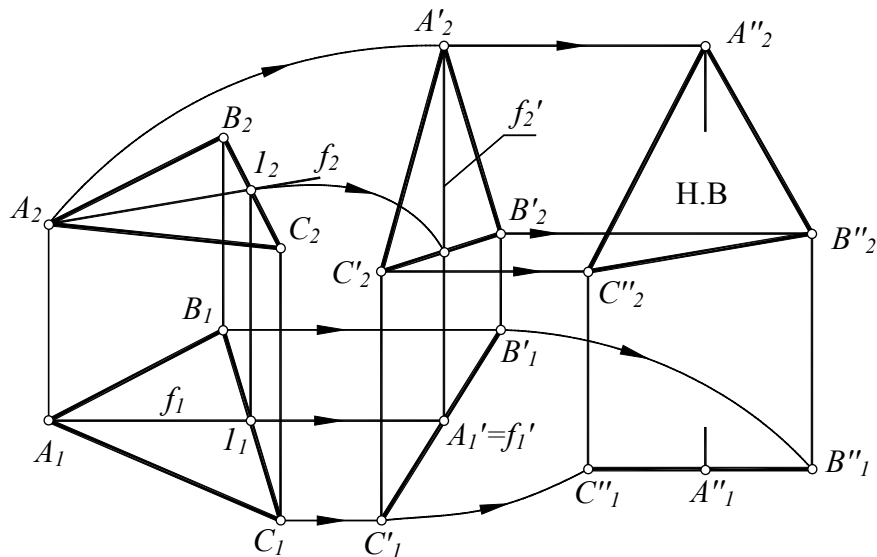


Рис. 5.20

Задача 4. *Проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.*

Плоскость $A'B'C'$, занимающую горизонтально-проецирующее положение, требуется преобразовать в плоскость уровня (см. рис. 5.20). Для решения задачи надо переместить плоскость $A'B'C'$ в положение $A''B''C''$, параллельное плоскости Π_2 . В процессе движения сохраняется перпендикулярность плоскости $A'B'C'$ к плоскости проекций Π_1 . Любая точка плоскости $A'B'C'$ перемещается в горизонтальной плоскости уровня, поэтому фронтальные проекции криволинейных траекторий $A'-A''$, $B'-B''$, $C'-C''$ изображаются на чертеже горизонтальными прямыми линиями (см. рис. 5.20).

Примечание. Чертеж, представленный на рис. 5.20, можно рассматривать как решение задачи определения истинной формы фигуры, лежащей в плоскости общего положения. Действительно, треугольник ABC в своем новом положении $A''B''C''$ параллелен фронтальной плоскости проекций, поэтому $A_2''B_2''C_2''$ – натуральная величина треугольника ABC , лежащего в плоскости общего положения. Для решения задачи потребовалось выполнить два последовательных плоскопараллельных перемещения данной плоской фигуры.

5.5. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

При плоскопараллельном перемещении фигуры каждая ее точка описывает некоторую произвольную плоскую кривую. При вращении фигуры вокруг проецирующей прямой каждая ее точка описывает не произвольную кривую, а окружность. Поэтому вращение вокруг проецирующей прямой может рассматриваться как частный случай плоскопараллельного движения.

Пусть, например, треугольник ABC вращается вокруг горизонтально-проецирующей прямой j (рис. 5.21). Его вершины перемещаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (на рис. 5.21 – в горизонтальных плоскостях Γ и Γ'). Фронтальная проекция траектории любой точки фигуры – прямая линия, горизонтальная проекция – окружность. При таком движении угол наклона плоскости треугольника к плоскости Π_1 не меняется, поэтому горизонтальная проекция треугольника не меняет свою форму (треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'_1B'_1C'_1$ конгруэнтны).

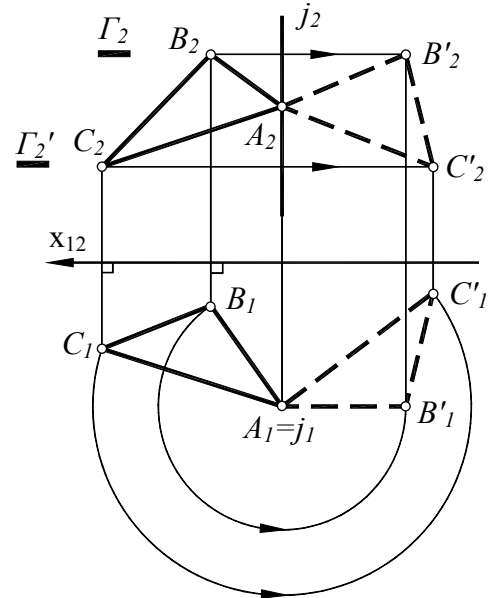


Рис. 5.21

Рассмотрим алгоритмы решения основных задач способом вращения вокруг проецирующей прямой.

Задача 1. Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня.

Пусть требуется преобразовать прямую AB общего положения в прямую уровня, например, во фронталь (рис. 5.22). В качестве оси вращения j выбираем вертикальную прямую ($j \perp \Pi_1$). Если в качестве оси вращения выбрать фронтально-проецирующую прямую (перпендикулярную Π_2), то прямую общего положения не удастся преобразовать во фронталь (почему?).

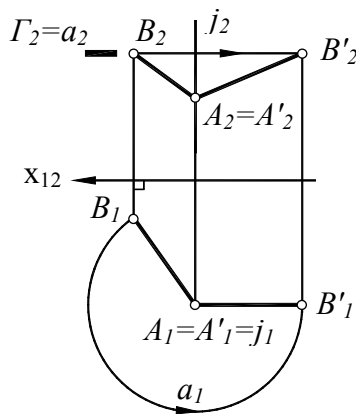


Рис. 5.22

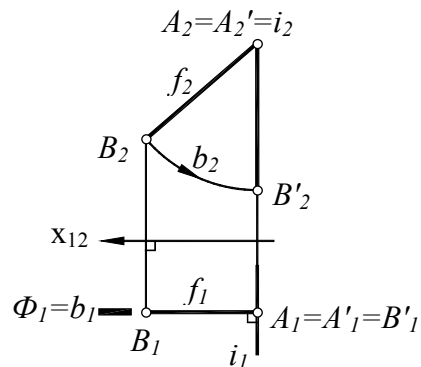


Рис. 5.23

Для упрощения графического решения ось вращения j проведем через точку A . Тогда в процессе вращения точка A остается на своем месте. Нужно построить лишь новое положение точки B .

Точка B описывает окружность a , плоскость Γ которой параллельна Π_1 . Длина горизонтальной проекции A_1B_1 отрезка AB при таком движении не изменяется.

Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет требуемое в задаче положение линии уровня (фронталь): $A'B' \parallel \Pi_2$. Фронтальная проекция $A'_2B'_2$ повернутого отрезка определяет натуральную величину данного отрезка AB , поэтому способом вращения вокруг проецирующей прямой можно решить задачу определения истинной длины отрезка прямой общего положения (см. рис. 5.22).

Задача 2. Преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую.

Пусть требуется преобразовать прямую уровня $f=AB$ (фронталь) в горизонтально-проецирующую прямую (рис. 5.23). В качестве оси вращения i выбираем фронтально-проецирующую прямую ($i \perp \Pi_2$). Если выбрать вертикальную ось вращения, то фронталь не удастся преобразовать в проецирующую прямую (почему?).

Для упрощения графического решения ось вращения i проводим через точку A . Тогда в процессе вращения точка A остается на своем месте. Нужно построить лишь новое (повернутое) положение точки B . Точка B в процессе поворота вокруг i описывает окружность b , плоскость Φ которой параллельна Π_2 . Длина фронтальной проекции отрезка AB при таком движении не изменяется. Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет требуемое вертикальное (горизонтально-проецирующее) положение: $A'B' \perp \Pi_1$.

Задача 3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость.

Дана плоскость ABC общего положения (рис. 5.24). Проведем в плоскости какую-нибудь линию уровня (например, фронталь). Вращением вокруг фронтально-

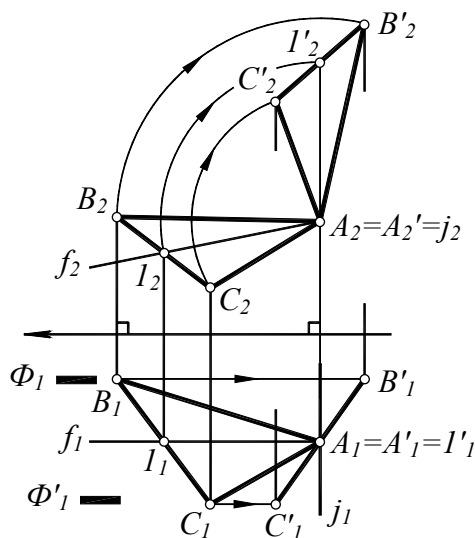


Рис. 5.24

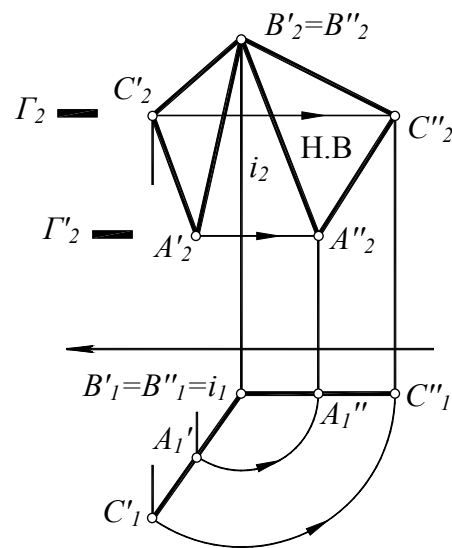


Рис. 5.25

проецирующей прямой j повернем треугольник ABC таким образом, чтобы фронталь f стала горизонтально-проецирующей прямой. Треугольник займет положение $A'B'C'$, перпендикулярное к Π_1 . В процессе вращения точка A неподвижна, так как находится на оси вращения j . Точки B и C описывают окружности, лежащие в фронтальных плоскостях уровня Φ и Φ' (см. рис. 5.24).

Задача 4. Проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.

Плоскость $A'B'C'$, занимающую горизонтально-проецирующее положение, требуется преобразовать в плоскость уровня (рис. 5.25). Вращаем треугольник $A'B'C'$ вокруг вертикальной оси i . Вращение прекращается, когда треугольник займет положение $A''B''C''$, параллельное плоскости Π_2 . В процессе вращения сохраняется перпендикулярность плоскости треугольника к плоскости проекций Π_1 . Точки A' и C' описывают

окружности, лежащие в горизонтальных плоскостях уровня Γ и Γ' . Точка B' , лежащая на оси вращения i , остается на своем месте.

Примечание. Чертежи, представленные на рис. 5.24 и рис. 5.25, можно рассматривать как решение задачи определения истинной формы треугольника ABC , лежащего в плоскости общего положения, двумя последовательными вращениями треугольника. Вращением вокруг фронтально-проецирующей оси j треугольник ABC переведен в горизонтально-проецирующее положение $A'B'C'$ (см. рис. 5.24). Вращением вокруг горизонтально-проецирующей оси i треугольник $A'B'C'$ повернут в положение $A''B''C''$, параллельное фронтальной плоскости проекций (см. рис. 5.25). Проекция $A_2''B_2''C_2''$ - натуральная величина треугольника ABC .

5.6. Способ вращения вокруг прямой уровня

Вращение вокруг прямой уровня применяется, как правило, для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня. Рассмотренными ранее способами эта задача решается двумя преобразованиями (сначала плоскость общего положения преобразуется в проецирующую плоскость, затем проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня). В отличие от ранее рассмотренных способов, вращение вокруг прямой уровня позволяет решить эту задачу не двумя, а одним преобразованием.

Задача. Определить натуральную величину треугольника ABC вращением вокруг его горизонтали (рис. 5.26).

Горизонталь $h=C-I$ проведена через вершину C , поэтому в процессе вращения треугольника вокруг горизонтали точки C и I остаются в покое. Точки A и B , вращаясь вокруг h , описывают окружности, лежащие в плоскостях Φ и Φ' . Эти плоскости перпендикулярны горизонтали h , следовательно, перпендикулярны плоскости Π_1 .

Например, точка A , вращаясь вокруг оси h , описывает в пространстве окружность радиуса R_A . Центр O этой окружности находится на пересечении оси вращения h с плоскостью Φ . Радиус вращения точки A равен длине отрезка OA : $R_A=|OA|$. Отрезок OA занимает общее положение, поэтому для определения $|OA|$ на рис. 5.26 построен вспомогательный прямоугольный треугольник $O_1A_1K_0$, один катет которого совпадает с горизонтальной проекцией отрезка OA , а другой катет (катет A_1K_0) равен разности высот Δz точек A и O . Гипотенуза O_1K_0 , в соответствии со способом прямоугольного треугольника, равна истинной длине отрезка OA , а следовательно – радиусу вращения точки A вокруг горизонтали: $R_A=|OA|=O_1K_0$.

Будем мысленно вращать треугольник ABC вокруг h . В процессе вращения наступит момент, когда треугольник займет горизонтальное положение $A'B'C'$ (попадет в горизонтальную плоскость уровня Γ , отмеченную на рис. 5.26). Отрезок OA также займет горизонтальное положение OA' и изобразится на Π_1 в свою натуральную величину, равную $R_A=O_1K_0$, что позволяет отметить на чертеже горизонтальную проекцию A'_1 вершины A' треугольника в его новом горизонтальном положении $A'B'C'$. Для этого вдоль

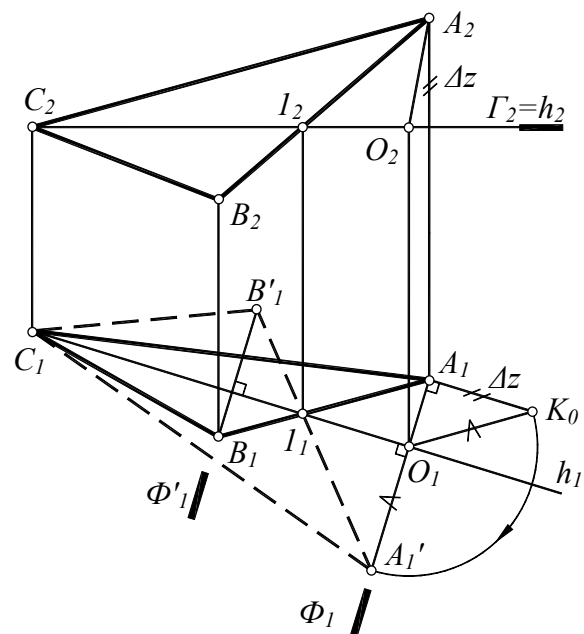


Рис. 5.26

перпендикуляра к h_1 от точки O_1 откладываем отрезок $O_1A'_1$, равный $R_A=O_1K_0$. На чертеже точка A'_1 отмечена с помощью дуги окружности, имеющей центр O_1 и радиус $R_A=O_1K_0$ (см. рис. 5.26). Фронтальная проекция A'_2 точки A' находится в горизонтальной плоскости Γ (на чертеже точка A'_2 не показана).

Вершина C неподвижна (находится на оси вращения h), поэтому для окончательного решения задачи требуется построить новое положение только одной точки – вершины B' . Заметим, что точки A, B, I принадлежат одной прямой. В процессе вращения точка I остается в покое (находится на h). В новом (горизонтальном) положении $A'B'C'$ точки A', B', I также будут располагаться на одной прямой. Точка B вращается в плоскости Φ' , поэтому искомая точка B' находится на пересечении луча $A'-I$ и плоскости Φ' . Горизонтальная проекция B'_1 искомой точки B' отмечается на пересечении прямой A'_1I_1 и горизонтальной проекции Φ'_1 плоскости Φ' (см. рис. 5.26).

Таким образом, единственным вращением вокруг горизонтали h треугольник ABC повернут в горизонтальное положение $A'B'C'$. Горизонтальная проекция $A'_1B'_1C'_1$ повернутого треугольника, показанная на рис. 5.26 штриховыми линиями, дает истинную форму (натуральную величину) треугольника ABC . Фронтальная проекция треугольника в его новом положении совпадает с вырожденной проекцией Γ_2 горизонтальной плоскости уровня Γ .

Вопросы для повторения

1. Назовите основные способы преобразования комплексного чертежа.
2. В чем сущность способа замены плоскостей проекций?
3. Назвать основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций.
4. Сформулировать теоремы о плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскостей проекций Π_1 и Π_2 .
5. Почему способ вращения вокруг проецирующей прямой считается частным случаем способа плоскопараллельного перемещения?
6. Какие основные задачи решают способом плоскопараллельного перемещения и способом вращения вокруг проецирующей прямой? В чем сходство и отличие этих способов и способа замены плоскостей проекций?
7. Определить истинную величину угла ABC способом вращения вокруг линии уровня (рис. 5.27).

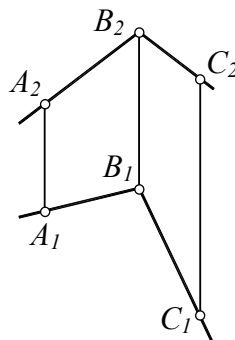


Рис. 5.27

Лекция 6

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

В предыдущих лекциях были рассмотрены чертежи основных геометрических объектов трехмерного пространства (точки, прямой и плоскости) и связанные с ними метрические и позиционные задачи.

Этим, разумеется, не исчерпывается содержание начертательной геометрии, предмет изучения которой – все многообразие геометрических фигур трехмерного пространства, в том числе кривых линий и криволинейных поверхностей. Рассмотрим основные типы кривых линий и поверхностей и способы их изображения на проекционном чертеже.

6.1. Линии

Линия – геометрическое понятие, которому в разных разделах геометрии дают различные определения. В начертательной геометрии *линию рассматривают либо как траекторию движущейся точки, либо как границу поверхности, либо как результат взаимного пересечения поверхностей.*

Простейшая линия – прямая. Прямую линию можно считать либо траекторией материальной точки, движущейся по инерции равномерно и прямолинейно (в соответствии с первым законом Ньютона), либо множеством общих точек двух пересекающихся плоскостей.

Ломаная линия составлена из отрезков прямой линии. Например, граница плоской многоугольной фигуры – ломаная линия.

Линии, отличающиеся от прямой и ломаной, называют кривыми линиями. Способы образования кривых линий могут быть различны. Одни кривые линии образуются по определенному графическому или аналитическому правилу, алгоритму или закону. Такие линии называют *закономерными*. Другие кривые получены опытным путем или начерчены архитектором или дизайнером “от руки”. Их называют *незакономерными* (или *графическими*).

Закономерные кривые разделяют на *алгебраические* и *трансцендентные* соответственно тому, являются ли их уравнения в прямоугольной системе координат алгебраическими или трансцендентными.

Уравнение называют алгебраическим, если в нем содержатся только алгебраические операции над неизвестными (умножение, сложение, возведение в целую степень).

Например, уравнение $x^3 - ay^2 + b = 0$ – алгебраическое. Ему соответствует алгебраическая кривая третьего порядка, лежащая в плоскости $xу$. Порядком алгебраической кривой называют степень ее уравнения.

Синусоида – закономерная, но не алгебраическая кривая, так как уравнение синусоиды $y = \sin x$ в декартовых прямоугольных координатах OXY не алгебраическое (трансцендентное).

По своему расположению в пространстве различают *плоские* и *пространственные* кривые линии.

Начертательная геометрия изучает кривые линии и различные операции с ними по их проекциям на комплексном чертеже. Чтобы изобразить кривую линию на чертеже, надо построить горизонтальную и фронтальную проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой. Соединяя проекции точек плавной линией, получаем проекционный чертеж данной кривой.

6.1.1. Плоские кривые линии

Напомним, что в начертательной геометрии кривая линия может рассматриваться как траектория движущейся точки. Если точка движется в плоскости, то она описывает плоскую кривую. Для построения плоской кривой линии надо на чертеже задать плоскость этой кривой, затем указать в этой плоскости ряд последовательных положений движущейся точки. Соединяя проекции точек плавной кривой, получим чертеж плоской кривой линии.

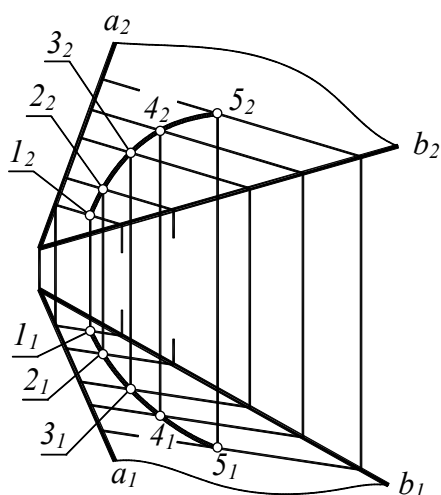


Рис. 6.1

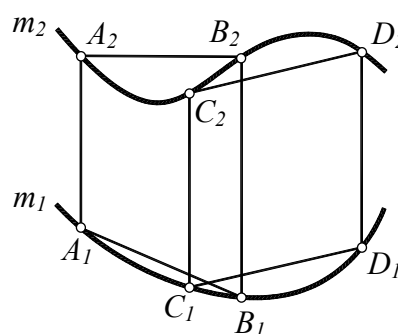


Рис. 6.2

Например, в плоскости $\Sigma(a \cap b)$ отмечены последовательные положения $1 \dots 5$ некоторой точки, произвольно движущейся в этой плоскости (рис. 6.1). Через отмеченные точки проходит плоская незакономерная кривая.

По виду проекций кривой нельзя сразу определить, какая кривая показана на чертеже – плоская или пространственная. Для ответа на этот вопрос необходимо установить, лежат ли *все точки кривой* в одной плоскости. Например, на рис. 6.2 изображена кривая m . Отрезки AB и CD , соединяющие точки кривой, не пересекаются, то есть точки A, B, C, D кривой m не лежат в одной плоскости. Следовательно, m – пространственная кривая. Если же случайно выбранные хорды исследуемой кривой пересекаются, то об этой кривой ничего определенного сказать нельзя (почему?).

Среди плоских кривых линий особо выделяют кривые второго порядка – эллипс, параболу и гиперболу. Кривые второго порядка представляют значительный интерес ввиду широкого применения их в ряде разделов физики, в астрономии, механике, архитектуре и др.

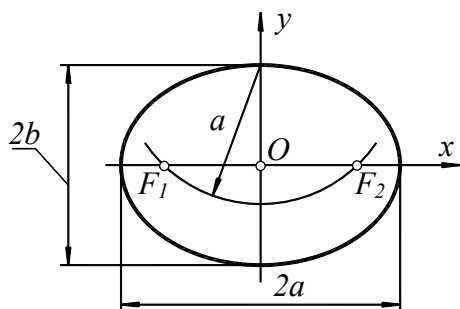


Рис. 6.3

6.1.1.1. Эллипс

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $2a$ и $2b$ – большая и малая оси эллипса, а начало координат $O(0,0)$ – центр эллипса (рис. 6.3).

Эллипс есть множество точек M , для которых сумма расстояний от точки M до двух фик-

сированных точек F_1 и F_2 постоянна и равна длине большой оси эллипса:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называют фокусами эллипса. Если даны оси $2a$ и $2b$ эллипса, то его фокусы находят на пересечении большой оси $2a$ с окружностью радиуса a с центром в конце малой оси $2b$ (см. рис. 6.3).

Окружность – частный случай эллипса. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ получается из уравнения эллипса, если $a = b = R$.

6.1.1.2. Гипербола

Гипербола описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где величины $2a$ и $2b$ – действительная и мнимая оси гиперболы, а начало координат $O(0,0)$ – центр гиперболы (рис. 6.4).

Гипербола есть множество точек M , для которых абсолютная величина разности расстояний от точки M до фиксированных точек F_1 и F_2 постоянна и равна длине действительной оси гиперболы: $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы. Если даны оси $2a$ и $2b$ гиперболы, то ее фокусы находят на пересечении действительной оси $2a$ с окружностью радиуса $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, центр которой совпадает с центром гиперболы.

Прямые, проходящие через центр гиперболы и касающиеся ее в несобственных точках, называют асимптотами гиперболы. Асимптоты гиперболы направлены по диагоналям прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. По мере удаления в бесконечность ветви гиперболы неограниченно приближаются к своим асимптотам.

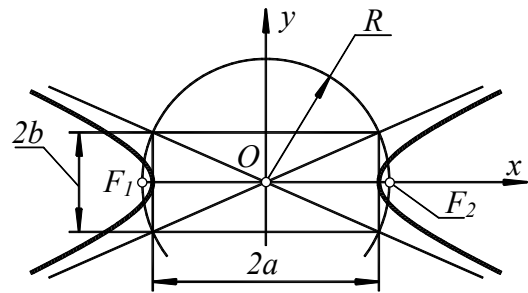


Рис. 6.4

6.1.1.3. Парабола

Парабола описывается уравнением $y^2 = 2px$, где коэффициент p называют параметром параболы (рис. 6.5). Вершина параболы совпадает с началом координат $O(0,0)$.

Парабола есть множество точек, равноудаленных от заданной точки (фокуса F) и от заданной прямой (директрисы d).

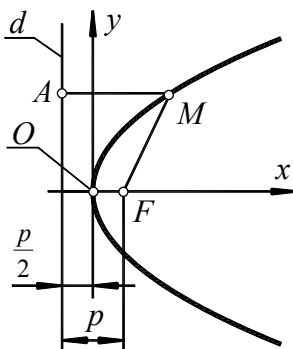


Рис. 6.5

Расстояние между фокусом F и директрисой d равно параметру p параболы. Вершина параболы O делит это расстояние пополам. Для произвольной точки M параболы расстояние MF до фокуса равно расстоянию MA до директрисы (см. рис. 6.5).

Из анализа уравнения параболы нетрудно сделать вывод, что все параболы подобны друг другу. Действительно, все параболы отличаются друг от друга только одним размером: параметром p . Аналогичным образом, все окружности подобны, так как отличаются друг от друга только одним размером: радиусом R .

6.1.2. Пространственные кривые линии

Пространственная кривая линия определяется либо как траектория точки, движущейся в трехмерном пространстве, либо как линия пересечения поверхностей.

Пример 1. Зенитная самонаводящаяся ракета, преследуя произвольно маневрирующую цель, движется по незакономерной пространственной траектории.

Пример 2. Линия пересечения поверхностей кругового конуса и эллиптического цилиндра – закономерная пространственная алгебраическая кривая четвертого порядка.

Из закономерных пространственных кривых наибольшее практическое применение имеют винтовые линии, в частности – *цилиндрическая винтовая линия (гелиса)*. Моделью винтовой линии может служить цилиндрическая пружина.

Цилиндрическая винтовая линия образуется как траектория точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно равномерно перемещающейся в направлении этой оси.

Подведем резец к вращающемуся с постоянной угловой скоростью цилиндру. Будем равномерно перемещать резец параллельно оси вращения цилиндра. На цилиндре останется “царапина” в виде винтовой линии.

Винтовая линия – неалгебраическая (трансцендентная) пространственная кривая. Если ось цилиндра перпендикулярна плоскости Π_1 , то горизонтальная проекция винтовой линии – окружность, а фронтальная – синусоида. На развертке цилиндра винтовая линия изобразится в виде прямой линии с углом наклона α (рис. 6.6). Угол α называют углом подъема винтовой линии. Расстояние H между соседними витками, измеренное вдоль оси цилиндра, называют шагом винтовой линии.

Винтовая линия является *геодезической линией* на поверхности кругового цилиндра. Геодезической называется линия, принадлежащая данной поверхности и кратчайшая из всех линий, которые можно провести между двумя точками поверхности. Геодезическая линия изображается на развертке поверхности в виде прямой. Например, кратчайшее расстояние между точками L и K , измеренное по поверхности цилиндра, равно расстоянию L_0K_0 на его развертке.

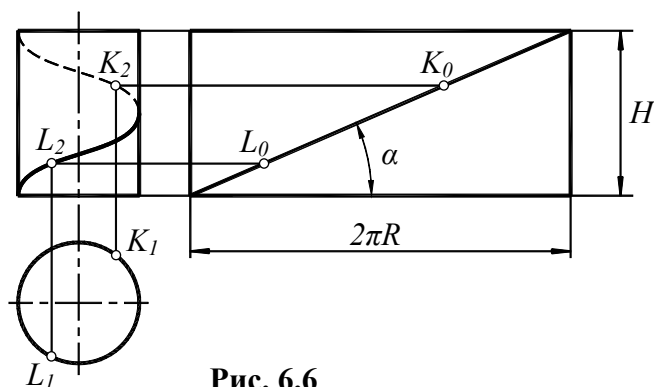


Рис. 6.6

6.2. Поверхности

Поверхность – геометрическое понятие, которому в разных разделах геометрии дают разное определение. Например, в аналитической геометрии поверхностью называют множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,z)=0$.

В начертательной геометрии поверхность рассматривают *кинематически* – как результат непрерывного перемещения линии в пространстве. Эту движущуюся линию называют *образующей*, так как она в процессе своего перемещения образует (“заметает”) данную поверхность.

Поверхность, образованная перемещением прямой линии, называется *линейчатой*. Линейчатые поверхности делятся на *развертывающиеся* (которые можно совместить с плоскостью без складок и разрывов) и *неразвертывающиеся*. Поверхности, которые не могут быть образованы движением прямой линии, называются *нелинейчатыми*.

Чтобы задать поверхность, надо указать закономерность движения образующей в пространстве. Закон перемещения образующей линии задается при помощи *направляющих линий* и алгоритма перемещения образующей по направляющим.

Совокупность условий, которые определяют поверхность в пространстве, называется определителем поверхности.

Определитель поверхности состоит из двух частей: графической и алгоритмической. Графическая часть определителя поверхности – это, как правило, проекционный чертеж неподвижных направляющих. Если поверхность формируется движением криволинейной образующей, то прилагается чертеж образующей.

Алгоритмическая часть содержит словесную или символическую запись закона перемещения образующей линии по направляющим.

Чтобы задать поверхность на чертеже, надо начертить в двух проекциях все элементы графической части определителя поверхности (направляющие и образующую), а на свободном месте чертежа записать (словесно или символически) алгоритмическую часть определителя.

Если чертеж поверхности выполнен правильно, то на чертеже могут быть указаны проекции точек и линий, принадлежащих этой поверхности. Иными словами, может быть решена задача “на принадлежность” какой-либо точки заданной поверхности.

Критерий полноты чертежа поверхности формулируют в виде следующего правила: **поверхность на чертеже считается заданной, если по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, можно построить ее вторую проекцию.**

С помощью этого критерия проверяется полнота задания поверхности на чертеже. Если на чертеже указана проекция какой-либо точки на поверхности, а вторую проекцию этой точки построить не удастся, значит, чертеж поверхности не полон.

6.2.1. Гранные поверхности. Многогранники

Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l , проходящей через неподвижную точку S и пересекающей ломаную направляющую m , называется гранной поверхностью.

Если точка S собственная (не удалена в бесконечность), то образуется пирамидальная поверхность (рис. 6.7, а). Если точка S несобственная (бесконечно удалена в направлении s), то образуется призматическая поверхность (рис. 6.7, б). Гранные поверхности (как пирамидальная, так и призматическая) ничем не ограничены в пространстве, так как образованы движением бесконечной прямой l , скользящей по ломаной образующей $m=ABCD$.

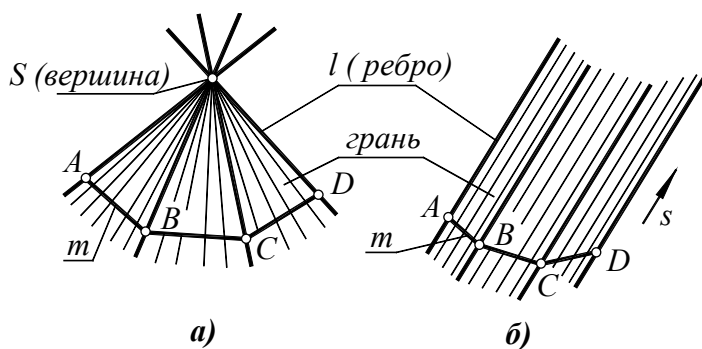


Рис. 6.7

В отличие от гранной поверхности, *многогранник* ограничен своими гранями, образуя замкнутый пространственный объем.

Многогранником называют пространственную геометрическую фигуру, со всех сторон ограниченную плоскими многоугольниками (гранями). Элементы многогранника – *границы* (отсеки плоскостей), *ребра* (прямые линии, по которым пересекаются грани) и *вершины* (точки пересечения ребер). Количество граней (G), ребер (P) и вершин (B) связано формулой Эйлера:

$$G + B - P = 2.$$

Совокупность ребер и вершин называют *сеткой многогранника*. Построение проекций многогранника на чертеже сводится к построению проекций его сетки (ребер и вершин). На рис. 6.8 показан четырехгранник (тетраэдр) $ABCS$, заданный на чертеже своими вершинами (точками A, B, C, S) и ребрами (прямыми, соединяющими вершины).

Замкнутая линия, ограничивающая проекцию фигуры, называется *очерком*. Проекция любой точки, лежащей на поверхности фигуры, находится внутри очерка. На рис. 6.8 замкнутая ломаная линия $A_1B_1S_1C_1A_1$ – горизонтальная очерковая линия (очерк) тетраэдра. Линия $A_2B_2C_2S_2A_2$ – фронтальный очерк тетраэдра.

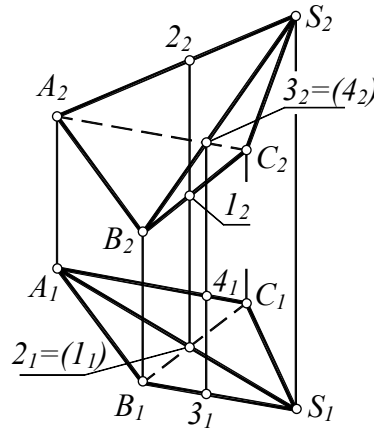


Рис. 6.8

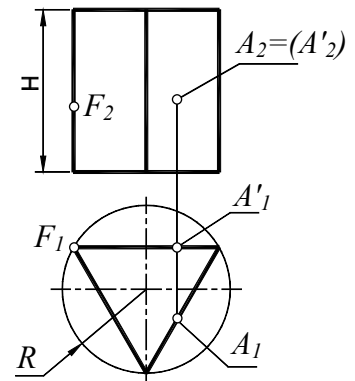


Рис. 6.9

Чтобы на чертеже многогранника выявить видимость его ребер, используют способ конкурирующих точек. Например, с помощью пары горизонтально-конкурирующих точек 1 и 2 выявлена видимость скрещивающихся ребер AS и BC на горизонтальной проекции. С помощью фронтально-конкурирующих точек 3 и 4 выявляется видимость скрещивающихся ребер AC и BS на фронтальной проекции (см. рис. 6.8).

Построение проекций точек, принадлежащих ребрам или граням призмы (рис. 6.9) или пирамиды выполняется аналогично построению проекций точек, принадлежащих прямой линии или плоскости (см. п. 2.3.1). Проекции точек и линий, принадлежащих видимым проекциям граней на чертеже, видимы (проекции A_2, F_2 точек A и F на рис. 6.9). Если проекция грани невидима, то невидима и соответствующая проекция точки, принадлежащая этой грани. Например, на рис. 6.8 проекции 1_1 и 4_2 точек 1 и 4 невидимы. На рис. 6.9 невидима проекция A'_2 точки A' .

6.2.2. Коническая поверхность общего вида

Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l , проходящей через неподвижную точку S и пересекающей направляющую m , называется конической поверхностью.

Графическая часть определителя содержит чертеж двух элементов: точки S и направляющей m (рис. 6.10). Алгоритмическая часть определителя может быть записана символически: $S \in l \cap m$ (“образующая l проходит через точку S и пересекает направляющую m ”). Точка S называется вершиной конической поверхности.

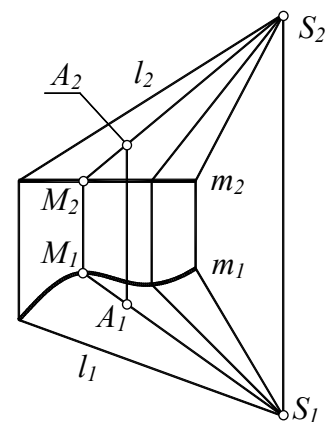


Рис. 6.10

Проверим, полностью ли задана поверхность на чертеже. Укажем на одной из проекций (например, на фронтальной проекции) проекцию A_2 произвольной точки A , принадлежащей поверхности. Проведем через A_2 и S_2 фронтальную проекцию образующей. В точке M_2 эта проекция пересекает проекцию m_2 направляющей. С помощью линий связи найдем горизонтальную проекцию S_1M_1 образующей. Точка A принадлежит образующей SM . Недостающая горизонтальная проекция A_1 точки A определена с помощью линии связи.

По одной проекции точки, принадлежащей поверхности, удалось построить вторую проекцию этой точки. Следовательно, поверхность на чертеже полностью задана.

6.2.3. Цилиндрическая поверхность общего вида

Пусть прямолинейная образующая l движется параллельно заданному направлению s , пересекая при этом направляющую кривую t . Образующая l в процессе своего движения “заметает” цилиндрическую поверхность общего вида.

Поверхность, образованная прямолинейной образующей l , движущейся параллельно заданному направлению s и пересекающей направляющую t , называется цилиндрической поверхностью.

Цилиндрическая поверхность – частный случай конической поверхности. Действительно, если вершина S конической поверхности “уходит в бесконечность” по заданному направлению s , то все образующие становятся параллельны этому направлению. При этом получается цилиндрическая поверхность.

Чтобы задать цилиндрическую поверхность на чертеже, надо начертить направляющую кривую t и указать направление s (рис. 6.11). Графическая часть определителя дополняется алгоритмом формирования поверхности. Символическая запись алгоритма имеет вид: $t \cap l || s$ (“образующая l пересекает направляющую t и движется параллельно направлению s ”).

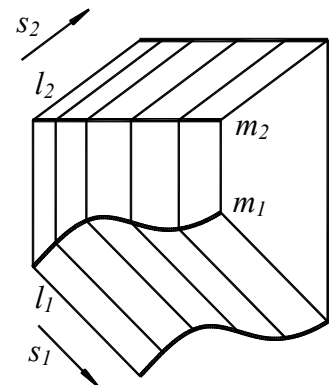


Рис. 6.11

6.2.4. Поверхности с плоскостью параллелизма

Пусть прямолинейная образующая l движется параллельно заданной плоскости Σ , пересекая при этом направляющие a и b . Получаем линейчатую поверхность с плоскостью параллелизма (поверхность Каталана).

Поверхность, образованная прямолинейной образующей l , движущейся параллельно заданной плоскости Σ и пересекающей направляющие a и b , называется линейчатой поверхностью с плоскостью параллелизма.

Графическая часть определителя линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма содержит чертежи двух направляющих a, b и плоскости параллелизма Σ . Алгоритмическая часть определителя может быть записана символически: $a \cap l \cap b, l || \Sigma$ (“образующая l параллельна плоскости Σ и пересекает направляющие a, b ”). Прямолинейные образующие параллельны плоскости параллелизма, но не параллельны между собой.

Покажем, что линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма полностью задана на чертеже, если начерчены ее направляющие a, b и указана плоскость параллелизма Σ (рис. 6.12).

Пусть дана горизонтальная проекция D_1 какой-либо точки D , принадлежащей поверхности. Чтобы найти фронтальную проекцию точки D , построим сетку образующих l', l'', l''', \dots и через D_1 проведем вспомогательную секущую плоскость Δ . Плоскость Δ пересекает линейчатую поверхность по линии $1 \dots 5$, показанной на

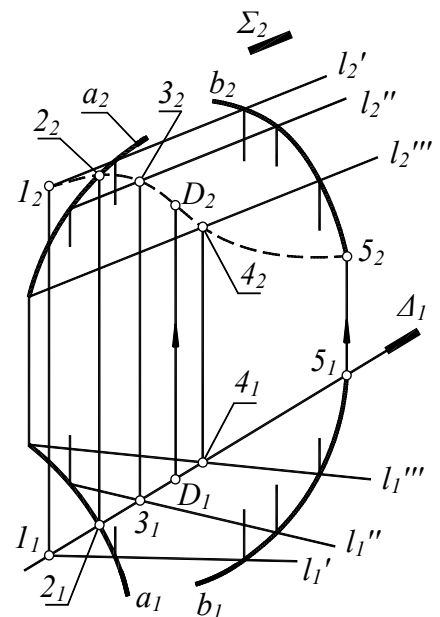


Рис. 6.12

рис. 6.12 штриховой линией. Точка D принадлежит этой линии, поэтому недостающая фронтальная проекция D_2 точки D может быть найдена с помощью вертикальной линии связи.

Для построения недостающей проекции точки D не обязательно вводить в рассмотрение вспомогательную секущую плоскость Δ . Достаточно начертить горизонтальную проекцию произвольной кривой, лежащей на данной линейчатой поверхности и проходящей через точку D . Построив фронтальную проекцию этой кривой, отмечаем на ней искомую фронтальную проекцию точки D .

Если дана фронтальная проекция какой-либо точки, принадлежащей поверхности, то ее горизонтальная проекция определяется по принадлежности к соответствующей образующей (без построения сетки образующих).

Таким образом, по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, удастся построить вторую проекцию этой точки. Следовательно, поверхность на чертеже (см. рис. 6.12) полностью задана.

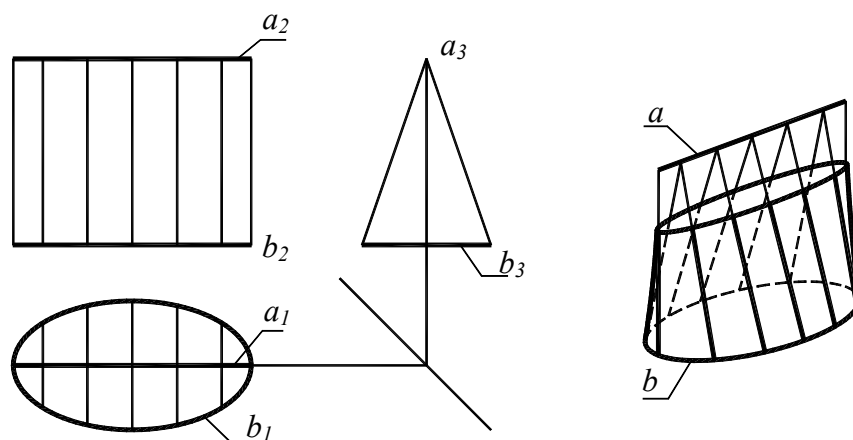


Рис. 6.13

Если обе направляющие линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма – кривые линии, то поверхность называется *цилиндром* (см. рис. 6.12). Если одна из направляющих кривая линия, а другая направляющая прямолинейна, то поверхность называют *коноидом*. На рис. 6.13 показан коноид с прямолинейной направляющей a , криволинейной направляющей b (линия b – эллипс) и плоскостью параллелизма Π_3 . Такую поверхность называют “прямой клин”. Горизонтальные плоскости пересекают эту поверхность по эллипсам.

Если обе направляющие – прямые, то линейчатую поверхность называют *косой плоскостью* или *гиперболическим параболоидом*. На рис. 6.14 показана косая плоскость с прямолинейными направляющими a , b и плоскостью параллелизма Σ . Все образующие косой плоскости параллельны плоскости параллелизма, но не параллельны между собой (см. также п. 6.3.4).

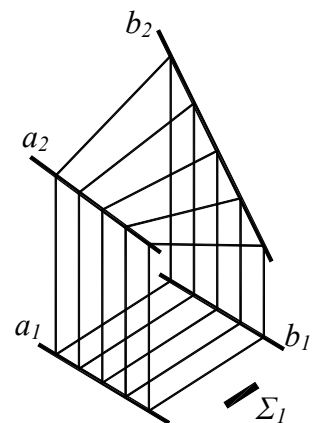


Рис. 6.14

6.2.5. Поверхности вращения

Поверхность, образованная вращением образующей линии l вокруг некоторой оси i , называется поверхностью вращения.

Пусть l – произвольная плоская кривая. Вращая образующую l вокруг оси i , получаем поверхность вращения общего вида (рис. 6.15). Каждая точка $1, 2, 3...$ образующей l перемещается по окружности, которую называют *параллелью*. Через точку 2 про-

ходит параллель минимального радиуса. Эту параллель называют “горловым сечением” поверхности.

В сечении поверхности вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получается окружность (параллель).

Плоскость, проходящая через ось вращения i , пересекает поверхность вращения по линии, называемой *меридианом*.

На чертеже, как правило, изображают *очерки* проекций поверхности.

Определение. *Очерк (очерковая линия) – это граница области, состоящей из проекций точек поверхности.* Например, на рис. 6.15 показан фронтальный очерк поверхности вращения (“кувшин”) и его горизонтальный очерк, образованный параллелями минимального и максимального радиусов. Из определения следует, что ни одна точка поверхности не может проецироваться за пределы очерка. Если множество проекций всех точек поверхности Φ совпадает с множеством точек плоскости проекций Π_i , то на Π_i поверхность Φ не имеет очерка.

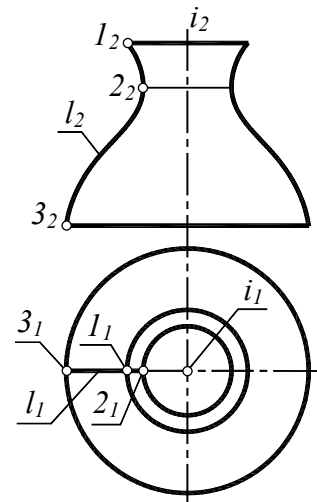


Рис. 6.15

6.2.5.1. Поверхности, образованные вращением прямой линии

Две прямые линии в пространстве могут быть либо параллельны, либо пересекаться, либо скрещиваться под произвольным углом. Соответственно этому различают три вида поверхностей, образованных вращением прямой линии l вокруг оси i .

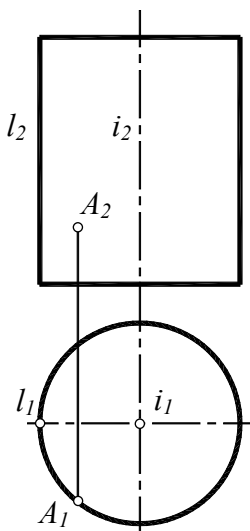


Рис. 6.16

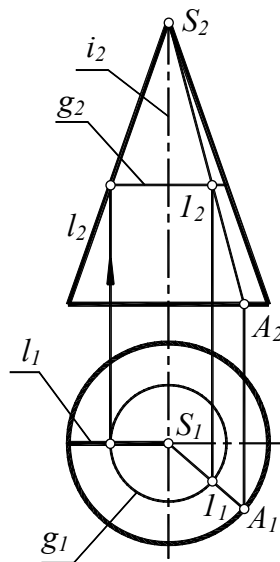


Рис. 6.17

1. Если образующая l параллельна оси вращения i , получается *прямой круговой цилиндр* (рис. 6.16). Горизонтальная проекция A_1 произвольной точки A , принадлежащей поверхности цилиндра, лежит на горизонтальном очерке цилиндра.

2. Если образующая l пересекается с осью вращения – получается *прямой круговой конус* (рис. 6.17).

Чтобы найти недостающую проекцию точки на поверхности конуса, надо провести через эту точку параллель или прямолинейную образующую, принадлежащие поверхности конуса. Например, на рис. 6.17 дана горизонтальная проекция точки I , принадлежащей поверхности конуса. Чтобы определить фронтальную проекцию точки I , проведем через I_1 проекцию g_1 параллели g . С помощью линии связи найдем фронтальную проекцию g_2 этой параллели и отметим на ней фронтальную проекцию точки I .

Эта же задача может быть решена с помощью образующей. Проведем через I_1 проекцию S_1A_1 прямолинейной образующей SA . Найдем фронтальную проекцию S_2A_2 этой образующей (см. рис. 6.17). Фронтальная проекция I_2 точки I находится на S_2A_2 .

3. Если образующая l скрещивается с осью вращения i , то при вращении прямой l вокруг оси i образуется *однополостный гиперboloид вращения* (рис. 6.18). Точки образующей l перемещаются по окружностям (параллелям) разного диаметра.

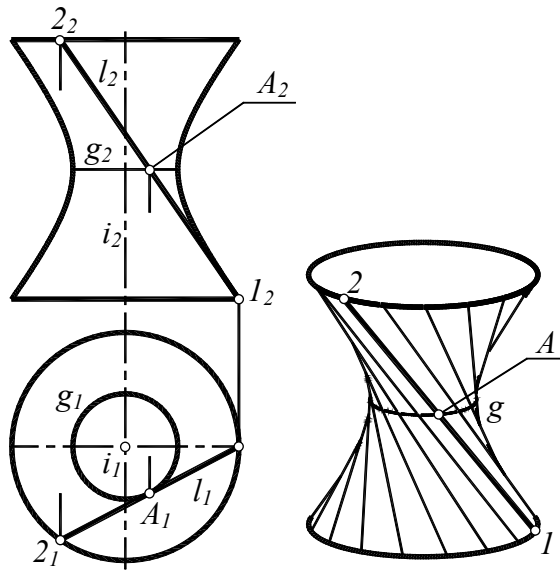


Рис. 6.18

Параллель g минимального диаметра называют *горловым сечением* гиперboloида вращения. Горловое сечение g гиперboloида образовано движением точки A , где A – ближайшая к оси i точка образующей l .

Очерковая линия гиперboloида на плоскости Π_2 – гипербола, мнимая ось которой совпадает с проекцией i_2 оси вращения поверхности. Однополостный гиперboloид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

6.2.5.2. Поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг своей оси

Напомним, что существуют три типа кривых второго порядка: эллипс, парабола и гипербола. Эллипс и гипербола имеют две взаимно перпендикулярные оси симметрии. У параболы одна ось симметрии. Если кривую второго порядка вращать вокруг оси симметрии, то получается эллипсоид вращения, параболоид вращения или гиперboloид вращения (рис. 6.19).

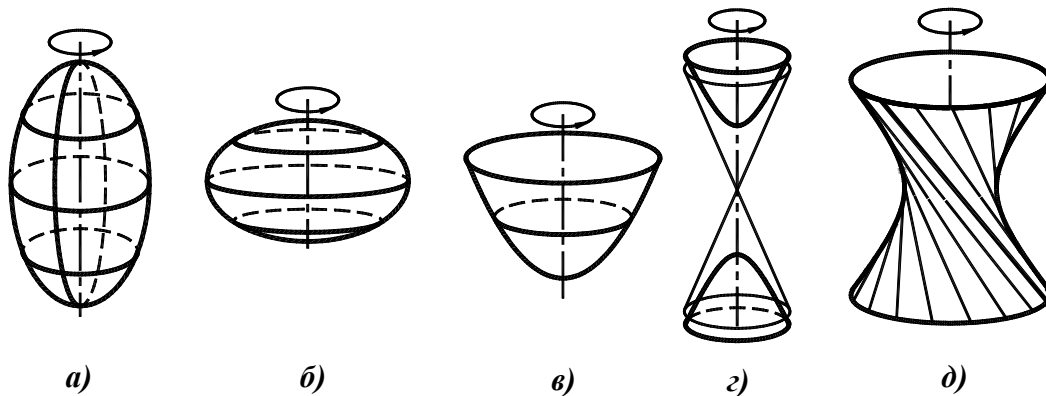


Рис. 6.19

1. Вращая эллипс вокруг большой оси, получаем вытянутый эллипсоид вращения (рис. 6.19, *а*). При вращении эллипса вокруг малой оси возникает сжатый эллипсоид вращения (рис. 6.19, *б*). При вращении окружности вокруг диаметра получается сфера. Сфера – частный случай эллипсоида вращения.

2. Вращая параболу вокруг ее оси симметрии, получаем параболоид вращения (рис. 6.19, *в*).

3. При вращении гиперболы вокруг действительной оси получаем двуполостный гиперboloид вращения. Асимптоты гиперболы описывают асимптотический конус (рис. 6.19, з). При вращении гиперболы вокруг мнимой оси получаем однополостный гиперboloид вращения (рис. 6.19, д).

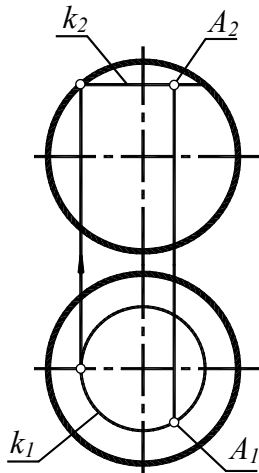


Рис. 6.20

Рассмотренные поверхности (сфера, эллипсоид, гиперboloид, параболоид) являются закономерными алгебраическими поверхностями второго порядка.

Построение точки на поверхности вращения можно выполнить с помощью окружности (параллели), проходящей через эту точку.

Пусть, например, дана горизонтальная проекция A_1 точки A , лежащей на сфере (рис. 6.20). Чтобы построить фронтальную проекцию этой точки, проведем через A_1 окружность k_1 (горизонтальную проекцию параллели k). С помощью линий связи найдем фронтальную проекцию k_2 параллели k и отметим на ней фронтальную проекцию A_2 точки A (см. рис. 6.20).

6.2.5.3. Поверхность тора

Тор образуется вращением окружности вокруг оси i , лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. Поверхность тора – алгебраическая поверхность четвертого порядка.

Возможны три случая расположения оси вращения относительно образующей окружности.

Случай 1. Ось вращения i не пересекает образующую окружность l (рис. 6.21). Получаем поверхность в форме кольца. Такую поверхность называют *открытым тором* (“кольцом”).

В сечении тора плоскостью в общем случае получается кривая четвертого порядка. Если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси вращения i тора, то в сечении получаем кривую четвертого порядка, распавшуюся на две окружности R и r (см. рис. 6.21). Одна окружность находится на “наружной” поверхности кольца, другая окружность – на “внутренней”. Если секущая плоскость проходит через ось i открытого тора, то в сечении получаем кривую четвертого порядка, распавшуюся на две окружности одинакового радиуса.

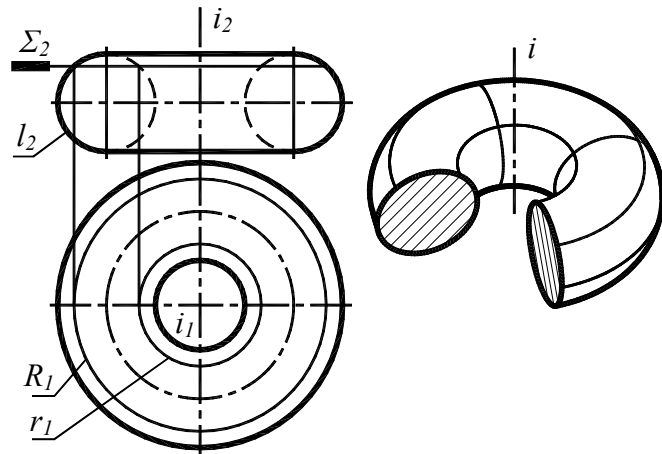


Рис. 6.21

Если секущая плоскость касается поверхности открытого тора в двух точках, то линия сечения распадается на две окружности (круги Виларсо). Таким образом, поверхность открытого тора содержит три семейства круговых сечений.

Случай 2. Ось вращения пересекается с образующей окружностью. При этом получается поверхность, напоминающая либо яблоко (рис. 6.22), либо “веретено” (рис. 6.23). Такой тор называют “закрытым”, так как у него нет внутреннего отверстия.

Случай 3. Ось может касаться окружности (рис. 6.24). Получаем предельный случай открытого тора, когда внутреннее отверстие открытого тора “стянулось в точку”.

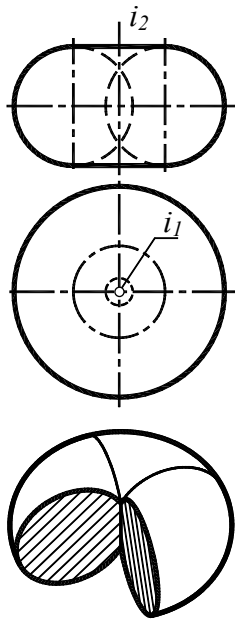


Рис. 6.22

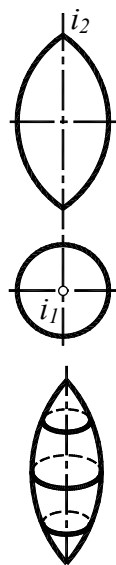


Рис. 6.23

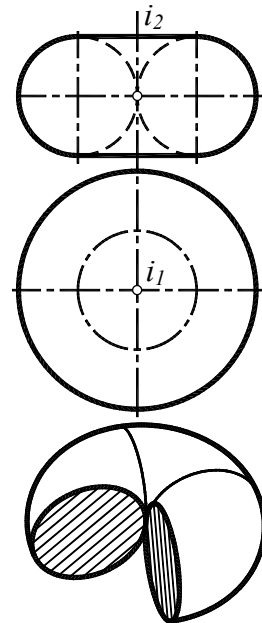


Рис. 6.24

6.2.6. Торсовые поверхности

Торсовой поверхностью (торсом) называют линейчатую поверхность, образованную движением касательной l к пространственной кривой m (рис. 6.25). Кривую m называют ребром возврата торса.

Торсовая поверхность может быть образована другим, более общим способом. Пусть даны две направляющие a и b , которые могут быть поверхностями или кривыми линиями (плоскими или пространственными). Представим себе плоскость Θ , которая “перекатывается” по данным криволинейным направляющим a и b (рис. 6.26).

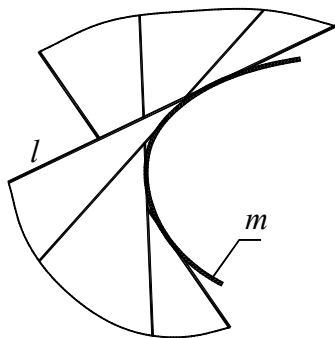


Рис. 6.25

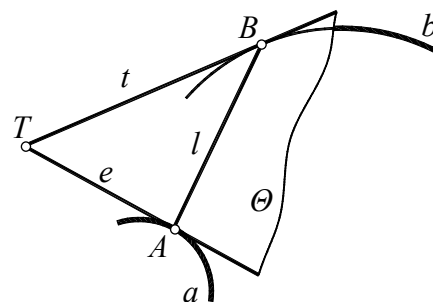


Рис. 6.26

В любом своем положении плоскость Θ касается направляющих в точках A и B (точка A – на направляющей a , точка B – на b). Прямая $l=AB$ соединяет точки касания. Кроме прямой $l=AB$, на рис. 6.26 показаны касательные e и t к направляющим a и b . Эти касательные лежат в плоскости Θ и пересекаются в некоторой точке T .

При “перекатывании” плоскости Θ по направляющим a, b положение прямой AB в пространстве непрерывно изменяется. Получается линейчатая поверхность, заматаемая движущейся прямой $l=AB$. Эта поверхность развертывающаяся, так как она всеми своими прямолинейными образующими $l=AB$ поочередно совмещается с обкатывающей плоскостью Θ . Что это за поверхность?

Как известно (см. лекцию 13), свойством развертываемости обладают, кроме многогранных поверхностей, только конические, цилиндрические и торсовые поверхности. Развертывающаяся поверхность, схематически представленная на рис. 6.26, не является ни конической, ни цилиндрической поверхностью (так как образующие $l=AB$ не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке). Следовательно, это торсовая поверхность. Все образующие $l=AB$ торсовой поверхности касаются некоторой пространственной кривой (ребра возврата). Ребро возврата на рис. 6.26 не показано.

Задача 1. Сконструировать развертывающуюся поверхность, “натянутую” на направляющие окружности a и b , лежащие в разных плоскостях (рис. 6.27). Такая задача возникает при монтаже воздухопроводов, изготавливаемых из листового материала.

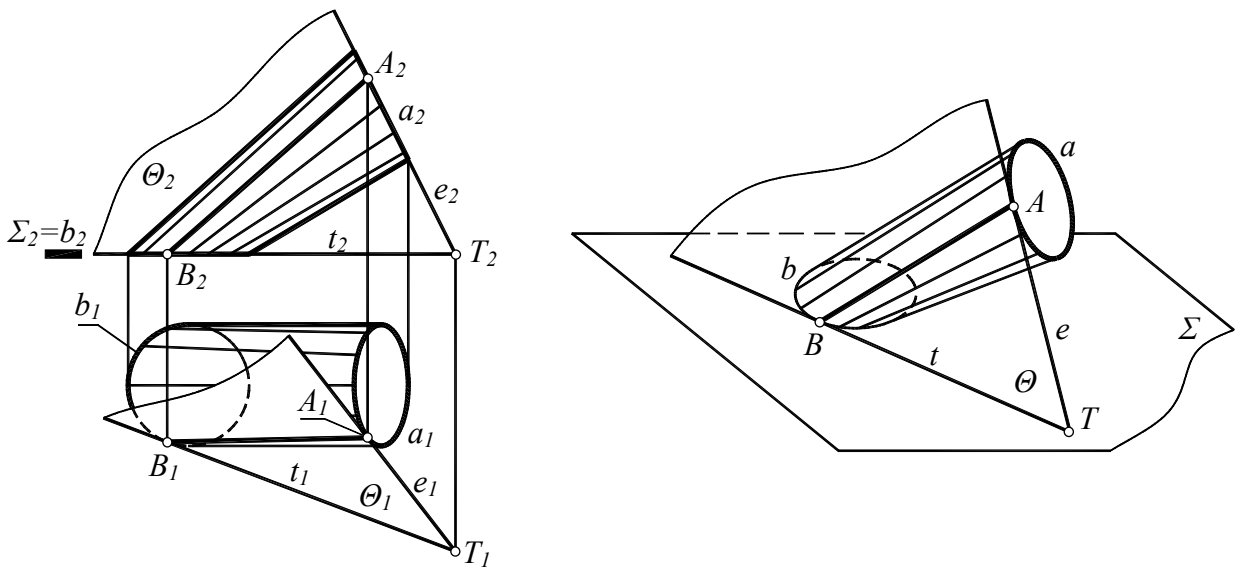


Рис. 6.27

Для решения задачи надо построить множество прямолинейных образующих конструируемой поверхности. Прямолинейные образующие порождаются подвижной плоскостью, перекатывающейся по данным окружностям. На рис. 6.27 дан чертеж и наглядное изображение подвижной плоскости Θ , обкатывающей окружности a, b .

Составим алгоритм построения одной образующей конструируемой поверхности.

1. Через произвольную точку A на направляющей окружности a проводим к этой окружности касательную e (см. рис. 6.27).

2. Отмечаем точку T пересечения прямой e с плоскостью Σ , в которой лежит другая направляющая окружность (окружность b).

3. Из точки T проводим касательную t к окружности b . Отмечаем точку касания B . Прямая $l=AB$ – искомая образующая. Плоскость $\Theta(e \cap t)$ касается конструируемой поверхности по этой образующей (см. рис. 6.27).

Примечание. Через T проходят две касательные к окружности b . Согласно условию задачи, касательная t выбирается таким образом, чтобы вся конструируемая поверхность располагалась с одной стороны от плоскости $\Theta(e \cap t)$.

Взяв другую точку на направляющей окружности a , получаем другую образующую $l=AB$ конструируемой торсовой поверхности, натянутой на направляющие окруж-

ности a , b . Найденная сетка образующих позволяет заменить торсовую поверхность многогранной поверхностью и построить ее развертку.

Задача 2. Спроектировать откос (насыпь) автомобильной трассы на участке с подъемом и одновременным поворотом дорожного полотна (рис. 6.28).

Задана граничная кромка дорожного полотна (пространственная кривая a) и горизонтальная плоскость, от которой отсчитываются высотные отметки автотрассы.

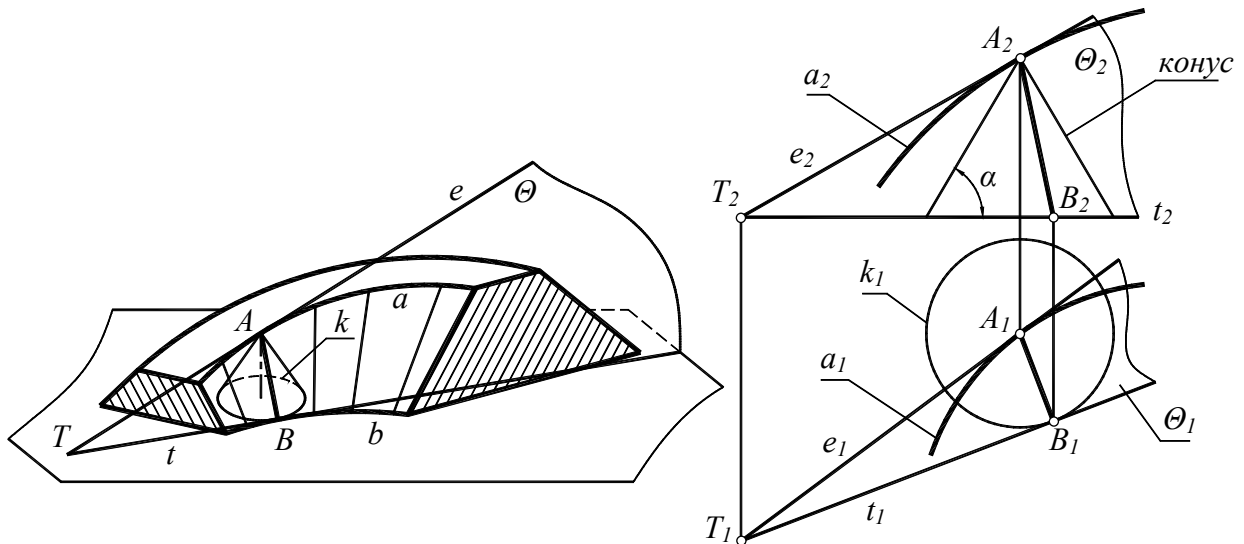


Рис. 6.28

Откос проектируется как линейчатая поверхность одинакового ската: все прямолинейные образующие такой поверхности должны быть наклонены под одинаковым (заранее заданным) углом α к горизонтальной плоскости. В этом случае дождевая вода стекает с откоса равномерно, не образуя канавок, разрушающих поверхность откоса.

Рассмотрим алгоритм построения произвольной образующей AB поверхности одинакового ската.

1. Через произвольную точку A , взятую на заданной направляющей a , проводим к кривой a касательную e и отмечаем точку T пересечения прямой e с горизонтальной плоскостью.

2. Строим прямой круговой конус с вершиной A и углом наклона образующих, равным заданному значению α . Находим основание конуса (окружность k на рис. 6.28).

3. Из точки T проводим к основанию k конуса касательную t . Отмечаем точку касания B . Прямолинейная образующая AB проектируемой поверхности построена. Плоскость $\Theta = e \cap t$ касается этой поверхности вдоль образующей AB .

Выбирая другую точку A на направляющей кривой a , получаем другую образующую AB и другую касательную плоскость Θ . Многократно повторяя действия 1...3, находим сетку прямолинейных образующих проектируемой поверхности откоса и линию b пересечения откоса с горизонтальной плоскостью.

Спроектированный по такому алгоритму откос автотрассы является торсовой поверхностью. Действительно, прямолинейные образующие AB этой поверхности порождаются плоскостью Θ , “перекатывающейся” по криволинейным направляющим a и b (точно так же, как и в предыдущей задаче). Во всех своих положениях плоскость Θ касается направляющих a , b , а также касается всего откоса вдоль образующей AB . Следовательно, это развертывающаяся (торсовая) поверхность, все образующие которой касаются одной и той же пространственной кривой линии – ребра возврата. Ребро возврата спроектированной поверхности откоса на рис. 6.28 не показано.

6.2.7. Винтовые поверхности

Пусть образующая линия вращается вокруг оси i и при этом поступательно перемещается вдоль этой оси. Такое сложное движение называют *винтовым*. Обычно рассматривают винтовое движение с постоянной угловой скоростью и равномерным поступательным перемещением образующей, то есть с постоянным винтовым шагом. Шаг винта – расстояние вдоль оси i , которое проходит произвольная точка образующей (не лежащая на оси i) за один полный оборот образующей.

Линейчатая винтовая поверхность, образованная винтовым движением прямой линии, называется *геликоидом*. Геликоид образуется движением прямолинейной образующей, пересекающей цилиндрическую винтовую линию m и ее ось i .

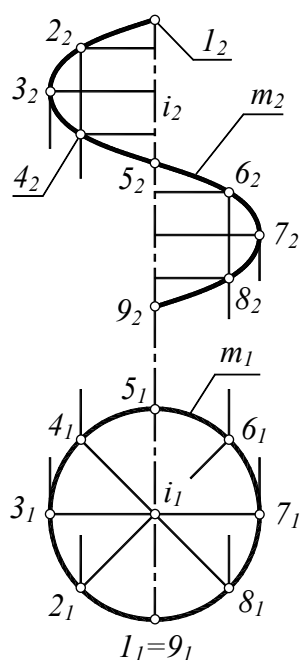


Рис. 6.29

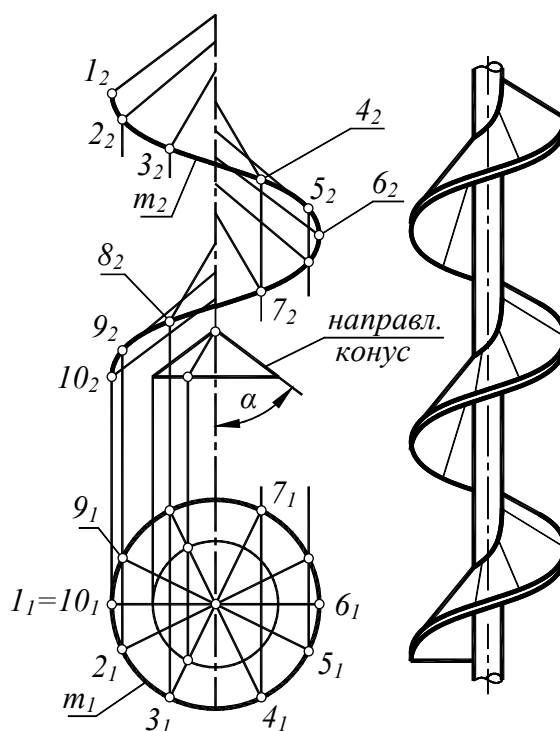


Рис. 6.30

Если образующая перпендикулярна оси винтовой линии, то винтовая поверхность называется *прямым геликоидом* (рис. 6.29). Образующие прямого геликоида параллельны горизонтальной плоскости проекций, следовательно, это поверхность с плоскостью параллелизма (винтовой коноид).

Наклонный геликоид образуется движением прямой линии, скользящей по цилиндрической винтовой линии m и пересекающей ось i винтовой линии под постоянным углом $\alpha \neq 90^\circ$ (рис. 6.30). Прямолинейная образующая наклонного геликоида остается во всех своих положениях параллельна соответствующей образующей прямого кругового конуса, соосного с винтовой линией m . Этот конус называется направляющим (см. также п. 6.3.2, пример 2).

Винтовые поверхности широко применяются в технике (резьбовые пары, винтовые лестницы и пандусы, шнековые механизмы, муфты сцепления и др.).

6.2.8. Каркасные поверхности

Каркасной называют поверхность, задаваемую совокупностью лежащих на ней линий – каркасом поверхности.

Каркасную поверхность задают на чертеже проекциями линий каркаса. Полученный чертеж отличается от чертежа кинематической поверхности тем, что точки поверхности, не лежащие на линиях каркаса, могут быть построены только приближенно. Поэтому поверхность, заданная каркасом, не вполне определена. Существуют поверхности с одним и тем же каркасом, но несколько отличающиеся одна от другой.

Примером поверхности, задаваемой каркасом, может служить земная поверхность. При изображении рельефа земной поверхности в качестве линий каркаса берут горизонталы. Поверхности, заданные каркасом горизонталей, в геодезии и картографии называют топографическими (рис. 6.31). Топографическая карта – это горизонтальная проекция рельефа (“план местности”). Фронтальная проекция, показанная на рис. 6.31, на карте отсутствует. Отсутствующую фронтальную проекцию заменяют числовыми отметками на плане, нанесенными рядом с каждой горизонталью. Например, отметка $h300$ означает, что соответствующая горизонталь расположена на высоте 300 метров.

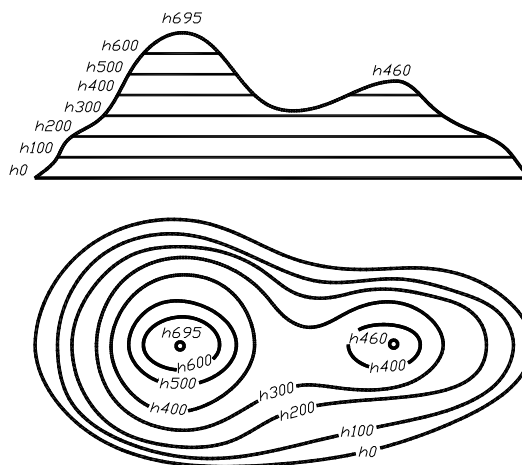


Рис. 6.31

6.3. Дополнительные сведения о линейчатых поверхностях

Поверхность, образованная закономерным движением прямой линии в пространстве, называется линейчатой.

К линейчатым поверхностям относятся ранее рассмотренные многогранные, конические, цилиндрические, торсовые поверхности. Поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана), винтовые поверхности с прямолинейной образующей (геликоиды) также являются линейчатыми поверхностями.

Различные законы движения прямолинейной образующей порождают различные поверхности. Закон движения образующей обычно задается направляющими линиями. Определим количество направляющих, необходимых для задания линейчатой поверхности общего вида. Для этого нам потребуется предварительно ввести в рассмотрение понятие о размерности бесконечных множеств геометрических фигур (точек, прямых, плоскостей...), находящихся в трехмерном пространстве.

6.3.1. Размерность бесконечного множества

На прямой линии имеется бесконечное множество точек. На плоскости также имеется бесконечное множество точек. Интуитивно мы представляем, что на плоскости “значительно больше” точек, чем на прямой. Действительно, если прямую линию “вложить” в плоскость, то бесконечное множество точек прямой станет лишь частью бесконечного множества точек плоскости.

Чтобы сравнивать бесконечные множества, вводится понятие “размерность множества”. Два множества имеют одинаковую размерность, если между элементами множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Между точками прямой и точками плоскости невозможно установить такое соответствие, поэтому множество точек прямой и множество точек плоскости имеют разную размерность.

Таким образом, среди бесконечных множеств существует своя “иерархия”, которую количественно характеризуют величиной размерности n . Множеству точек на прямой присваивают значение $n=1$. Это самый низкий “иерархический уровень” бесконечных множеств. Множество точек, принадлежащих данной прямой, называют *одномерным* множеством, условно обозначая его символом ∞^1 (бесконечность в первой степени). Говорят, что прямая линия содержит ∞^1 точек.

С точки зрения аналитической геометрии размерность геометрической фигуры равна числу координат, необходимых для определения принадлежащей этой фигуре точки или линии. Отметив на прямой произвольную точку, будем считать ее началом координат на этой прямой. Положение любой точки на прямой вполне определяется одним параметром – координатой этой точки. Поэтому множество точек, лежащих на прямой, может быть названо *однопараметрическим* множеством. Понятия “одномерное множество” и “однопараметрическое множество” имеют одинаковый смысл.

Положение точки на произвольной кривой линии также определяется одним параметром – криволинейной координатой этой точки, отмеренной вдоль линии, следовательно, *линия – однопараметрическое множество точек*.

Положение точки на плоскости определяется двумя параметрами (например, декартовыми координатами x, y в этой плоскости). Множество точек плоскости – *двупараметрическое (двумерное)* множество. Говорят, что плоскость содержит ∞^2 точек.

На произвольной поверхности Φ , заданной уравнением $z=\varphi(x, y)$ положение некоторой точки I вполне определяется двумя ее декартовыми координатами x_I, y_I (рис. 6.32). *Поверхность – двупараметрическое множество точек*.

В начертательной геометрии преимущественно используется кинематический способ образования поверхностей. Это означает, что поверхность Φ рассматривается не как двупараметрическое множество точек, а как совокупность (бесконечное множество) последовательных положений образующей линии m , непрерывно перемещающейся в пространстве по определенному закону.

Напомним, что закон перемещения образующей линии задается при помощи направляющих линий и алгоритма перемещения образующей m по направляющим. Через каждую точку A_i какой-либо направляющей a (за исключением особых точек, в которых поверхность не имеет определенной касательной плоскости) проходит единственная образующая m_i . Образующая m_i может быть определена (выделена из множества образующих) указанием только одного параметра – например, координаты точки A_i на направляющей a . Следовательно, семейство образующих m_i на поверхности Φ образует однопараметрическое множество. *Поверхность – однопараметрическое множество линий. В частности, линейчатая поверхность – это однопараметрическое множество прямых линий*.

Пример. Чтобы определить положение точки на поверхности земного шара, надо указать два параметра (две географические координаты) – широту и долготу. Чтобы выделить какую-либо параллель из семейства всех параллелей на поверхности Земли, достаточно указать только один параметр – широту.

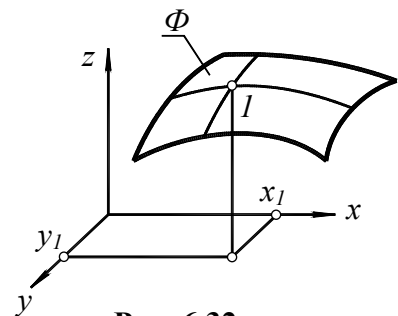


Рис. 6.32

6.3.2. Образование линейчатой поверхности общего вида

Положение произвольной прямой в пространстве определяется четырьмя параметрами – например, координатами x_1, y_1 и x_2, z_2 точек пересечения прямой с плоскостями проекций P_1 и P_2 . Следовательно, в пространстве содержится четырехпараметрическое (четырёхмерное) множество прямых.

Иногда вместо понятия “размерность” используют близкое по смыслу понятие “степень свободы”. Числом степеней свободы называют число независимых координат, определяющих положение фигуры. Например, точка на прямой обладает одной степенью свободы, у точки на плоскости – две степени свободы, у точки в пространстве – три степени свободы, у прямой линии в пространстве – четыре степени свободы.

Линейчатая поверхность представляет собой однопараметрическое множество прямых, то есть прямая линия, принадлежащая линейчатой поверхности, обладает всего одной степенью свободы. Произвольная прямая в пространстве имеет четыре степени свободы. Следовательно, чтобы выделить линейчатую поверхность из множества ∞^4 прямых, надо “связать” любые три из четырех степеней свободы, которыми обладает прямая линия в трехмерном пространстве. Это можно выполнить, накладывая определенные условия на положение прямой. Рассмотрим некоторые из этих условий.

Прохождение через фиксированную точку пространства. Множество прямых, проходящих через фиксированную точку пространства S , называют *связкой прямых* с вершиной S . Между прямыми связки и точками произвольной плоскости, не проходящей через вершину связки, устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждой точке плоскости соответствует единственная проходящая через эту точку прямая связки. Следовательно, связка прямых, как и множество точек плоскости – двухпараметрическое множество (в связке содержится ∞^2 прямых). Таким образом, условие прохождения прямой линии через фиксированную точку пространства “отнимает” у этой прямой две степени свободы.

Пересечение с пространственной кривой. Множество прямых, пересекающих данную пространственную кривую a , трехпараметрично. Действительно, каждая точка A_i кривой a определяет в пространстве связку ∞^2 прямых; точка A_i на кривой a имеет одну степень свободы, следовательно, множество прямых, пересекающих a , будет трехпараметричным. Таким образом, условие пересечения прямой линии с фиксированной пространственной кривой “отнимает” у этой прямой одну степень свободы.

Касание данной поверхности. На поверхности Φ находится ∞^2 точек. В каждой особой точке A поверхность Φ имеет единственную касательную плоскость, в которой содержится пучок прямых, касательных к Φ в точке A . *Пучком прямых* называют множество прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через фиксированную точку этой плоскости. Пучок прямых – однопараметрическое множество.

В каждой из ∞^2 точек поверхности можно к этой поверхности провести пучок (∞^1) касательных. Следовательно, множество касательных к данной поверхности трехпараметрично, то есть условие касания данной поверхности “отнимает” у прямой только одну степень свободы.

Линейчатая поверхность общего вида должна быть задана таким числом направляющих, которые все вместе “связывают” три степени свободы образующей прямой. Каждая направляющая “отнимает” у прямой одну степень свободы, поэтому для выделения линейчатой поверхности из множества ∞^4 прямых трехмерного пространства надо указать три направляющие (линии или поверхности).

Зададим три произвольные криволинейные направляющие a, b, c линейчатой поверхности (рис. 6.33). Для построения произвольной образующей m отметим на одной

из направляющих (например, на a) произвольную точку A . Найдем точку C пересечения конической поверхности $\Theta(A, b)$ с направляющей c . Прямая AC принадлежит поверхности $\Theta(A, b)$, следовательно, будет пересекать не только направляющие a и c , но и направляющую b – в точке B . Многократно повторяя построение, получаем однопараметрическое множество прямолинейных образующих линейчатой поверхности с тремя направляющими.

Построение точки C пересечения конической поверхности $\Theta(A, b)$ с криволинейной направляющей c выполняется по общей схеме решения первой позиционной задачи, но вместо вспомогательной секущей плоскости используется вспомогательная цилиндрическая поверхность (см. п. 7.5).

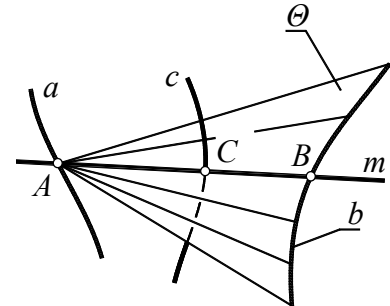


Рис. 6.33

Пример 1. Коническая поверхность образована движением прямолинейной образующей, проходящей через неподвижную точку S и пересекающей криволинейную направляющую m (см. п. 6.2.2). Условие прохождения прямой линии через фиксированную точку пространства “отнимает” у этой прямой две степени свободы. Условие пересечения прямой линии с фиксированной пространственной кривой “отнимает” еще одну степень свободы. Следовательно, у прямолинейной образующей остается только одна степень свободы. Получаем однопараметрическое множество прямых – коническую поверхность.

Пример 2. Наклонный геликоид образован прямой линией l , движущейся параллельно поверхности направляющего конуса Γ и пересекающей две направляющие: цилиндрическую винтовую линию m и ее ось i (см. п. 6.2.7). Условие параллельности прямой линии l и направляющей поверхности Γ означает, что образующая l во всех своих положениях пересекает несобственную кривую g^∞ пересечения поверхности Γ с несобственной плоскостью. Таким образом, наклонный геликоид – линейчатая поверхность с тремя направляющими m, i, g^∞ . В частности, если направляющий конус Γ вырождается в плоскость, то получаем прямой геликоид – поверхность с плоскостью параллелизма.

6.3.3. Эллиптический однополостный гиперболоид

Рассмотрим поверхность, кинематически заданную прямолинейной образующей, скользящей по трем скрещивающимся прямолинейным направляющим a, b, c , не параллельным одной плоскости (рис. 6.34).

Через каждую точку любой направляющей проходит единственная прямолинейная образующая l . Для построения образующей отметим на одной из направляющих (например, на a) произвольную точку A . Найдем точку C пересечения плоскости $\Theta(A, b)$ с направляющей c . Прямая $l=AC$ принадлежит плоскости $\Theta(A, b)$, следовательно, будет пересекать не только направляющие a и c , но и направляющую b – в точке B . При движении точки A по направляющей a образующая l описывает в пространстве линейчатую поверхность, которую называют *эллиптическим однополостным гиперболоидом* (эллиптическим ОГ).

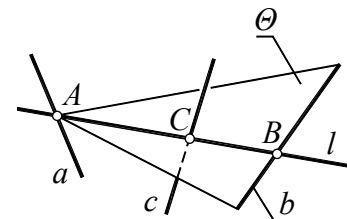


Рис. 6.34

На рис. 6.35 показаны три направляющие a, b, c эллиптического ОГ и три образующие l, m, n , каждая из которых пересекается со всеми тремя направляющими. Образующие l, m, n попарно не пересекаются (скрещиваются). В самом деле, если две из образующих, например, l и m , пересекаются (то есть лежат в одной плоскости), то прямые

a, b, c , пересекающиеся с l и m , также будут лежать в одной плоскости. Это невозможно, так как по условию прямые a, b, c попарно не пересекаются.

Тройки прямых a, b, c и l, m, n вполне “равноправны”. Любую из этих троек можно считать направляющими линейчатой поверхности. В курсе проективной геометрии доказывается, что линейчатая поверхность Φ , определяемая тремя скрещивающимися прямыми a, b, c , тождественна с поверхностью Φ' , определяемой прямыми l, m, n . Отсюда следует важный вывод, что эллиптический ОГ содержит два семейства прямых линий: семейство a, b, c, \dots и семейство l, m, n, \dots , причем прямые одного семейства между собой не пересекаются, но каждая прямая одного семейства пересекает все прямые другого семейства.

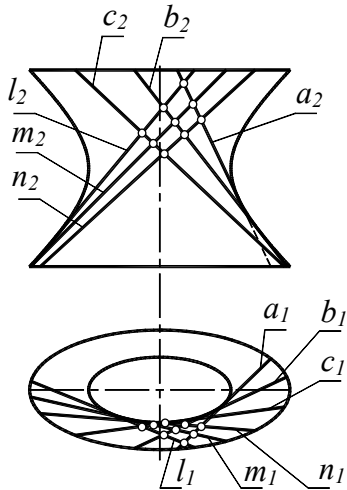


Рис. 6.35

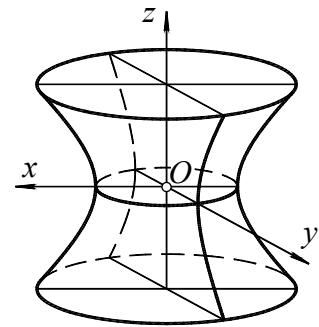
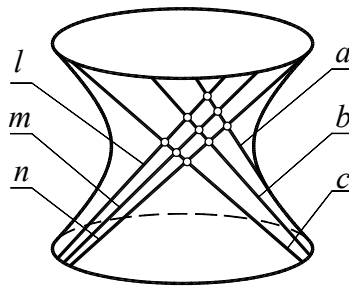


Рис. 6.36

Эллиптический ОГ – центрально-симметричная алгебраическая поверхность второго порядка с тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями симметрии XOZ, YOZ, XOY (рис. 6.36). Линии пересечения плоскостей симметрии образуют оси симметрии поверхности; точка O пересечения осей – центр симметрии. Ось Z называют главной осью эллиптического ОГ. В сечении поверхности плоскостями, проходящими через главную ось, возникают гиперболы. В сечении плоскостями, перпендикулярными главной оси, получаем эллипсы. В плоскости XOY располагается эллиптическое горловое сечение поверхности. Плоскость общего положения пересекает поверхность ОГ либо по эллипсу, либо по гиперболе. Касательная плоскость пересекает поверхность ОГ по двум прямолинейным образующим, проходящим через точку касания.

Ранее нами был рассмотрен частный случай эллиптического ОГ – однополостный гиперboloид вращения, образованный вращением прямой линии l вокруг оси i , не пересекающей l (см. п. 6.2.5.1). Горловое сечение такой поверхности – окружность (как и любое другое сечение, перпендикулярное оси i). Прямая линия, которой “разрешено” только вращение вокруг неподвижной оси, обладает лишь одной степенью свободы, поэтому множество образующих l однопараметрично. Положение любой образующей, выделенной на поверхности ОГ вращения, определяется одним параметром (например, угловой координатой точки горловой окружности, через которую проходит выделенная образующая).

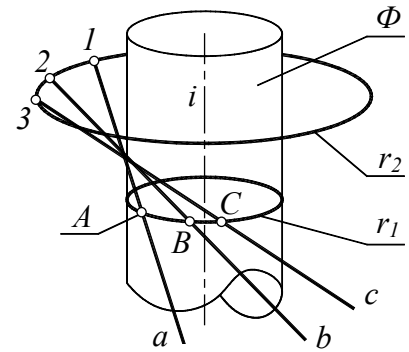


Рис. 6.37

Покажем, что ОГ вращения, как и любая линейчатая поверхность, может быть образован не только вращением прямолинейной образующей, но и общим способом, рассмотренным в п. 6.3.2 – указанием трех направляющих. Зададим в качестве направляющих цилиндр вращения Φ , его нормальное сечение r_1 и окружность r_2 с центром на оси цилиндра i , плоскость которой перпендикулярна i (рис. 6.37). Образующие a, b, c, \dots касаются поверхности Φ и пересекают направляющие r_1 и r_2 в точках A, B, C, \dots и $1, 2, 3, \dots$ соответственно. Три направляющие (поверхность Φ и окружности r_1, r_2) выделяют из ∞^4 прямых пространства однопараметрическое множество прямых a, b, c, \dots , которые и образуют ОГ вращения.

6.3.4. Гиперболический параболоид (косая плоскость)

При движении прямолинейной образующей по трем скрещивающимся прямым, не параллельным одной плоскости, формируется поверхность ОГ. В частном случае, когда все три направляющие параллельны одной плоскости, получается поверхность, которую называют *гиперболическим параболоидом* (ГП) или *косой плоскостью*.

На поверхности ГП имеется два однопараметрических семейства прямых линий. Прямые одного семейства между собой не пересекаются; при этом любая прямая одного семейства пересекает все прямые другого семейства. Это свойство (наличие двух семейств образующих) является общим для ГП и ОГ.

Теорема. *Поверхность гиперболического параболоида обладает двумя плоскостями параллелизма: все образующие одного семейства параллельны одной плоскости, а образующие другого семейства – другой.*

Доказательство

Пусть даны три направляющие l, n, t , лежащие в параллельных плоскостях $\Delta, \Delta', \Delta''$ (рис. 6.38). Эти прямые пересекаются с несобственной плоскостью пространства в точках $L^\infty, N^\infty, M^\infty$, лежащих на несобственной прямой c^∞ параллельных плоскостей $\Delta, \Delta', \Delta''$. Построим две произвольные образующие a и b , пересекающиеся с заданными направляющими l, n, t . Эти образующие пересекаются с несобственной плоскостью в точках A^∞, B^∞ . Несобственная прямая k^∞ пересечется в точке T^∞ с несобственной прямой c^∞ , так как k^∞ и c^∞ лежат в одной и той же (несобственной) плоскости.

Рассмотрим два семейства прямых на линейчатой поверхности, заданной направляющими l, n, t . К первому семейству отнесем прямые l, n, t , а ко второму – прямые a и b . Тогда прямую c^∞ следует отнести ко второму семейству, так как она пересекает три прямые l, n, t первого семейства. В свою очередь, прямая k^∞ должна быть отнесена к первому семейству, так как она пересекает три прямые a, b, c^∞ второго семейства.

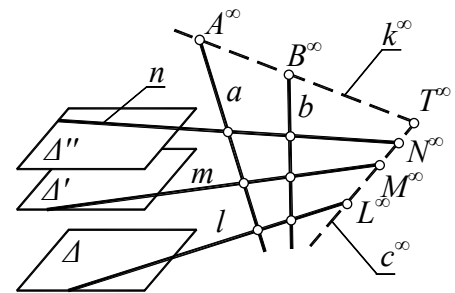


Рис. 6.38

Напомним, что любая прямая одного семейства пересекает все прямые другого семейства (это свойство является общим для ГП и ОГ). Следовательно, *все* прямые первого семейства l, n, t, k^∞, \dots пересекают несобственную прямую c^∞ , а *все* прямые второго семейства a, b, c^∞, \dots пересекают несобственную прямую k^∞ . Это и означает, что каждое семейство образующих на поверхности гиперболического параболоида имеет свою плоскость параллелизма. Образующие l, n, t, k^∞, \dots параллельны плоскости Δ , содержащей несобственную прямую c^∞ , а образующие a, b, c^∞, \dots параллельны некоторой другой плоскости Θ , содержащей несобственную прямую k^∞ . Теорема доказана.

Если в качестве одной из направляющих взять несобственную прямую, то поверхность ГП может быть задана двумя прямолинейными направляющими и плоскостью

параллелизма (см. п. 6.2.4). В этом случае любая образующая пересекает две заданные направляющие и несобственную прямую плоскости параллелизма, то есть в формировании поверхности фактически участвуют три направляющие, одна из которых – несобственная прямая. Например, в качестве направляющих могут быть приняты либо три прямые a, b, c^∞ , либо две прямые a, b и плоскость параллелизма Θ как “собственный” представитель несобственной прямой c^∞ (см. рис. 6.38).

Гиперболический параболоид – осесимметричная поверхность с двумя плоскостями симметрии XOZ и YOZ (рис. 6.39). Линия пересечения OZ плоскостей симметрии образует ось симметрии поверхности. Точка O пересечения поверхности с осью симметрии OZ называется *седловой точкой*. В сечении гиперболического параболоида плоскостями, перпендикулярными оси симметрии, получаются гиперболы. Плоскость XOY касается поверхности в седловой точке O и пересекает поверхность по гиперболе, распавшейся на две пересекающиеся прямые h и h' .

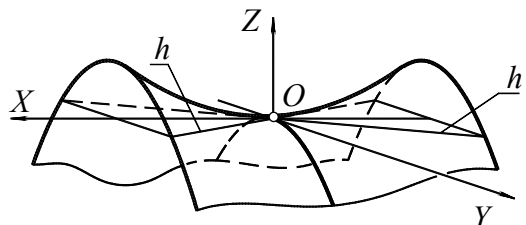


Рис. 6.39

В сечении плоскостями, параллельными какой-либо плоскости симметрии, получаются конгруэнтные параболы, то есть параболы с одинаковым параметром p (см. п. 6.1.1.3). Следовательно, поверхность ГП может быть задана как *поверхность параллельного переноса* – параллельным перемещением параболы m , лежащей в одной из плоскостей симметрии. Вершина параболы m движется (“скользит”) по параболе l , лежащей в другой плоскости симметрии [6].

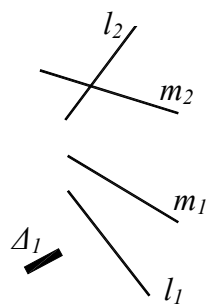


Рис. 6.40

В качестве упражнения (в рамках факультативных занятий) может быть решена следующая задача.

Задача. Гиперболический параболоид задан двумя направляющими прямыми общего положения m, l и плоскостью параллелизма Δ (рис. 6.40). Построить ось симметрии, седловую точку и плоскости симметрии гиперболического параболоида [15].

У К А З А Н И Е. Ось симметрии гиперболического параболоида параллельна линии пересечения его плоскостей параллелизма.

Вопросы для повторения

1. Какую линию называют алгебраической кривой?
2. Перечислить все типы кривых второго порядка и их частные случаи.
3. Дать пример закономерной пространственной кривой линии.
4. Каким способом задается поверхность на чертеже? Что такое определитель поверхности? Какую линию на чертеже называют очерком (очерковой линией) поверхности?
5. Дать определение линейчатой поверхности.
6. Перечислить все поверхности вращения второго порядка.
7. Каков критерий полноты чертежа поверхности?
8. Можно ли считать чертеж каркасной поверхности полным? Если нельзя, то почему?

Лекция 7

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ И С ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

В предыдущих лекциях рассматривались чертежи простейших геометрических фигур (точек, прямых, плоскостей) и произвольных кривых линий и поверхностей, находящихся в трехмерном пространстве. Эти фигуры могут пересекаться между собой, образуя общие элементы. Например, линия и поверхность пересекаются в одной или нескольких точках, а поверхности пересекаются по линии.

Задачи, в которых находят общие элементы геометрических фигур, называются позиционными. Различают *первую позиционную задачу* (построение точек пересечения линии и поверхности) и *вторую позиционную задачу* (построение линии пересечения двух поверхностей).

В лекции 3 были решены простейшие позиционные задачи: построение точки пересечения прямой с плоскостью и построение линии пересечения двух плоскостей (прямая – это простейшая линия, а плоскость – простейшая поверхность). Продолжим рассмотрение позиционных задач, переходя к более сложным геометрическим фигурам трехмерного пространства.

7.1. Пересечение многогранника с плоскостью

Напомним, что многогранник – пространственная геометрическая фигура, со всех сторон ограниченная отсеками плоскостей (гранями). Элементы многогранника – грани, ребра (прямые линии, по которым пересекаются грани) и вершины (точки пересечения ребер). Совокупность вершин и ребер называют сеткой многогранника.

В пересечении многогранника с плоскостью получается плоская замкнутая ломаная линия, вершинами которой являются точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью.

Построение линии пересечения многогранника с плоскостью сводится к определению точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, то есть к многократному решению первой позиционной задачи.

Задача 1. Построить линию пересечения многогранника с проецирующей плоскостью. На рис. 7.1 показан тетраэдр, рассеченный проецирующей плоскостью Σ . Отмечаем точки 1, 2, 3, 4 пересечения плоскости Σ с ребрами многогранника и соединяем найденные точки отрезками прямой линии. Получаем плоскую замкнутую ломаную линию 1-2-3-4. При построении этой линии обязательно следует учитывать следующее правило.

Правило. Отрезками прямой соединяются только те точки, которые лежат на одной и той же грани многогранника.

Например, на рис. 7.1 соединены точки 1 и 2, потому что они лежат на одной и той же грани ABS . Точки 1 и 3 соединять нельзя, так как они принадлежат разным граням тетраэдра: линия 1-3 проходит не по поверхности, а *внутри* тетраэдра.

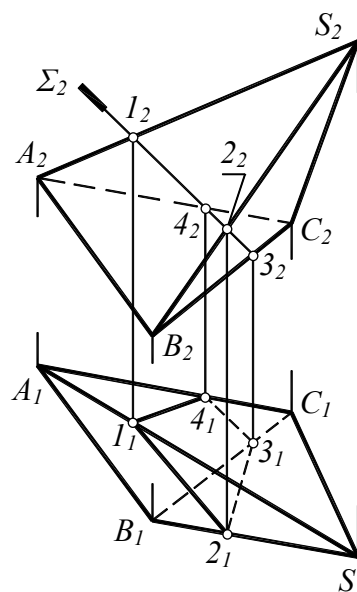


Рис. 7.1

Задача 2. Построить линию разреза пирамиды плоскостью общего положения. Плоскость Φ общего положения, заданная параллельными прямыми m, n , пересекает пирамиду $ABCS$ (рис. 7.2).

Для решения задачи надо найти точки пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью $\Phi(m||n)$ и соединить найденные точки ломаной линией.

1. Построение точки $M=AS \cap \Phi$ (первая позиционная задача). Проводим через ребро AS вспомогательную секущую плоскость Δ . На пересечении ребра AS и линии $(1-2)=\Delta \cap \Phi$ отмечаем искомую точку M .

2. Построение точки $N=BS \cap \Phi$ (первая позиционная задача). Через ребро BS проведена вспомогательная секущая плоскость Σ . Точка N – на пересечении ребра BS с линией $(3-4)=\Sigma \cap \Phi$.

3. Построение точки $K=CS \cap \Phi$ (первая позиционная задача). Проводим через ребро CS секущую плоскость Γ и находим линию $(5-6)=\Gamma \cap \Phi$. Точку K отмечаем на пересечении линии 5-6 и ребра CS .

Таким образом, построение линии пересечения пирамиды с плоскостью общего положения (см. рис. 7.2) сведено к трехкратному решению первой позиционной задачи. Треугольник MNK – искомая линия пересечения пирамиды $ABCS$ с плоскостью $\Phi(m||n)$.

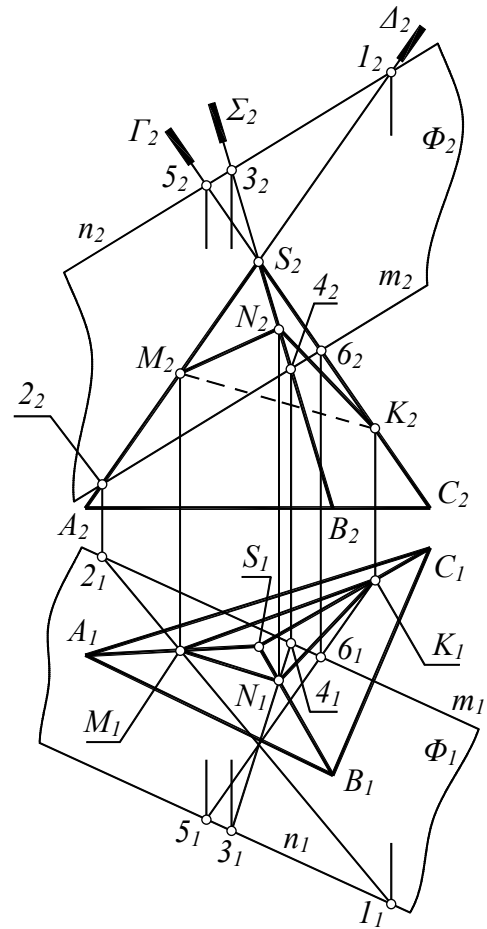


Рис. 7.2

7.2. Пересечение кривой поверхности с плоскостью

В пересечении кривой поверхности с плоскостью получается плоская кривая линия. Точки линии пересечения условно разделяют на *опорные* и *промежуточные*.

К опорным точкам относятся:

– *экстремальные точки*, то есть наиболее близкие и наиболее удаленные точки от той или иной плоскости проекций: низшая и высшая точки (относительно горизонтальной плоскости проекций), ближняя и дальняя точки (относительно фронтальной плоскости проекций), левая и правая точки (относительно профильной плоскости проекций);

– *очерковые точки*, то есть точки, проекции которых принадлежат очерку проекции поверхности;

– *точки смены видимости*, то есть очерковые точки, в которых меняется видимость проекции линии пересечения.

Все остальные точки линии пересечения поверхностей называют промежуточными. При построении линии пересечения в первую очередь определяют опорные точки искомой линии пересечения, а затем – промежуточные.

Как опорные, так и промежуточные точки линии пересечения любых поверхностей определяются по следующей схеме.

1. Данные поверхности пересекаются *вспомогательной поверхностью* (например, плоскостью или сферой).

2. Определяются линии пересечения вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей.

3. Отмечаются точки пересечения полученных линий. Эти точки принадлежат искомой линии пересечения данных поверхностей.

Многokrратно повторяя указанную схему, можно получить любое количество точек линии пересечения.

Задача 1. Построить линию m разреза сферы проецирующей плоскостью Σ .

Заданные поверхности (сфера и плоскость Σ) имеют *общую плоскость симметрии*, обозначенную на чертеже буквой Φ (рис. 7.3). Плоскость Φ делит обе заданные поверхности на две одинаковые “половинки”, зеркально симметричные относительно плоскости Φ . В силу этого линия разреза сферы плоскостью Σ симметрична относительно Φ .

Истинная форма линии m – окружность, так как любая плоскость пересекает сферу по окружности. Фронтальная проекция m_2 окружности m совпадает с фронтальной проекцией плоскости Σ . Горизонтальная проекция m_1 окружности m – эллипс с центром O и главными осями A_1B_1 и D_1E_1 , где A, B, D, E – экстремальные точки. Экстремальные относительно Π_1 точки A и B (высшая и низшая) лежат в общей плоскости симметрии Φ . Экстремальные относительно Π_2 точки D и E (ближняя и дальняя) построены с помощью горизонтальной секущей плоскости Δ , проведенной через центр O окружности m (см. рис. 7.3).

Точки смены видимости C и C' относительно горизонтальной плоскости проекций лежат в горизонтальной плоскости, обозначенной на чертеже буквой Γ . Все точки на сфере, лежащие *выше* плоскости Γ , видны на горизонтальной проекции. Точки на нижней половине сферы (ниже плоскости Γ) будут на горизонтальной проекции невидимыми (закрываются от наблюдателя верхней половиной сферы). Поэтому плоскость Γ , отделяющую верхнюю часть сферы от нижней, называют *плоскостью смены видимости относительно горизонтальной плоскости проекций*.

Точки смены видимости C и C' одновременно являются *очерковыми точками*, так как они лежат на горизонтальном очерке сферы. В этих точках меняется видимость горизонтальной проекции искомой линии m .

После определения опорных точек (экстремальных, очерковых, точек смены видимости) переходим к построению промежуточных точек. На фронтальной проекции линии m отмечаем произвольную промежуточную точку I . Линия m симметрична относительно общей плоскости симметрии Φ , поэтому точка I – “двойная”. Вторую точку, симметричную точке I , обозначаем той же цифрой I , но с добавлением штриха: $I_2=I'_2$.

Точки I и I' находятся на сфере. Чтобы найти их горизонтальные проекции, проводим через них вспомогательную горизонтальную плоскость Δ . Плоскость Δ рассекает сферу по окружности l (параллели). Начертив горизонтальную проекцию l_1 параллели l , отмечаем на ней горизонтальные проекции точек I и I' .

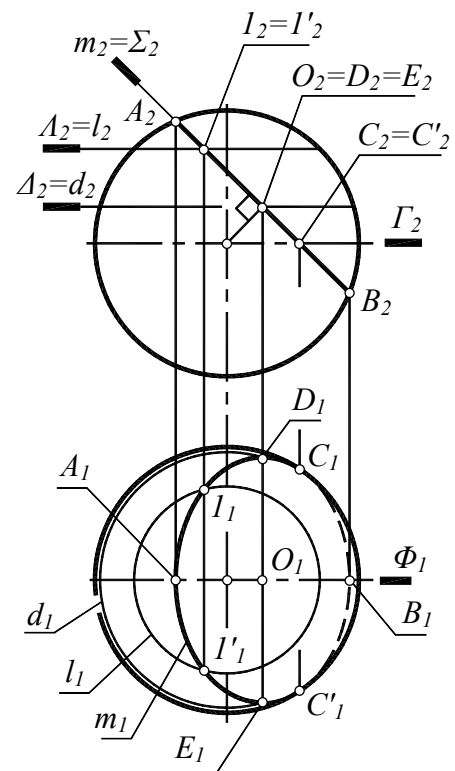


Рис. 7.3

Через найденные точки A, B, C, C', D, E, I, I' проходит искомая линия m пересечения сферы с плоскостью Σ . Горизонтальная проекция m_1 линии m – эллипс с главными осями A_1B_1 и D_1E_1 . Истинная форма линии m – окружность с диаметром A_2B_2 .

Задача 2. Построить линию пересечения поверхности конуса вращения и плоскости общего положения Σ (рис. 7.4).

Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы плоскость Σ , заданная параллельными прямыми a, b , заняла проецирующее положение. Для этого начертим в плоскости $\Sigma(a||b)$ горизонталь $h=AB$ и заменим плоскость Π_2 плоскостью Π_4 , расположенной перпендикулярно к горизонтали h . В новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость $\Sigma(a||b)$ становится проецирующей: $\Sigma \perp \Pi_4$. Проекция Σ_4 этой плоскости “выродилась” в прямую линию $\Sigma_4=a_4=b_4$.

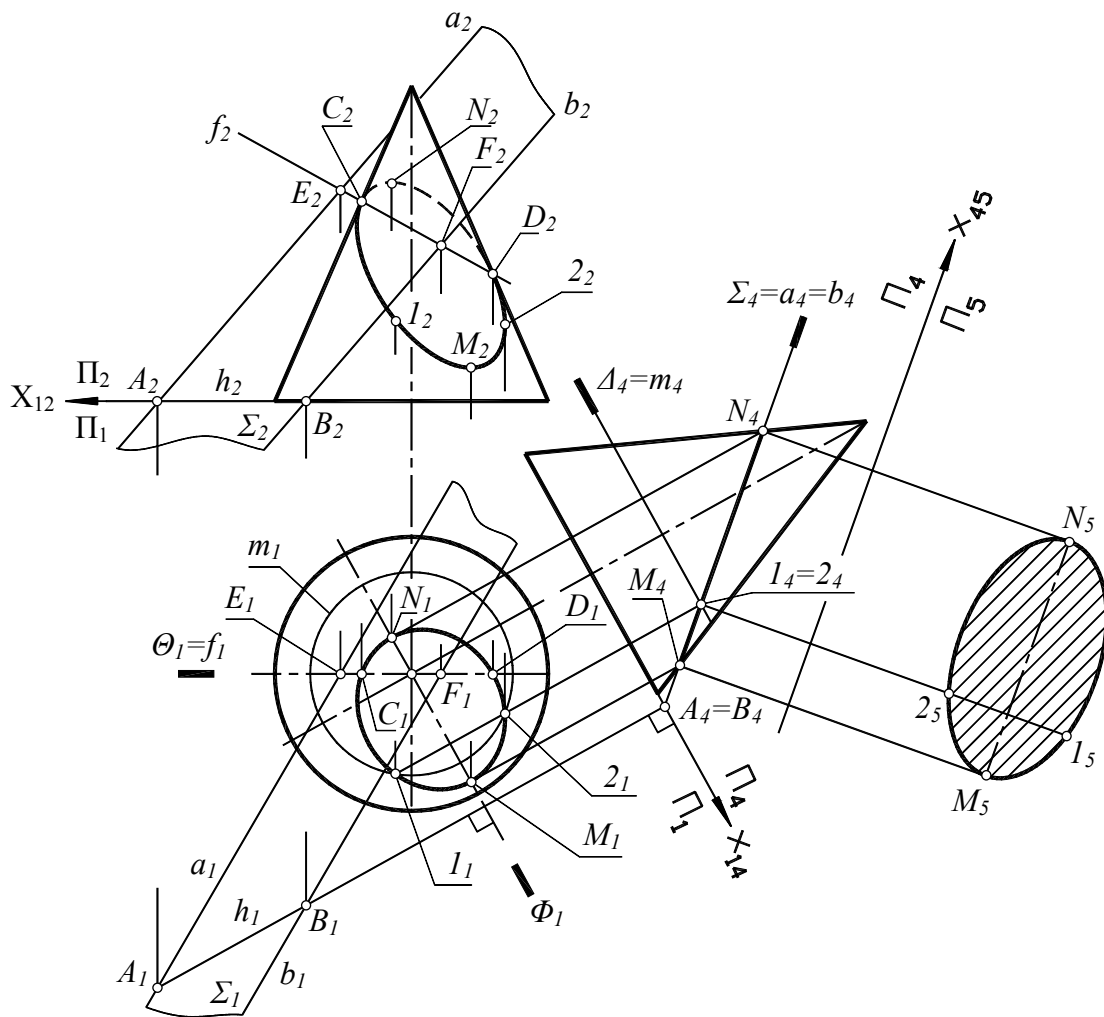


Рис. 7.4

На плоскости проекций Π_4 отмечаем экстремальные (верхнюю и нижнюю) точки N и M искомой линии пересечения плоскости Σ с конусом. Экстремальные точки N и M находятся в *общей плоскости симметрии* заданных поверхностей. Эта плоскость обозначена на рис. 7.4 буквой Φ . Плоскости Φ и Π_4 параллельны.

С помощью линий связи “возвращаем” верхнюю и нижнюю точки M, N в исходную систему координат Π_1/Π_2 . Плоскости проекций Π_2 и Π_4 перпендикулярны горизонтальной плоскости Π_1 , поэтому высотные отметки (координаты по оси z) точек M, N без изменений переносятся с плоскости Π_4 на плоскость Π_2 .

Линия пересечения конуса с плоскостью Σ полностью видима на горизонтальной плоскости проекций. На фронтальной плоскости проекций эта линия видна только час-

точно. Чтобы построить точки смены видимости на Π_2 , отмечаем на чертеже *плоскость смены видимости* Θ , отделяющую “переднюю” часть поверхности конуса, видимую на фронтальной плоскости проекций Π_2 , от “задней” (невидимой).

Плоскость Θ пересекает конус по фронтальному очерку (фронтальный очерк конуса – треугольник), а заданную плоскость Σ – по фронтали $f=EF$. Фронтальный очерк конуса и фронтальная проекция фронтали f_2 пересекаются в точках смены видимости C и D . В этих точках линия пересечения “переходит” с передней (видимой на Π_2) части конуса на его заднюю (невидимую) часть.

Найденные точки смены видимости C и D одновременно являются очерковыми, так как они находятся на фронтальном очерке конуса.

После определения *опорных точек* (экстремальных точек M , N и точек смены видимости C , D) находят *промежуточные точки* линии пересечения. Промежуточные точки нужны для увеличения точности построения искомой линии. Любое количество промежуточных точек можно определить с помощью вспомогательных секущих плоскостей. Например, промежуточные точки 1 и 2 найдены с помощью вспомогательной плоскости Δ , пересекающей конус по окружности m (см. рис. 7.4).

Для построения истинной формы сечения конуса плоскостью Σ введена в рассмотрение новая плоскость проекций Π_5 , параллельная плоскости Σ . Ширина сечения относительно его оси симметрии MN одинакова как на Π_1 , так и на Π_5 , поэтому расстояние между проекциями промежуточных точек 1_5 и 2_5 на плоскости Π_5 равно расстоянию между проекциями 1_1 и 2_1 этих же точек на плоскости Π_1 .

7.3. Конические сечения

При пересечении произвольной конической поверхности второго порядка плоскостями могут быть получены все виды кривых второго порядка: *эллипс* (либо *окружность* как частный случай эллипса), *парабола* и *гипербола*. Эти линии называются *коническими сечениями*.

Эллипс. Если плоскость Σ пересекает *все образующие* конуса, то в сечении получается замкнутая кривая второго порядка, не имеющая несобственных точек – *эллипс* (рис. 7.5, *а*). Если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси конуса – получаем окружность (частный случай эллипса).

Парабола. Если секущая плоскость Σ параллельна какой-нибудь *одной* образующей l конуса (пересекает ее в несобственной точке), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая одну бесконечно удаленную (несобственную) точку – *парабола* (рис. 7.5, *б*). В частности, если секущая плоскость касается конуса вдоль какой-либо образующей l – получаем параболу, выродившуюся в двойную прямую l .

Напомним, что *все параболы подобны друг другу* (см. п. 6.1.1.3). Параболы отличаются друг от друга только своим параметром p . Аналогичным образом, все окружности подобны, так как отличаются друг от друга только одним размером: радиусом R . Поэтому две произвольные параболы всегда можно совместить друг с другом, используя преобразования подобия и перемещения.

Гипербола. Если секущая плоскость Σ параллельна *двум образующим* конуса l и t (пересекает их в несобственных точках), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая две несобственные точки – *гипербола* (рис. 7.5, *в*). В частности, если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то гипербола вырождается в две пересекающиеся прямые (действительные или мнимые).

Учитывая, что конус – двуполостная поверхность, можно классифицировать конические сечения по следующему признаку.

Если секущая плоскость пересекает только одну из двух полостей конуса – получаем замкнутую кривую (эллипс).

Если секущая плоскость пересекает обе полости конуса – получаем кривую с двумя “ветками” (гипербола).

Парабола – предельный случай как эллипса, так и гиперболы. Секущая плоскость располагается так, что при бесконечно малом повороте этой плоскости в ту или другую сторону получается либо эллипс, либо гипербола. Например, на рис. 7.5, б малый поворот секущей плоскости Σ по часовой стрелке приводит к появлению эллипса, против часовой стрелки – гиперболы.

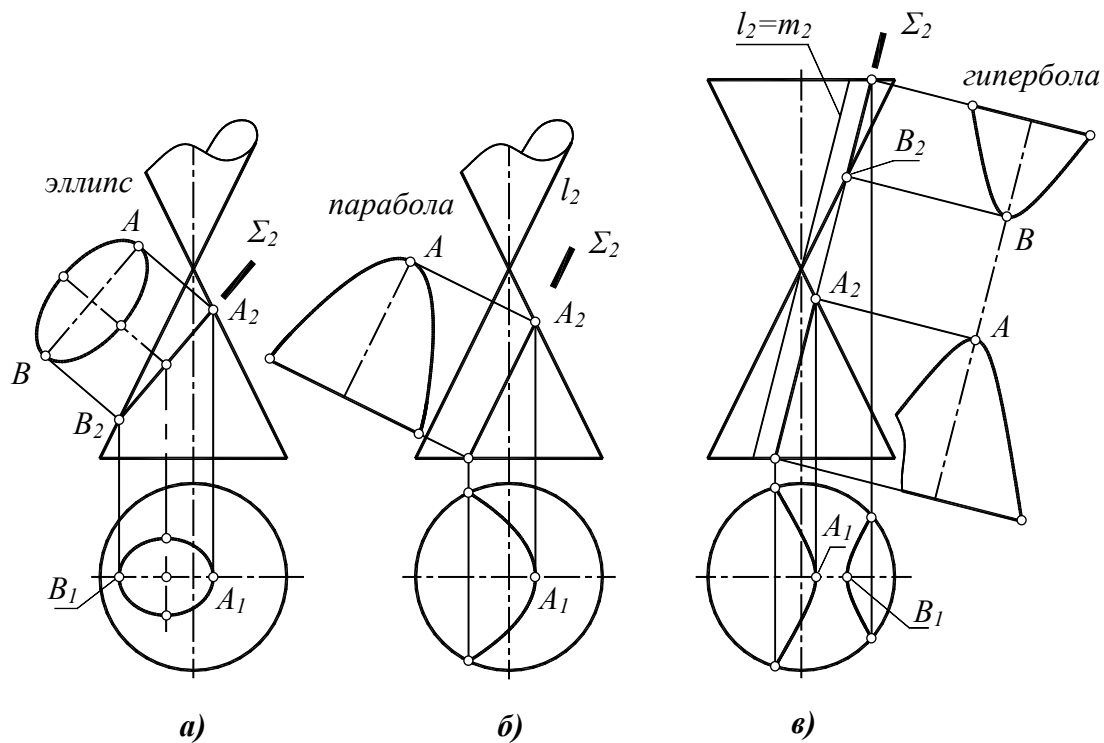


Рис. 7.5

Примечание. На рис. 7.5 показаны конические сечения, полученные на поверхности прямого кругового конуса. Но все виды конических сечений (эллипс, окружность, парабола, гипербола) могут быть найдены на конической поверхности второго порядка общего вида, заданной направляющей кривой второго порядка и вершиной.

7.4. Пересечение поверхности с прямой линией

Построение точек пересечения прямой линии с какой-либо поверхностью называют *первой позиционной задачей*. Напомним схему ее решения (см. лекцию 3).

1. Через прямую проводят вспомогательную плоскость. *Это действие – самое главное! Если на чертеже не обозначена вспомогательная плоскость, то все последующие построения не имеют смысла.*

2. Находят линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью.

3. Отмечают точки пересечения полученной линии с данной прямой. Эти точки являются искомыми.

Задача 1. Построить точки пересечения прямой l с трехгранной призмой.

На рис. 7.6 дана наглядная иллюстрация: прямая l заключена во вспомогательную плоскость Σ , пересекающую призму по ломаной линии ABC . Искомые точки K, L отмечены на пересечении прямой l с ломаной ABC .

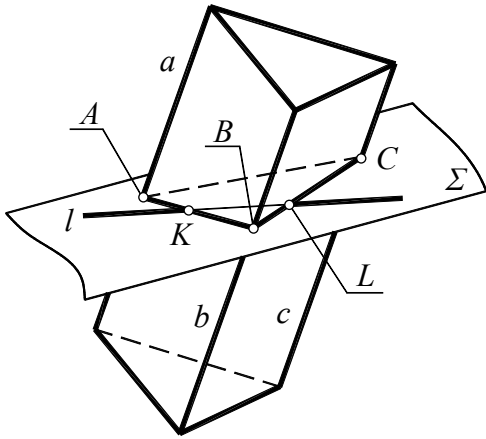


Рис. 7.6

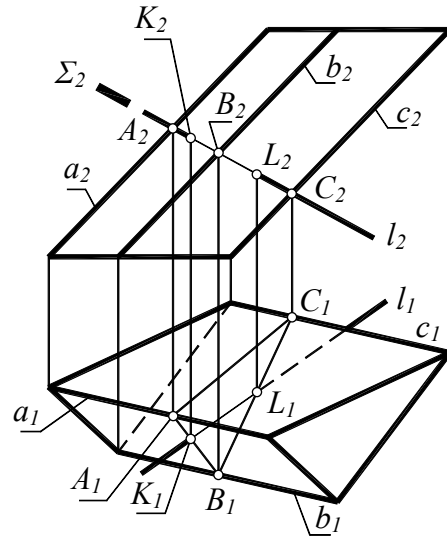


Рис. 7.7

Рассмотрим решение этой задачи на чертеже (рис. 7.7).

1. Через данную прямую l проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Σ . **Обязательно отмечаем эту плоскость на чертеже!**

2. Находим линию ABC пересечения плоскости Σ с призмой.

3. Отмечаем точки K, L пересечения линии ABC с данной прямой l . Эти точки являются искомыми точками пересечения прямой l с призмой. “Видимость” проекций прямой l определяем с помощью конкурирующих точек (см. лекцию 2, п. 2.2.6).

Задача 2. Построить точки пересечения сферы с прямой линией.

Для решения задачи надо заключить данную прямую во вспомогательную плоскость и построить линию пересечения сферы этой плоскостью, затем отметить искомые точки на пересечении этой линии и данной прямой.

Если прямая занимает *частное положение* (прямая уровня или проецирующая), то через нее может быть проведена вспомогательная плоскость уровня. Например, надо построить точки A, B пересечения горизонтали h со сферой (рис. 7.8). Через горизонталь h проводим вспомогательную горизонтальную плоскость уровня Σ . Линия пересечения сферы с плоскостью Σ (окружность m) проецируется на Π_1 окружностью m_1 . На пересечении окружности m и горизонтали h отмечаем искомые точки A, B .

На рис. 7.9 показано построение точек пересечения *проецирующей* прямой j со сферой. Проводим через j вспомогательную фронтальную плоскость уровня Σ , которая пересекает сферу по окружности m . На пересечении окружности m и проецирующей прямой j отмечаем искомые точки.

Пусть данная прямая l занимает *общее положение* (рис. 7.10). Требуется найти точки A и B пересечения сферы с прямой l .

Задача решается преобразованием прямой l общего положения в прямую уровня (способом замены плоскостей проекций). Проведем через прямую l горизонтально-проецирующую плоскость Σ . Введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , параллельную плоскости Σ . На плоскости Π_4 построим проекцию l_4 прямой l и проекцию m_4 окружности m , полученной в сечении заданной сферы плоскостью Σ . На пересечении проекций l_4 и m_4 отмечаем проекции A_4 и B_4 искомым точек. Затем с помощью

линий связи переносим найденные точки в исходную систему координат Π_1 / Π_2 . Задача решена.

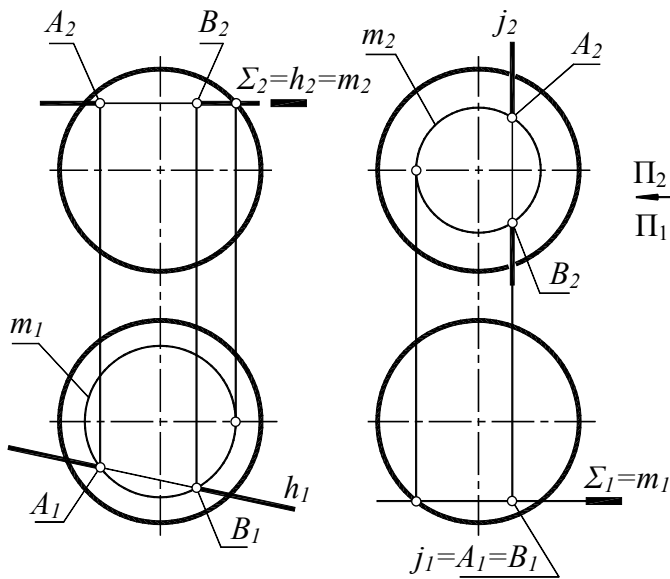


Рис. 7.8

Рис. 7.9

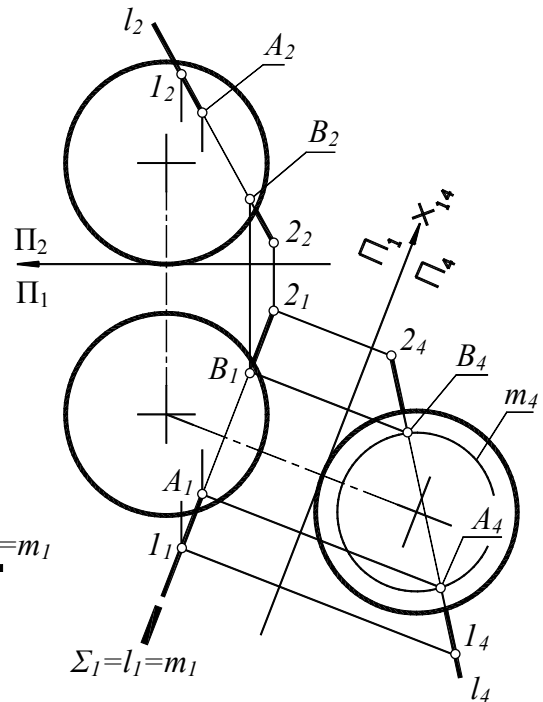


Рис. 7.10

Задача 3. Построить точки пересечения конуса с прямой линией.

На рис. 7.11 показан прямой круговой конус и прямая m . Требуется построить точки пересечения прямой m с поверхностью конуса.

В соответствии со схемой решения первой позиционной задачи надо через данную прямую провести вспомогательную секущую плоскость, построить линию разреза конуса этой плоскостью и отметить искомые точки на пересечении данной прямой с найденной линией разреза.

Для упрощения построений следует выбрать вспомогательную секущую плоскость, пересекающую конус по графически простой линии (то есть по прямой или окружности).

Среди множества плоскостей, проходящих через m , есть плоскость, которая проходит как через m , так и через вершину конуса S . Обозначим эту плоскость буквой Σ . Плоскость Σ , заданная на чертеже прямой m и вершиной конуса S , пересекает конус по двум прямым линиям (образующим конуса). Поэтому целесообразно выбрать плоскость $\Sigma(S, m)$ в качестве вспомогательной секущей плоскости.

Чтобы построить линию разреза конуса плоскостью Σ , проведем в плоскости Σ произвольную прямую $S-I$ и найдем точку N пересечения этой прямой с плоскостью основания конуса Θ . Прямая m пересекается с плоскостью Θ в точке M . Поэтому прямая MN есть линия разреза плоскости основания конуса Θ секущей плоскостью Σ : $MN = \Theta \cap \Sigma$.

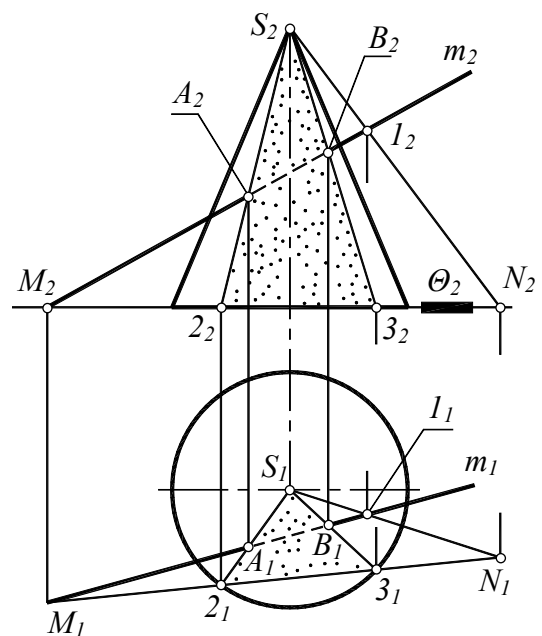


Рис. 7.11

В точках 2 и 3 плоскость Σ пересекает круговое основание конуса. Так как Σ проходит через вершину S конуса, то линия разреза конуса плоскостью Σ – треугольник $S23$.

Искомые точки A, B пересечения конуса с прямой t определяются на пересечении линии $S23$ с прямой t . Задача решена. Отметим, что решение было найдено с помощью вспомогательной секущей плоскости *общего положения*.

Правило. Вспомогательную секущую плоскость рекомендуется выбирать таким образом, чтобы проекция линии пересечения ее с данной поверхностью была графически простой линией (прямой или окружностью). В зависимости от условия задачи такая плоскость может занимать как проецирующее, так и общее положение.

Например, если в рассмотренной задаче (см. рис. 7.11) применить вспомогательную проецирующую плоскость, проходящую через t , то она “разрежет” конус либо по эллипсу, либо по гиперболе. Вычерчивание этих линий затруднит решение и сделает его менее точным.

7.5. Пересечение поверхности с кривой линией

Для построения точек пересечения кривой линии l с поверхностью Φ используется универсальная схема решения первой позиционной задачи (см. п. 7.4), но вместо вспомогательной секущей плоскости используется вспомогательная цилиндрическая поверхность Γ (“изогнутый лист”).

Рассмотрим схему решения задачи.

1. Через данную кривую линию l проводят вспомогательную, обычно проецирующую, цилиндрическую поверхность Γ .

2. Находят линию t пересечения вспомогательной поверхности Γ с данной поверхностью Φ : $t = \Gamma \cap \Phi$.

3. Отмечают точки пересечения полученной линии t с данной кривой линией l .

Задача. Построить точку L пересечения кривой l с плоскостью $\Delta(ABC)$.

Проводим через кривую l фронтально-проецирующую цилиндрическую поверхность Γ (рис. 7.12). С помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ, Σ' находим линию $t = 1-2-3-4$ пересечения цилиндрической поверхности Γ с заданной поверхностью $\Delta(ABC)$. Отмечаем точку L пересечения линии t с данной кривой линией l . Точка L – искомая. Видимость линии l на чертеже определяется обычным образом (с помощью конкурирующих точек).

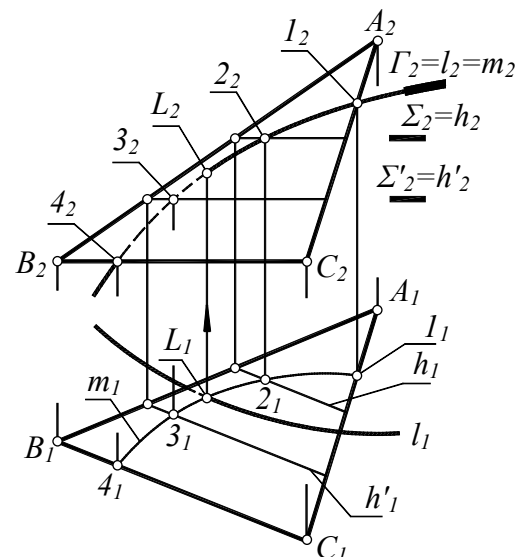


Рис. 7.12

Вопросы для повторения

1. Какая линия получается в пересечении многогранника с плоскостью?
2. Какая линия получается в пересечении сферы с плоскостью общего положения? Как изображается эта линия на плоскостях проекций?
3. Дать классификацию конических сечений. Как располагается секущая плоскость, пересекающая прямой круговой конус по эллипсу? По гиперболе? По параболе? По окружности? По двум прямым?

Лекция 8

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ (СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ)

Две поверхности пересекаются по линии, которая одновременно принадлежит каждой из них. В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой, ломаной или кривой (плоской или пространственной).

Напомним, что задача определения линии пересечения двух поверхностей называется *второй позиционной задачей*. Решение этой задачи сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, соединяющая эти точки, будет искомой.

Точки, образующие линию пересечения, разделяют на опорные и промежуточные. К опорным точкам относятся следующие виды точек.

1. Точки на ребрах многогранников.
2. Очерковые точки, то есть точки, лежащие на очерковых линиях данных фигур.
3. Точки смены видимости искомой линии пересечения относительно плоскостей проекций.
4. Экстремальные точки, то есть самая близкая и самая удаленная точки линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций. Экстремальные точки относительно Π_j называют высшей и низшей.

Основным способом построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, является *способ вспомогательных секущих поверхностей*. Сущность его заключается в том, что обе заданные поверхности “разрезаются” вспомогательной секущей поверхностью. Возникают две линии разреза, которые пересекаются между собой в точках, лежащих на обеих заданных поверхностях.

Чаще всего в качестве вспомогательных секущих поверхностей применяют плоскости (*способ вспомогательных плоскостей*) или сферы (*способ вспомогательных сфер*).

Схема решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих плоскостей.

1. Проводят вспомогательную плоскость Σ , разрезающую заданные поверхности Θ и Γ (рис. 8.1).

2. Находят линии t, g разреза заданных поверхностей вспомогательной плоскостью Σ .

3. Отмечают точки 1 и 2 пересечения линий разреза t и g . Эти точки находятся на обеих поверхностях, то есть на искомой линии их пересечения.

Многочисленное повторение рассмотренной схемы позволяет определить достаточное количество точек (опорных и промежуточных), через которые проходит линия пересечения данных поверхностей.

Вспомогательные секущие плоскости могут быть выбраны вполне произвольно. Тем не менее, желательно выбирать секущие плоскости так, чтобы проекции линий пересечения ее с данными поверхностями были графически простыми линиями (прямыми или окружностями).

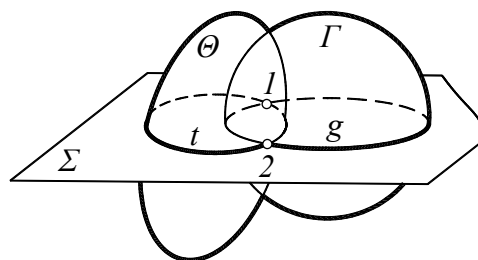


Рис. 8.1

8.1. Пересечение двух многогранников

При пересечении двух многогранников возможны два случая: *врезка* или *пронизание*.

При *врезке* в пересечении участвуют *частично* ребра одного и другого многогранника. При этом линия пересечения представляет собой одну замкнутую пространственную ломаную линию.

Пронизанием называют такой вид пересечения многогранников, при котором в пересечении принимают участие *все* ребра одного из них и только *часть* ребер второго. Линия пересечения при пронизании распадается на две замкнутые ломаные.

Как при врезке, так и при пронизании вершинами ломаной линии являются точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого.

Правило. Построение линии пересечения многогранников заключается в нахождении точек пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого (то есть в многократном решении первой позиционной задачи).

На рис. 8.2 показан случай *пронизания*: пирамида $ABCS$ “прокалывает” трехгранную призму. При этом линия пересечения распадается на две замкнутые ломаные: пространственную ломаную линию $1-2-3-4-5-1$ (границу “входного отверстия” в призме) и плоскую ломаную $6-7-8$ (границу “выходного отверстия”). В пересечении принимают участие все боковые ребра пирамиды и только одно ребро l вертикальной призмы. Ребра m и n призмы в пересечении с пирамидой не участвуют.

Боковые грани призмы (см. рис. 8.2) занимают горизонтально-проецирующее положение, поэтому точки $1, 2, 4, 6, 7, 8$ пересечения ребер пирамиды с гранями призмы отмечаются на горизонтальной плоскости проекций без вспомогательных построений. Фронтальные проекции этих точек найдены с помощью линий связи.

Для построения точек 3 и 5 пересечения ребра l призмы с гранями пирамиды потребовалось провести через ребро l вспомогательную секущую плоскость Θ . Эта плоскость “разрезала” боковые грани пирамиды по прямым RS и ES . На пересечении прямой l с линиями RS и ES отмечены точки 3 и 5 , в которых ребро l призмы пересекается с гранями пирамиды.

Найденные точки пересечения ребер с гранями определяют вершины искомой ломаной линии пересечения многогранников.

Построение линии пересечения многогранников выполняется в соответствии со следующим правилом: **соединяют отрезками прямых только те пары вершин, которые лежат в одной и той же грани первого многогранника и одновременно в одной и той же грани второго.**

Например, на рис. 8.2 точка 1 соединена с точкой 5 , так как точки $1, 5$ принадлежат грани ACS пирамиды и одновременно грани $l||m$ призмы. Точки 1 и 3 соединять нельзя,

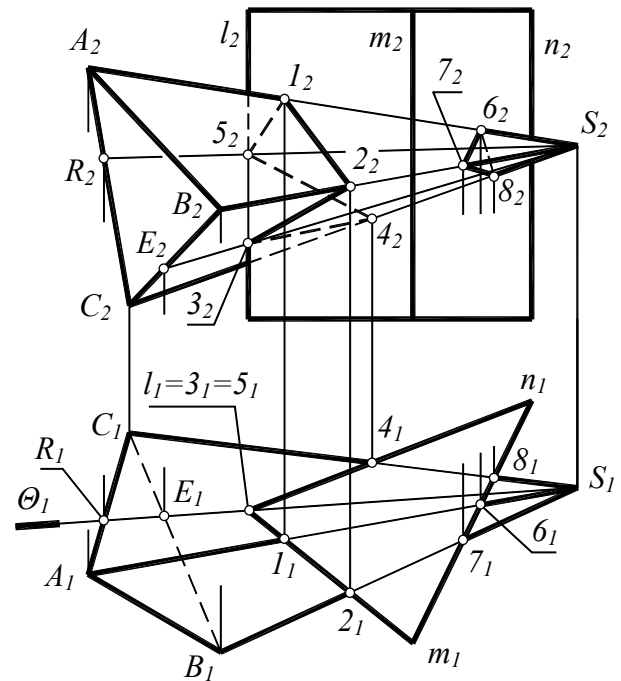


Рис. 8.2

так как они находятся на разных гранях пирамиды. Также нельзя соединять точки 1 и 4 , так как они находятся на одной и той же грани пирамиды, но на разных гранях призмы.

Видимость ребер многогранников и линии их пересечения на чертеже определяется с помощью конкурирующих точек.

8.2. Пересечение многогранника и кривой поверхности

Линия пересечения многогранной и кривой поверхностей в общем случае представляет собой совокупность плоских кривых линий, которые получаются в пересечении граней многогранника и кривой поверхности. Эти кривые линии пересекаются в точках, лежащих на ребрах многогранника.

Построение линии пересечения произвольной поверхности с многогранником сводится к построению линии пересечения данной поверхности с каждой гранью многогранника.

Задача 1. Построить линию пересечения прямого кругового конуса и трехгранной призмы (рис. 8.3).

Боковые грани призмы занимают фронтально-проецирующее положение, поэтому фронтальная проекция искомой линии пересечения совпадает с фронтальным очерком призмы (с той его частью, которая заключена “внутри” фронтального очерка конуса).

Отмечаем на фронтальной проекции опорные точки $1...5$ и с помощью вспомогательных секущих плоскостей находим их горизонтальные проекции. Например, через точки 1 и 2 проведена секущая плоскость Γ , пересекающая конус по окружности l . Горизонтальные проекции точек $1, 2$ принадлежат горизонтальной проекции l_1 этой окружности. Промежуточные точки $6, 7$ и $8, 9$ найдены с помощью вспомогательной плоскости Δ , пересекающей конус по параллели m . Горизонтальные проекции этих точек принадлежат горизонтальной проекции m_1 параллели m .

Грани призмы пересекают поверхность конуса по кривым второго порядка. Рассмотрим линии, возникающие в пересечении конуса с гранями призмы.

1. Грань Θ , параллельная очерковой образующей конуса, пересекает конус по *параболе*, для точного построения которой на чертеже отмечена ее вершина A . Парабола проходит через точку A и пары точек $1-2, 3-4, 6-7$, симметричные относительно общей плоскости симметрии Φ конуса и призмы.

2. Грань Σ пересекает конус по *эллипсу*. Для точного построения эллипса на чертеже отмечена точка B пересечения плоскости Σ и очерковой образующей конуса. Эллипс проходит через точку B (самая верхняя точка эллипса), через точку 5 (самая нижняя точка эллипса) и через пары точек $1-2, 8-9$.

3. Горизонтальная грань Λ пересекает поверхность конуса по *окружности*, проходящей через пару симметричных относительно Φ точек $3-4$.

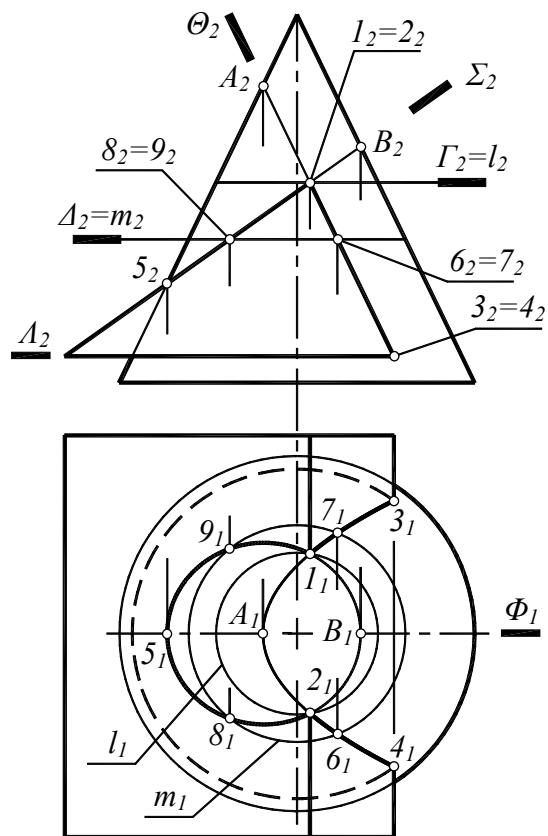


Рис. 8.3

Таким образом, линия пересечения конуса и призмы складывается из участка параболы, участка эллипса и участка окружности. Эллипс и парабола стыкуются в точках 1 и 2, парабола и окружность – в точках 3 и 4. В этих точках составная линия пересечения претерпевает излом.

Задача 2. Построить линию пересечения сферы и правильной трехгранной пирамиды (рис. 8.4).

Боковые грани правильной пирамиды равны и равно наклонены к горизонтальной плоскости проекций. В соответствии с условием задачи, боковые грани пирамиды пересекают сферу по одинаковым дугам окружностей. Следовательно, искомая линия пересечения представляет собой совокупность трех одинаковых дуг, пересекающихся между собой в точках на ребрах пирамиды.

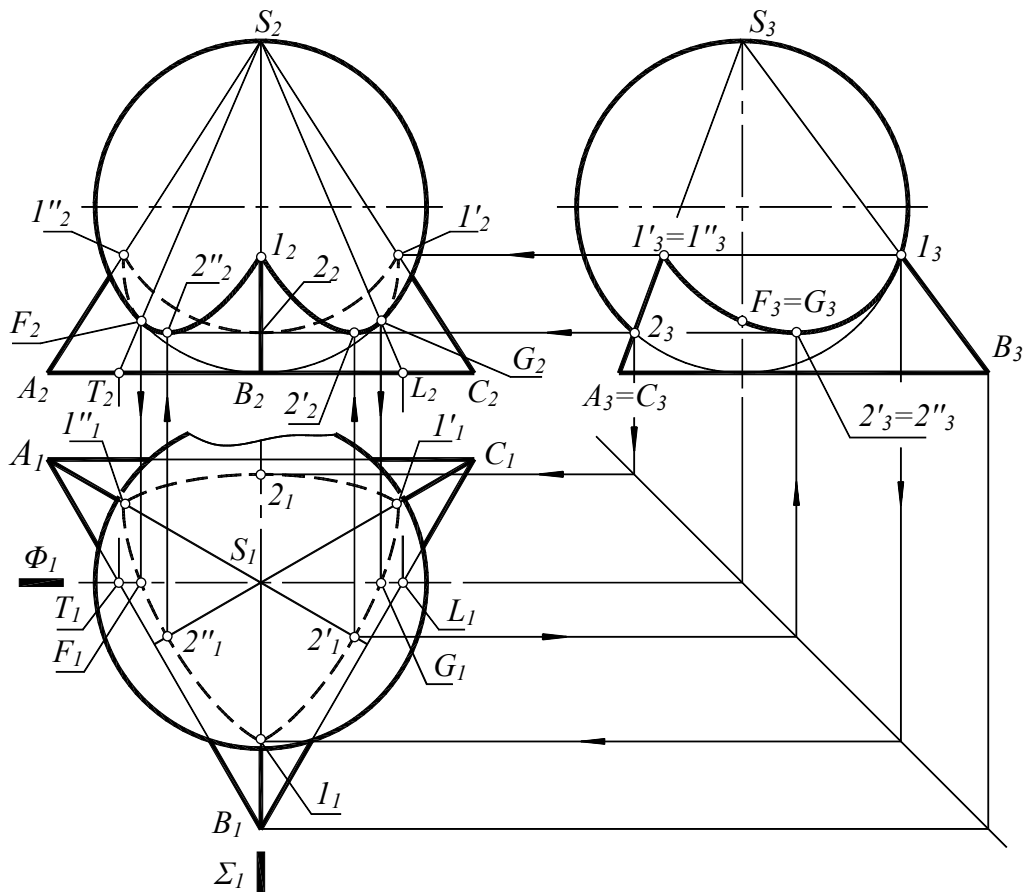


Рис. 8.4

Задача решается способом вспомогательных секущих плоскостей. Заметим, что заданные поверхности (сфера и пирамида) имеют общую плоскость симметрии Σ , параллельную плоскости проекций Π_3 . В плоскости Σ располагаются экстремальные (верхняя и нижняя) точки искомой линии пересечения. Мысленно “разрезая” данные поверхности плоскостью Σ , получаем на Π_3 линии разреза, которые совпадают с очерковыми линиями сферы и пирамиды. Эти линии пересекаются в точках 1 и 2 (самой верхней и самой нижней точках искомой линии пересечения).

В точке 1 ребро BS пирамиды пересекается с поверхностью сферы. Согласно условию задачи, боковые ребра пирамиды симметрично расположены относительно сферы. Поэтому можно сразу отметить точки пересечения ребра CS (точка $1'$) и ребра AS (точка $1''$) со сферой. Точки 1, $1'$ и $1''$ расположены на одной высоте. Это самые верхние точки составной линии пересечения данных фигур.

Точка 2 расположена на оси симметрии грани ACS . Все три боковые грани пирамиды симметричны относительно сферы, поэтому можно “перенести” точку 2 на ось симметрии грани BCS (точка $2'$) и ось симметрии грани ABS (точка $2''$). Точки 2, $2'$ и $2''$ расположены на одной высоте. Это нижние точки искомой линии пересечения.

В пересечении сферы с гранью ABS получаем дугу окружности $1-2''-1''$, в пересечении с гранью ACS – дугу $1'-2-1'$, в пересечении с гранью BCS – дугу $1-2'-1'$. Дуги окружностей на чертеже изображаются участками эллипсов.

Исследуем видимость линии пересечения.

1. На горизонтальной плоскости проекций вся линия полностью невидима, так как закрыта от наблюдателя верхней половиной сферы.

2. На профильной плоскости видимая проекция участка $1-2''-1''$ совпадает с невидимой проекцией участка $1-2'-1'$. Грань ACS – профильно-проецирующая, поэтому профильная проекция участка $1''-2-1''$ совпадает с профильной проекцией грани ACS .

3. Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций используем плоскость смены видимости Φ , пересекающую сферу по окружности, а пирамиду по треугольнику TSL . Эти линии (окружность и треугольник) пересекаются в точках смены видимости G и F . Точки G и F являются очерковыми, так как находятся на фронтальном очерке сферы.

После построения опорных точек (экстремальных, очерковых, точек смены видимости) приступают к построению промежуточных точек искомой линии пересечения поверхностей. Между экстремальными точками 1 и 2 проводят вспомогательную горизонтальную плоскость уровня, которая пересекает пирамиду по треугольнику, а сферу по окружности. Точки пересечения этих линий – дополнительные точки искомой линии пересечения данных поверхностей. На рис. 8.4 это построение не показано.

8.3. Взаимное пересечение кривых поверхностей

В общем случае линия пересечения двух кривых поверхностей – пространственная кривая линия. В частных случаях эта линия может распадаться на несколько замкнутых плоских или пространственных кривых.

При пересечении двух произвольных поверхностей возможны два случая: врезка и проникание. При врезке линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную кривую. При проникании эта линия распадается на две замкнутые пространственные кривые. Например, на рис. 8.5 показана взаимная врезка сферы и конуса, а на рис. 8.6 – проникание конуса сквозь сферу. В первом случае линия пересечения – замкнутая кривая, во втором – линия пересечения распалась на две замкнутые пространственные кривые линии (линию “входа” и линию “выхода”).

Если в пересечении участвуют алгебраические поверхности, то линия их пересечения – алгебраическая кривая. Порядок этой линии равен произведению порядков поверхностей. В частности, показанные на рис. 8.5 и рис. 8.6 конус и сфера – алгебраические поверхности второго порядка. Линия пересечения поверхностей второго порядка – алгебраическая кривая четвертого порядка. Конус и сфера пересекаются по кривой линии, которая описывается алгебраическим уравнением четвертого порядка.

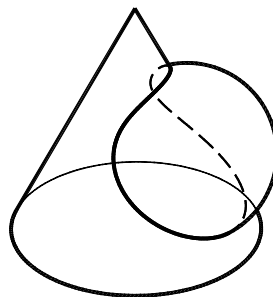


Рис. 8.5

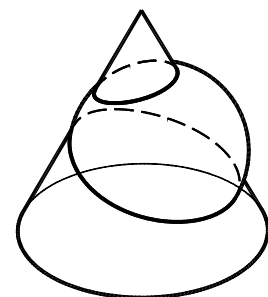


Рис. 8.6

В случае врезки эта линия представляет собой замкнутую пространственную кривую (см. рис. 8.5), а в случае проникания получается кривая четвертого порядка, состоящая из двух не связанных между собой участков (см. рис. 8.6).

Задача 1. Построить линию пересечения прямого кругового конуса и сферы.

Построение линии пересечения следует начинать с поиска опорных точек (экстремальных, очерковых и точек смены видимости).

Для определения экстремальных точек вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии данных фигур (рис. 8.7). Общая плоскость симметрии Σ пересекает конус по треугольнику, а сферу – по окружности. Фронтальные проекции этих линий называют фронтальными очерковыми линиями данных фигур.

Фронтальные очерковые линии конуса и сферы пересекаются в точках A и B (см. рис. 8.7). Точки A и B – экстремальные (верхняя и нижняя) относительно горизонтальной плоскости проекций. Таким образом, использование общей плоскости симметрии Σ позволяет определить экстремальные точки искомой линии пересечения.

Наиболее удаленные от Π_3 точки 1 и 2 являются экстремальными точками относительно профильной плоскости проекций. Построение этих точек выполняется с помощью вписанной в конус вспомогательной сферы Ω радиусом OT , центр O которой находится в точке пересечения осей сферы и конуса (см. также лекцию 9, рис. 9.9).

Для дальнейших рассуждений целесообразно уподобить сферу земному шару. Верхнюю точку сферы будем считать “северным полюсом”, нижнюю точку – “южным полюсом”. Между полюсами расположен “экватор” (большой круг на сфере, лежащий в плоскости, отмеченной на рис. 8.7 буквой Φ).

Плоскость Φ является *плоскостью смены видимости* для горизонтальной проекции данных фигур. Действительно, точки на сфере, лежащие выше “экваториальной плоскости” Φ , при взгляде сверху будут видимыми. Точки на сфере, расположенные ниже плоскости Φ – невидимы, так как заслонены от наблюдателя верхней половиной сферы.

Применение вспомогательной плоскости Φ позволяет определить *точки смены видимости* 3 и 4 на горизонтальной проекции данных поверхностей. Для определения точек 3 и 4 мысленно разрежем сферу и конус плоскостью Φ . Плоскость Φ пересекает сферу по “экватору” e , а конус – по окружности r . На пересечении горизонтальных проекций e_1 и r_1 отмечаем горизонтальные проекции 3_1 и 4_1 точек смены видимости.

Точки 3 и 4 являются одновременно как точками смены видимости, так и *очерковыми* точками, поскольку они находятся на горизонтальном очерке сферы. При переходе из верхнего (“северного”) полушария в нижнее (“южное”) полушарие, линия пересечения сферы и конуса на плоскости Π_1 становится невидимой. Видимость линии меняется в точках 3 и 4 , лежащих в плоскости смены видимости Φ .

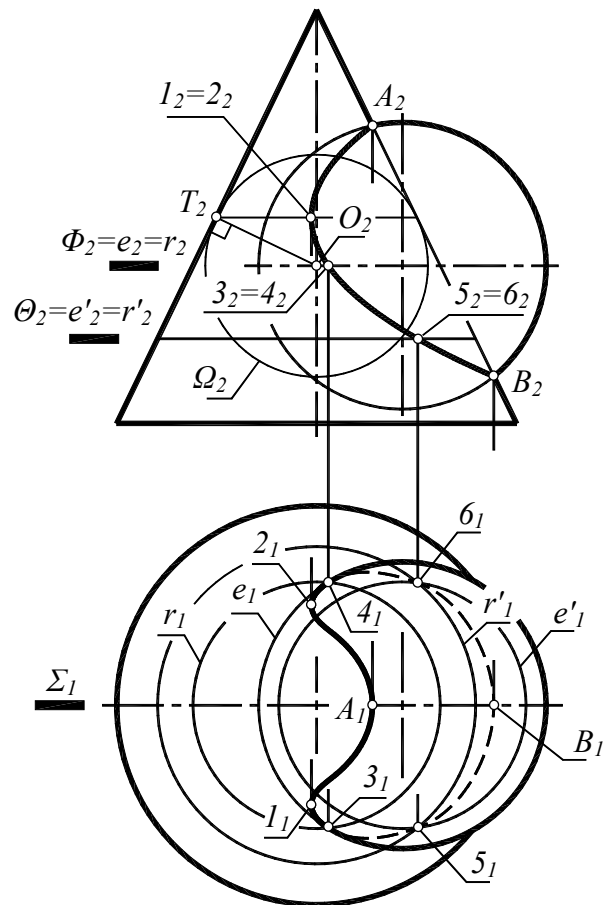


Рис. 8.7

Напомним, что экстремальные точки, очерковые точки и точки смены видимости называют *опорными* точками. После определения опорных точек линии пересечения приступают к построению ее *промежуточных* точек. На рис. 8.7 показана вспомогательная горизонтальная плоскость Θ , разрезающая сферу и конус по окружностям e' и r' . На пересечении этих линий отмечаем пару точек 5 и 6, симметрично расположенных относительно общей плоскости симметрии Σ .

Соединяя найденные точки плавной кривой, получаем искомую линию пересечения конуса и сферы. На горизонтальной плоскости проекций эта линия частично невидима, а на фронтальной проекции видимый участок линии пересечения совпадает с невидимым.

Полученная линия пересечения алгебраических поверхностей второго порядка (конуса и сферы) – алгебраическая кривая четвертого порядка. Эта кривая симметрична относительно фронтальной плоскости уровня Σ , поэтому ее фронтальная проекция вырождается в кривую второго порядка. В рассматриваемом примере фронтальная проекция линии пересечения вырождается в параболу с вершиной в точке $l_2=2_2$ и горизонтальной осью.

Задача 2. Построить линию пересечения поверхностей открытого тора и кругового цилиндра (рис. 8.8).

Для определения опорных точек вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии Σ данных фигур. Фронтальные проекции линий пересечения тора и цилиндра плоскостью Σ совпадают с их фронтальными очерками, поэтому точки A, B, C пересечения очерковых линий принадлежат искомой линии пересечения. Точка B – экстремальная относительно горизонтальной плоскости проекций, точка A – наиболее удалена от профильной плоскости (экстремальная относительно P_3). Опорная точка D отмечается в плоскости Ω на пересечении линий основания тора и цилиндра.

Построение промежуточных точек упрощается тем, что одна из заданных поверхностей – проецирующая. В рассматриваемом примере цилиндрическая поверхность занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому на плоскости Π_1 проекция искомой линии пересечения совпадает с проекцией цилиндра.

Плоскость Θ , касающаяся цилиндра и перпендикулярная к оси тора, пересекает тор по параллели t . На этой параллели отмечаем опорную точку I (экстремальную относительно P_2).

Проводим произвольную вспомогательную секущую плоскость A , перпендикулярную оси вращения i тора. Эта плоскость пересекает тор по окружностям (параллелям) l и l' . Начертив фронтальные проекции параллелей l и l' , отмечаем на них промежуточные точки 2, 3, 4. Соединяя найденные опорные и промежуточные точки, получаем фронтальную проекцию искомой линии пересечения тора и цилиндра (ее горизонтальная

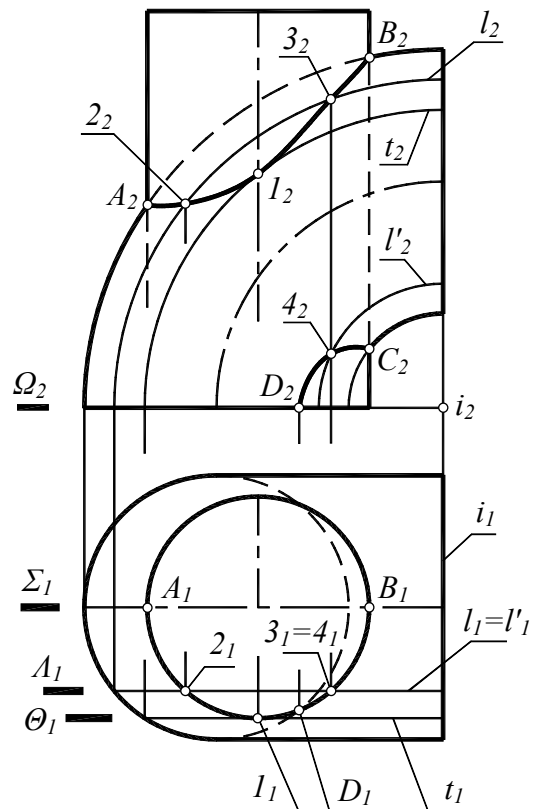


Рис. 8.8

проекция совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра). Линия пересечения тора и цилиндра симметрична относительно их общей плоскости симметрии Σ .

8.4. Пересечение произвольной поверхности с проецирующей поверхностью

Напомним, что плоскость, перпендикулярная к какой-либо плоскости проекций, называется *проецирующей плоскостью* (см. п. 2.3.3.1). Это определение распространяется на цилиндрические и призматические поверхности.

Определение 1. Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны к какой-либо плоскости проекций, то такую поверхность называют *проецирующей цилиндрической поверхностью*.

Определение 2. Если ребра призматической поверхности перпендикулярны к какой-либо плоскости проекций, то такую поверхность называют *проецирующей призматической поверхностью*.

Очевидно, занимать проецирующее положение могут, кроме плоскости, только цилиндрические и призматические поверхности.

Задача на построение линии пересечения поверхностей решается наиболее просто, если одна из данных поверхностей – проецирующая. В этом случае проекция искомой линии пересечения на одну из плоскостей проекций уже известна (непосредственно из чертежа заданных поверхностей). Построение недостающей проекции линии пересечения выполняется “по точкам” и сводится к многократному решению задачи на принадлежность точки к той поверхности, которая не является проецирующей (см. п. 6.2).

Пример 1. На рис. 8.2 треугольная призма занимает горизонтально-проецирующее положение. Горизонтальная проекция линии пересечения принадлежит горизонтальной проекции призматической поверхности, поэтому для построения линии пересечения призмы с пирамидой потребовалось всего лишь найти недостающие фронтальные проекции характерных (опорных) точек искомой линии пересечения (из условия их принадлежности к поверхности пирамиды).

Пример 2. На рис. 8.3 треугольная призма занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому фронтальная проекция линии пересечения призмы и конуса принадлежит фронтальной проекции призматической поверхности. Горизонтальные проекции точек искомой линии пересечения определяются на чертеже по их принадлежности к поверхности конуса.

Пример 3. На рис. 8.8 цилиндрическая поверхность занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому горизонтальная проекция искомой линии пересечения поверхностей тора и проецирующего цилиндра совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра. Построение недостающей фронтальной проекции линии пересечения тора и цилиндра выполняется “по точкам” и сводится к многократному решению задачи на принадлежность точки к поверхности тора (см. п. 6.2.5.3).

Вопросы для повторения

1. Какую геометрическую задачу называют второй позиционной задачей?
 2. В чем состоит сущность способа вспомогательных секущих плоскостей?
 3. Каков критерий выбора вспомогательной секущей плоскости?
 5. Как определяется порядок линии пересечения двух алгебраических поверхностей? Может ли пространственная алгебраическая кривая восьмого порядка изображаться на одной из плоскостей проекций окружностью? Дать пример.
- У К А З А Н И Е. Тор – алгебраическая поверхность четвертого порядка.

Лекция 9

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ (СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР)

В начертательной геометрии точки, принадлежащие линии пересечения двух поверхностей, находят с помощью *способа вспомогательных секущих поверхностей*. На выбор секущей поверхности накладывается требование: проекции линии пересечения вспомогательной поверхности с заданными поверхностями должны быть графически простыми линиями – прямыми или окружностями.

Чаще всего в качестве вспомогательной секущей поверхности используют *плоскость*. Но в некоторых случаях в качестве вспомогательной секущей поверхности может быть использована *сфера*.

Применение сфер основано на следующем свойстве поверхностей вращения: *соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям* (соосными называют поверхности вращения, имеющие общую ось). Например, соосные конус вращения и круговой цилиндр пересекаются по окружности (рис. 9.1).

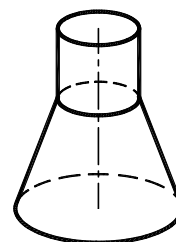


Рис. 9.1

В частности, всякая сфера, центр которой находится на оси какой-нибудь поверхности вращения, пересекается с этой поверхностью по одной или нескольким окружностям.

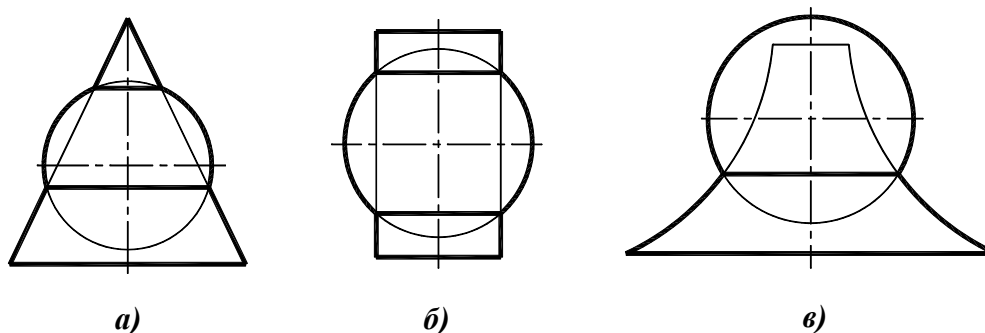


Рис. 9.2

Примеры. Соосные сфера и конус вращения (рис. 9.2, а) пересекаются по двум окружностям разного диаметра. Цилиндр вращения и сфера с центром на оси цилиндра (рис. 9.2, б) пересекаются по двум одинаковым окружностям. Поверхность вращения и сфера (рис. 9.2, в), пересекаются по окружности.

Различают способ вспомогательных *концентрических* сфер и способ вспомогательных *эксцентрических* сфер. Концентрическими называют сферы с общим центром. Если центры сфер не совпадают, то такие сферы называют эксцентрическими.

9.1. Способ концентрических сфер

Способ концентрических сфер применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций. Точка пересечения осей – общий центр всех вспомогательных сфер.

Рассмотрим сущность способа концентрических сфер на примере построения линии пересечения кругового конуса и цилиндра вращения (рис. 9.3, а). Пересекающиеся

оси поверхностей лежат в их общей плоскости симметрии, параллельной фронтальной плоскости проекций.

Проведем сферу произвольного радиуса R с центром O в точке пересечения осей конуса и цилиндра. Эта сфера пересечет конус по окружности k , а цилиндр – по окружностям m, l . На фронтальной плоскости проекций эти окружности изображаются отрезками k_2, m_2 и l_2 (см. рис. 9.3, а).

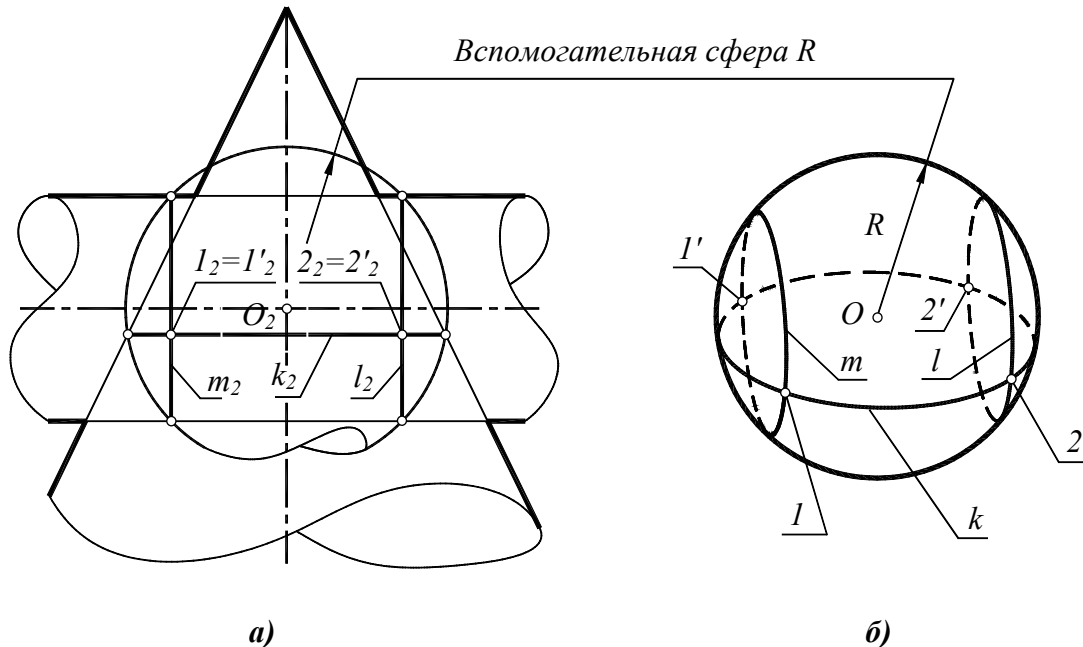


Рис. 9.3

Окружности m, l пересекаются с окружностью k , так как находятся на одной и той же сфере R (рис. 9.3, б). Точки пересечения $1, 1'$ и $2, 2'$ этих окружностей принадлежат линии пересечения заданных поверхностей.

Запишем схему решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих сфер.

1. Проводим вспомогательную сферу R , пересекающую заданные поверхности вращения (см. рис. 9.3, а).

2. Находим линии пересечения заданных поверхностей и вспомогательной сферы R (окружности k, m, l на рис. 9.3, а, б).

3. Отмечаем общие точки $1, 1'$ и $2, 2'$ окружностей k, m, l . Эти точки принадлежат как поверхности конуса, так и поверхности цилиндра, следовательно, находятся на линии пересечения этих поверхностей.

Многочисленное повторение рассмотренной схемы с использованием вспомогательных концентрических сфер разного радиуса позволяет определить достаточное количество точек, через которые проходит искомая линия пересечения поверхностей.

Вспомогательная сфера должна пересекать обе заданные поверхности, поэтому нет смысла использовать сферу, которая не пересекает какую-либо из данных поверхностей. На рис. 9.4 показана сфера R_{min} , вписанная в конус. Сфера с радиусом меньше, чем R_{min} , не пересечется с конусом. Сфера R_{min} – вспомогательная сфера минимального радиуса.

Правило. Минимальный радиус R_{min} вспомогательной сферы определяется как радиус наибольшей из сфер, вписанных в заданные поверхности.

В рассматриваемом примере минимальная сфера касается конуса по окружности t и пересекается с цилиндром по окружностям a, b (на рис. 9.4 эти окружности изобража-

ются отрезками t_2, a_2, b_2). Окружности t, a, b пересекаются в четырех точках K, K', L, L' , лежащих на линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра.

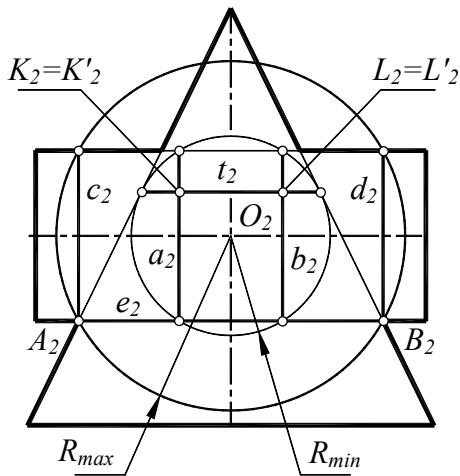


Рис. 9.4

Линия пересечения поверхностей конуса и цилиндра показана на рис. 9.5. Очерковые точки A, B, C, D найдены с помощью общей плоскости симметрии Σ , рассекающей конус и цилиндр по фронтальным очерковым линиям; очерковые линии пересекаются между собой в точках A, B, C, D .

Точки K, K', L, L' определены с помощью “минимальной” сферы R_{min} (см. рис. 9.4). Промежуточные точки $1, 1'$ и $2, 2'$ найдены с помощью вспомогательной секущей сферы R с центром в точке пересечения осей и радиусом $R_{min} \leq R \leq R_{max}$ (см. рис. 9.3). Горизонтальные проекции этих точек построены с помощью линий связи из условия их принадлежности к поверхности вспомогательной сферы R или к одной из данных поверхностей.

Видимость горизонтальной проекции искомой линии пересечения меняется в точках M, M', N, N' , лежащих в плоскости смены видимости Φ . Плоскость Φ пересекает конус по окружности r , а цилиндр по горизонтальному очерку. На пересечении горизонтальной проекции r_1 и горизонтального очерка цилиндра отмечены горизонтальные проекции M_1, M'_1, N_1, N'_1 точек смены видимости M, M', N, N' . Фронтальные проекции этих точек принадлежат вырожденной фронтальной проекции плоскости Φ (см. рис. 9.5).

Кроме “минимальной” вспомогательной сферы, существует и “максимальная” вспомогательная сфера. На рис. 9.4 показана сфера с радиусом R_{max} , пересекающая конус по окружности e , а цилиндр – по окружностям c и d (отрезки e_2, c_2, d_2 на рис. 9.4). Эти окружности имеют две общие точки A и B . Сфера с радиусом больше, чем R_{max} , “разрезает” заданные поверхности по окружностям, вообще не пересекающимся между собой. Сфера R_{max} – вспомогательная сфера максимального радиуса.

Правило. Максимальный радиус R_{max} вспомогательной сферы определяется как расстояние от проекции центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерковых линий.

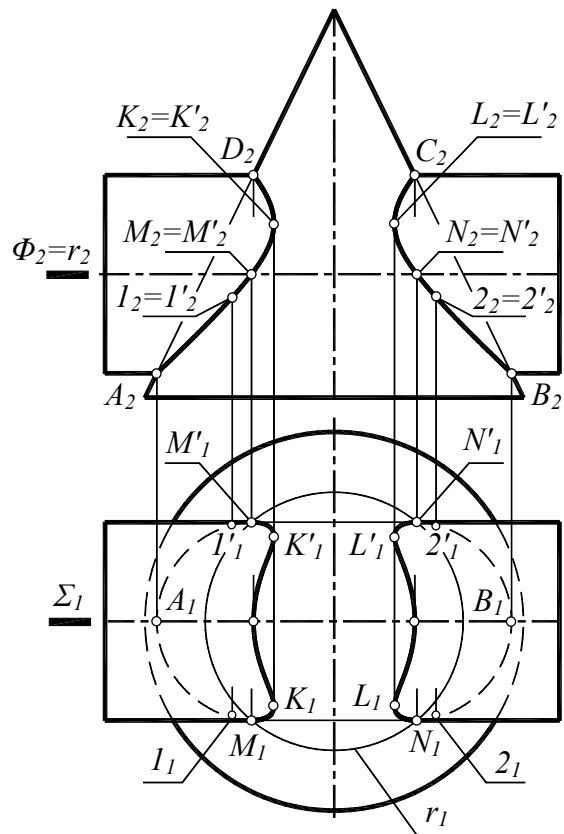


Рис. 9.5

9.2. Способ эксцентрических сфер

В некоторых случаях для построения линии пересечения поверхностей может быть использован способ эксцентрических сфер, то есть вспомогательных секущих сфер, имеющих различные центры.

Способ эксцентрических сфер применяют для построения линии пересечения поверхностей, имеющих круговые сечения, со скрещивающимися или пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций.

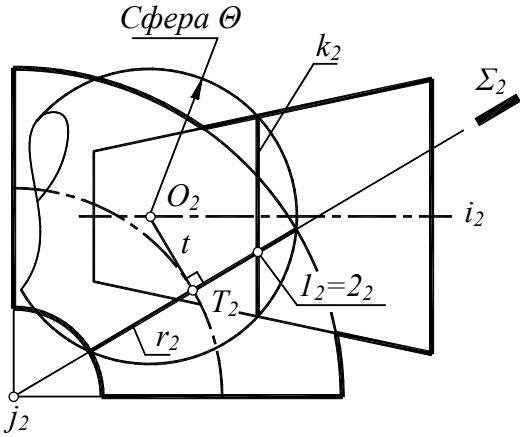


Рис. 9.6

Ее центр должен находиться на оси конуса. Проведем через ось j тора произвольную плоскость Σ , которая пересечет тор по окружности r . Из центра T окружности r проведем перпендикуляр t к плоскости Σ до пересечения в точке O с осью i конуса. Введем в рассмотрение вспомогательную сферу Θ с центром в точке O . Радиус этой сферы выбирается таким образом, чтобы она прошла через окружность r на поверхности тора.

Вспомогательная сфера Θ пересекается с тором по окружности r , а с конусом – по окружности k . На пересечении проекций r_2 и k_2 этих окружностей отмечаем точки $I_2=2_2$. Точки 1 и 2 находятся как на торе, так и на конусе, следовательно, они принадлежат линии их пересечения (см. рис. 9.6).

Чтобы найти дополнительные точки этой линии, надо подобрать другую сферу, также пересекающую данные поверхности по окружностям. Для этого проведем через ось j тора вместо плоскости Σ другую плоскость Σ' , пересекающую тор по окружности r' . Начертим сферу Θ' с центром O' на оси конуса, проходящую через окружность r' . На рис. 9.7 показаны соответствующие построения: проведена плоскость Σ' и из центра T' кругового сечения r'

Сущность способа состоит в том, что выбирается сфера, пересекающая данные поверхности по окружностям. Эти окружности пересекаются между собой в точках, лежащих на искомой линии пересечения поверхностей.

Пусть дан усеченный круговой конус с горизонтальной осью i и четверть открытого тора с горизонтальной осью j (рис. 9.6). Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси i, j поверхностей не пересекаются (скрещиваются).

Займемся поиском вспомогательной сферы, которая пересекает конус и тор по окружностям.

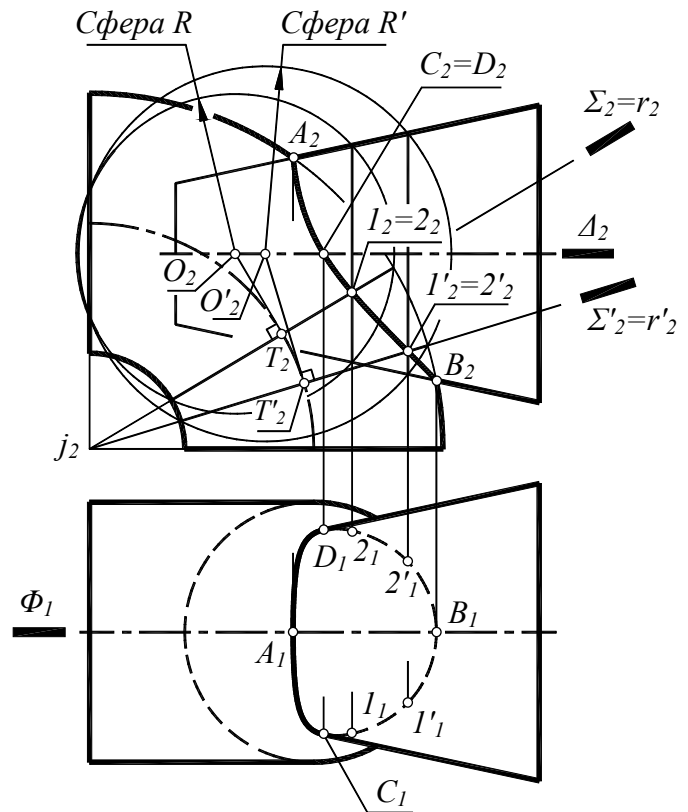


Рис. 9.7

тора построен перпендикуляр к плоскости Σ' , пересекающий ось конуса в точке O' . Новая вспомогательная сфера Θ' пересекает тор и конус по окружностям, которые пересекаются между собой в точках I' и $2'$, принадлежащих искомой линии пересечения. Горизонтальные проекции точек $I-2$, $I'-2'$ определяются из условия их принадлежности к заданным поверхностям (тору или конусу) или к поверхностям вспомогательных секущих сфер R, R' .

При решении задачи использованы не только вспомогательные сферы, но и вспомогательные секущие плоскости Φ (Φ – общая плоскость симметрии данных поверхностей) и Δ (Δ – плоскость смены видимости на Π_1). Плоскость Φ “разрезает” тор и конус по фронтальным очерковым линиям, которые пересекаются между собой в точках A и B (см. рис. 9.7). Горизонтальные проекции этих точек принадлежат вырожденной горизонтальной проекции плоскости Φ . В плоскости Δ находятся точки смены видимости C, D горизонтальной проекции искомой линии пересечения тора и конуса (эти точки определяются приближенно).

9.3. Примеры применения способа сфер

Задача 1. Построить линию пересечения круговых конусов с общей фронтальной плоскостью симметрии (рис. 9.8).

Даны поверхности вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии Φ , параллельной плоскости Π_2 . Следовательно, в соответствии с п. 9.1, для решения задачи может быть использован способ вспомогательных концентрических сфер. Общая плоскость симметрии Φ разрезает конусы по фронтальным очерковым линиям, которые пересекаются между собой в точках A, B, C, D . Это экстремальные относительно Π_1 точки искомой линии пересечения.

Плоскость Θ – плоскость смены видимости на горизонтальной проекции. При взгляде сверху точки, лежащие выше плоскости Θ , видимы. Точки, расположенные ниже плоскости Θ – невидимы (закрываются от наблюдателя верхней частью горизонтального конуса). В плоскости Θ располагаются точки смены видимости $I-I'$ и $J-J'$.

Промежуточные точки искомой линии пересечения определяются с помощью вспомогательных концентрических сфер с

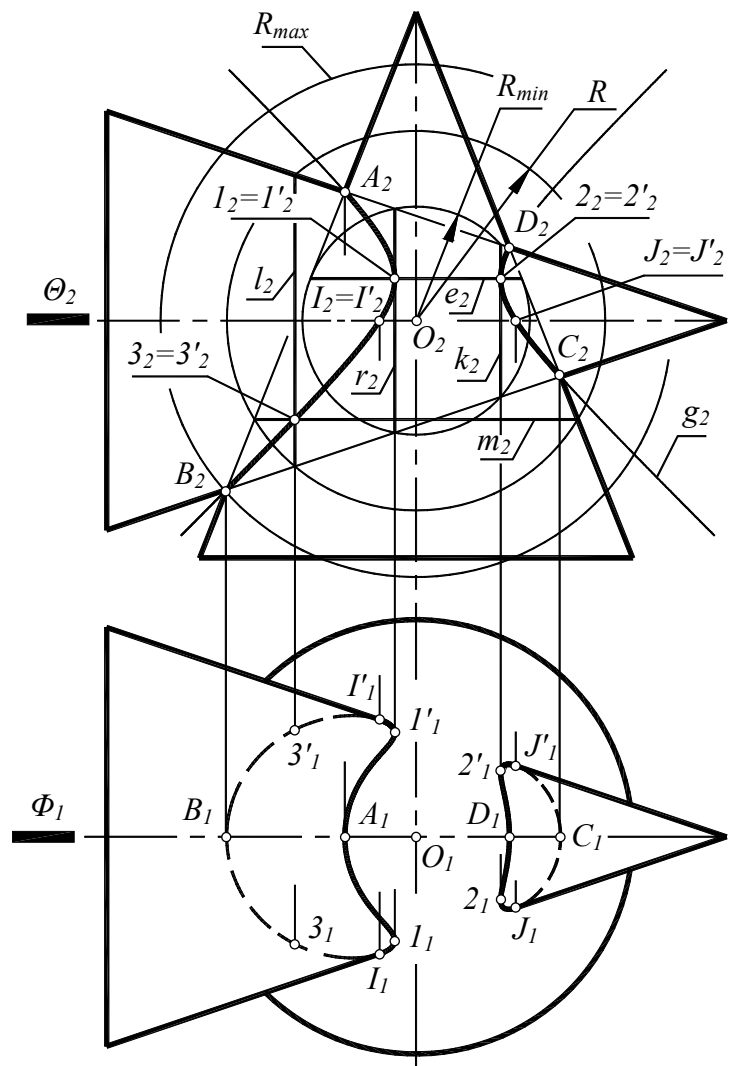


Рис. 9.8

центром в точке O пересечения осей конусов. Минимальная сфера R_{min} , вписанная в вертикальный конус, касается его по окружности e , пересекая при этом горизонтальный конус по окружностям r, k . Фронтальные проекции этих окружностей изображаются отрезками e_2, r_2 и k_2 , которые пересекаются между собой в точках $1_2=1'_2$ и $2_2=2'_2$.

На рис. 9.8, кроме минимальной сферы, показана вспомогательная сфера R произвольного радиуса ($R_{max} \geq R \geq R_{min}$), пересекающаяся с данными конусами по окружностям l и m . На пересечении фронтальных проекций l_2, m_2 этих окружностей отмечены фронтальные проекции точек $3_2=3'_2$ искомой линии пересечения. Горизонтальные проекции найденных точек определяются по принадлежности их либо поверхности вертикального конуса, либо поверхности вспомогательной сферы.

В рассматриваемом примере реализован случай *проницания* (см. лекцию 8). Линия пересечения конусов представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка, распавшуюся на две замкнутые пространственные кривые (линию “входа” и линию “выхода”). Обе поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии, поэтому на фронтальной плоскости кривая четвертого порядка изображается кривой второго порядка, в данном случае – гиперболой g_2 . Горизонтальная ось гиперболы проходит через вершины гиперболы – точки $1_2=1'_2$ и $2_2=2'_2$, найденные с помощью минимальной сферы R_{min} .

Задача 2. Построить линию пересечения вертикального кругового и наклонного эллиптического конусов с общей фронтальной плоскостью симметрии. Эллиптический конус имеет круговое основание R_0 (рис. 9.9).

Одна из поверхностей (эллиптический конус) не является поверхностью вращения, поэтому способ концентрических сфер неприменим. Поверхности имеют круговые сечения, пересекающиеся оси и общую плоскость симметрии, параллельную Π_2 . Следовательно, для решения задачи может быть использован способ эксцентрических сфер (см. п. 9.2). В соответствии с этим способом, для построения общей точки двух поверхностей надо подобрать сферу, которая пересекает обе заданные поверхности по окружностям.

Чтобы найти такую сферу, проведем плоскость Θ , параллельную плоскости основания Σ эллиптического конуса. Плоскость Θ пересекает эллиптический конус по окружности t с центром T (см. рис. 9.9). Перпендикуляр, восставленный к плоскости Θ из точки T , пересекает ось вертикального конуса в точке O . Проведем сферу R с центром в точке O , проходящую через окружность t . Эта сфера пересекается с круговым вертикальным конусом по окружности m , а с эллиптическим конусом – по окружности t . Окружности t и m пересекаются в точках 1 и 2 , принадлежащих искомой линии пересечения.

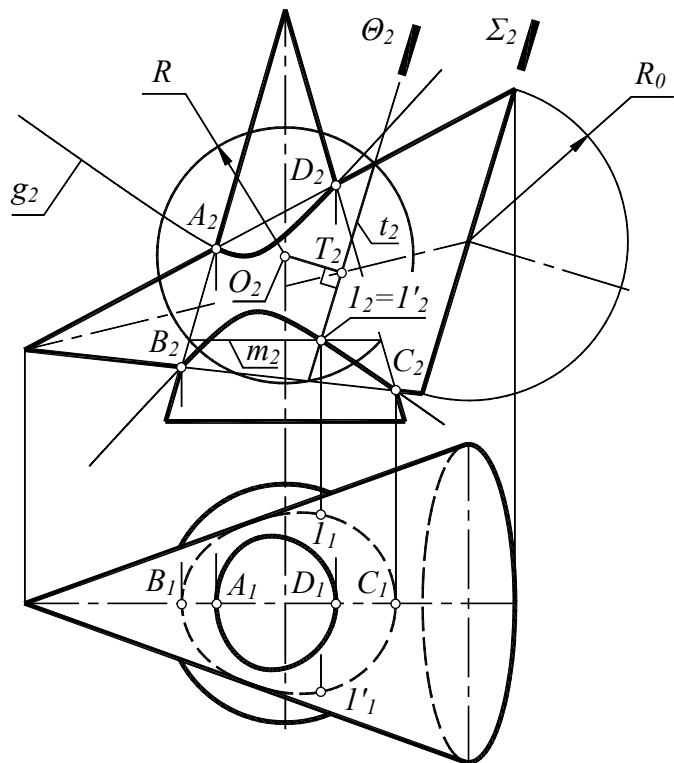


Рис. 9.9

Чтобы найти дополнительные точки линии пересечения данных конусов, надо повторить вышеописанные действия: отметить какое-либо круговое сечение t' эллиптического конуса и подобрать новую секущую сферу с центром на оси кругового конуса, проходящую через окружность t' . С помощью этой сферы будет определена еще одна пара точек, принадлежащих искомой линии пересечения.

Поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии, поэтому на пересечении фронтальных очерковых линий отмечены точки A, B, C, D , принадлежащие искомой линии пересечения поверхностей. Линия пересечения – алгебраическая кривая четвертого порядка, распавшаяся на две замкнутые пространственные кривые (случай “проницания”). Фронтальная проекция этой линии – гипербола g_2 (см. рис. 9.9).

Задача 3. Построить линию пересечения кругового конуса и сферы (рис. 9.10).

Линия пересечения сферы и конуса может быть определена с помощью вспомогательных секущих плоскостей (см. лекцию 8, рис. 8.7), но этим способом не удастся найти экстремальные относительно Π_3 точки 1 и 2. Для построения этих точек используется вспомогательная сфера. Отметим точку O пересечения осей конуса и сферы Ω и проведем минимальную вспомогательную сферу R_{min} с центром в точке O , касающуюся конуса по окружности k и разрезающую данную сферу Ω по окружности r (см. рис. 9.10). Окружности k и r пересекаются в точках 1 и 2, фронтальные проекции которых совпадают. Точки 1, 2 наиболее удалены от плоскости Π_3 , то есть являются экстремальными. Действительно, любая вспомогательная сфера с центром в точке O и радиусом больше R_{min} , пересекает сферу Ω по окружности, расположенной ближе к Π_3 , чем окружность r .

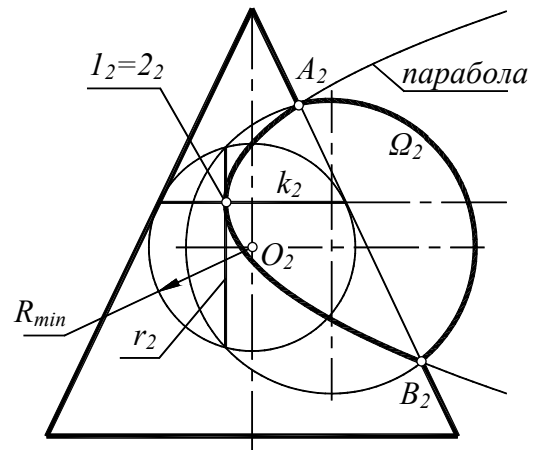


Рис. 9.10

Вопросы для повторения

1. Какие условия накладывают на выбор вспомогательной секущей поверхности?
2. По какой линии пересекаются соосные поверхности вращения?
3. Назвать условия применения способа концентрических сфер.
4. В каком диапазоне следует выбирать радиус вспомогательной секущей сферы при применении способа концентрических сфер?
5. Назвать условия применения способа эксцентрических сфер. Только ли для поверхностей вращения может быть использован этот способ?

Лекция 10

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек, координаты x, y, z которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второго порядка в декартовой системе координат:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + I = 0.$$

Девять коэффициентов A, B, C, \dots, K определяют единственную поверхность второго порядка. В зависимости от конкретных числовых значений этих коэффициентов получаются пять типов поверхностей второго порядка: *эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид.*

Особенно важное практическое значение имеют частные случаи поверхностей второго порядка: *сферические, цилиндрические и конические поверхности* как частные случаи эллипсоида и однополостного гиперболоида.

Коническая поверхность второго порядка геометрически образуется движением прямолинейной образующей, проходящей через неподвижную точку S и пересекающей направляющую t , где t – кривая второго порядка. Если точка S удалена в бесконечность, то получаем *цилиндрическую поверхность второго порядка* (см. лекцию 6).

Таким образом, поверхности второго порядка – это эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды и их частные случаи (сферические, цилиндрические и конические поверхности второго порядка). Этим списком полностью исчерпывается класс невырожденных поверхностей второго порядка. Никакая другая поверхность не может быть названа поверхностью второго порядка (если исключить из рассмотрения мнимые поверхности и случаи вырождения поверхности второго порядка в пару плоскостей).

Поверхности второго порядка – самые простые поверхности из всех возможных (за исключением плоскости). Этим объясняется их значение при решении разнообразных научных и технических задач.

10.1. Взаимное пересечение поверхностей второго порядка.

Особые случаи пересечения

Поскольку поверхности второго порядка являются алгебраическими, то и линия их пересечения есть алгебраическая кривая (в общем случае – пространственная). Так как порядок линии пересечения равен произведению порядков поверхностей, то эта линия – всегда кривая четвертого порядка. В отличие от других алгебраических кривых четвертого порядка, ее называют *биквадратной кривой*.

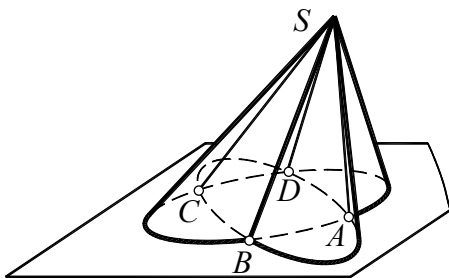


Рис. 10.1

Эта кривая может распадаться на несколько алгебраических линий более низких порядков: на четыре прямые ($4=1+1+1+1$), на две кривые второго порядка ($4=2+2$), на кривую второго порядка и две прямые ($4=2+1+1$), на кривую третьего порядка и прямую ($4=3+1$). Например, два эллиптических конуса с общей вершиной S пересекаются по четырем прямым SA, SB, SC, SD (рис. 10.1).

В прикладных геометрических задачах чаще всего встречается случай распада биквадратной кривой на две кривые второго порядка. Условия, при которых возможно такое распадение, формулируются в виде трех теорем: теоремы о пересечении поверх-

ностей второго порядка по плоской кривой, теоремы о двойном прикосновении, теоремы Монжа.

10.2. Теорема 1 (о пересечении двух поверхностей второго порядка по плоской кривой)

Зададим кривую второго порядка k и проведем через нее две какие-либо поверхности второго порядка. Пусть, например, линия k – окружность, через которую, как через направляющую, проходят коническая и цилиндрическая поверхности (рис. 10.2). Цилиндр и конус имеют общее круговое основание k , то есть данные поверхности заведомо пересекаются между собой по кривой второго порядка k .

Две поверхности второго порядка пересекаются по кривой четвертого порядка. Окружность k – только часть этой кривой. Следовательно, есть еще один участок искомой линии пересечения (не показанный на рис. 10.2), который также должен быть кривой второго порядка. Этот вывод кратко формулируют в виде теоремы.

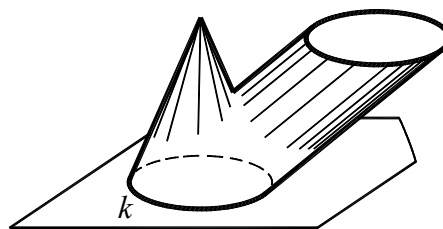


Рис. 10.2

Теорема 1. Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой.

Любая плоская кривая на поверхности второго порядка – обязательно кривая второго порядка, поэтому можно теорему 1 сформулировать следующим образом: если две поверхности второго порядка пересекаются по кривой второго порядка, то они пересекаются и еще по одной кривой второго порядка.

Справедливость теоремы непосредственно вытекает из того, что сумма порядков линий, на которые распадается алгебраическая кривая, равна порядку самой линии. В данном случае имеем кривую четвертого порядка, причем одна часть ее (линия k) – кривая второго порядка. Следовательно, и вторая часть должна быть кривой второго порядка.

Приведем примеры, иллюстрирующие теорему 1.

Задача 1. Построить линию пересечения поверхностей конуса и цилиндра с общим круговым основанием k (рис. 10.3).

Согласно условию, данные поверхности пересекаются по кривой k , лежащей в плоскости основания Σ . Значит, в соответствии с теоремой 1, имеется еще одна часть e линии пересечения, которая должна быть кривой второго порядка. Чтобы построить недостающий участок линии пересечения, мысленно рассечем конус и цилиндр общей плоскостью симметрии Φ . В сечении получают фронтальные очерки данных поверхностей.

Продолжив фронтальные очерковые линии, отмечаем точки A, B их пересечения. Через точки A, B должен проходить недостающий участок e искомой линии пересечения. Общая плоскость симметрии Φ параллельна плоскости проекций Π_2 , поэтому кривая второго порядка e изобразится на Π_2 прямолинейным отрезком A_2B_2 . Плоскость Θ кривой e пересекает все образующие конуса, значит, линия e – эллипс.

Таким образом, в рассмотренном примере линия пересечения поверхностей цилиндра и конуса распалась на две кривые второго порядка: окружность k (лежащая в плоскости Σ) и эллипс e (лежащий в плоскости Θ). Эти кривые пересекаются между собой в точках C и D . По фронтальной проекции эллипса e нетрудно построить его горизонтальную проекцию $e_1 = A_1C_1B_1D_1$ (см. рис. 10.3).

Задача 2. Построить линию пересечения поверхностей полусферы и конуса с общим круговым основанием k (рис. 10.4).

Согласно условию, поверхности конуса и полусферы пересекаются по плоской кривой – окружности k . Следовательно, в соответствии с теоремой 1, данные поверхности пересекаются еще по одной плоской кривой e , которая также будет окружностью,

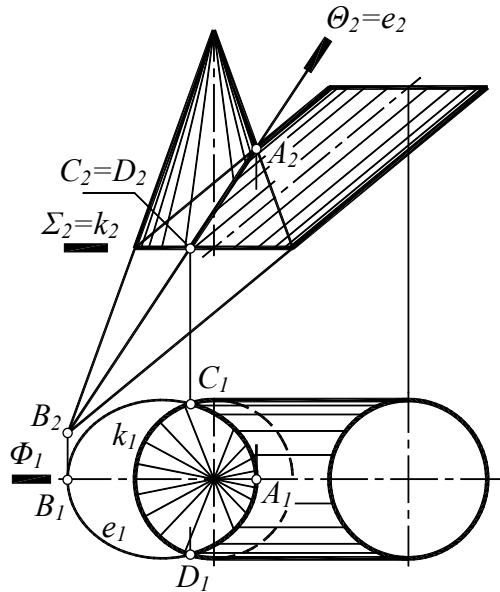


Рис. 10.3

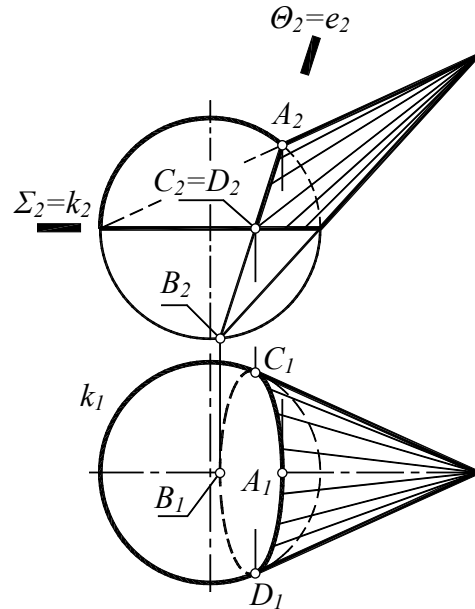


Рис. 10.4

так как любая плоская кривая на сфере – это окружность. Продлив фронтальные очерки данных фигур, отмечаем точки их пересечения A, B . Окружность e проходит через точки A, B и пересекается с основанием k в точках C, D (см. рис. 10.4).

В данном примере линия пересечения полусферы и конуса распалась на две окружности k и e , лежащие во фронтально-проецирующих плоскостях Σ и Θ . Фронтальная проекция окружности e – отрезок A_2B_2 , ее горизонтальная проекция – эллипс $A_1C_1B_1D_1$.

10.3. Теорема 2 (о двойном соприкосновении)

Определение. Две поверхности соприкасаются в некоторой точке A , если в этой точке у них есть общая касательная плоскость (строгое определение понятия “касательная плоскость” будет дано в лекции 11).

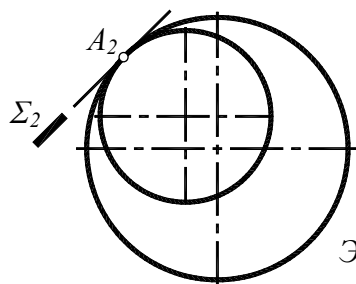


Рис. 10.5

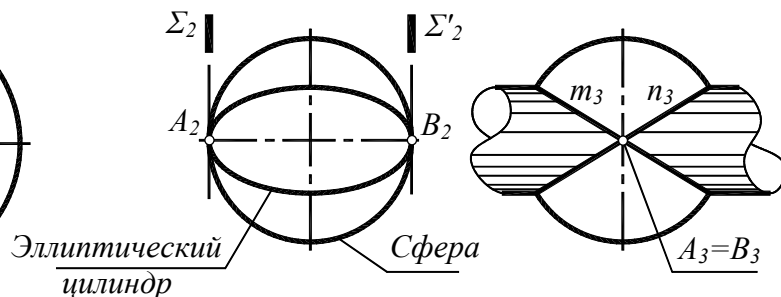


Рис. 10.6

Например, на рис. 10.5 показана фронтальная проекция двух сфер, которые соприкасаются друг с другом в точке A . В этой точке у них имеется общая касательная плоскость Σ .

Если поверхности имеют две точки соприкосновения, то такое соприкосновение называют “двойным”. На рис. 10.6 показан двухпроекционный чертеж (фронтальная и профильная проекции) сферы и эллиптического цилиндра. Эти поверхности находятся в двойном прикосновении, так как в точках A и B у них есть общие касательные плоскости Σ и Σ' .

По какой линии пересекаются поверхности второго порядка, находящиеся в двойном прикосновении? На этот вопрос отвечает теорема о двойном прикосновении (теорема 2).

Теорема 2. Если две поверхности второго порядка касаются в двух точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые (второго порядка), плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.

Приведенное ниже доказательство этой теоремы, содержащее некоторые сведения из проективной теории кривых второго порядка, не является обязательным для изучения в курсе начертательной геометрии.

Доказательство

Пусть поверхности второго порядка Σ и Δ касаются друг друга в точках A и B (рис. 10.7). Это означает, что в этих точках у них общие касательные плоскости Σ' и Δ' .

Поверхности Σ и Δ , не показанные на рис. 10.7, пересекаются по некоторой линии m . Про эту линию известно только то, что она должна проходить через точки A и B , так как это общие точки данных поверхностей.

Мысленно отметим на линии m произвольную точку M и также мысленно проведем секущую плоскость MAB . Эта плоскость “разрезает” заданные поверхности Σ и Δ по некоторым кривым второго порядка s и d , а касательные плоскости Σ' и Δ' – по прямым t_A и t_B .

Заметим, что в точке A прямая t_A является общей касательной к “линиям разреза” s и d . Действительно, линии s , d , t_A получены при пересечении соприкасающихся в точке A поверхностей Σ , Δ и Σ' плоскостью MAB , проходящей через точку A . При пересечении соприкасающихся поверхностей плоскостью, проходящей через точку касания, получают линии, касательные друг к другу. Поэтому в точке A прямая t_A касается как кривой s , так и кривой d . Аналогичным образом, в точке B прямая t_B является общей касательной к линиям s и d .

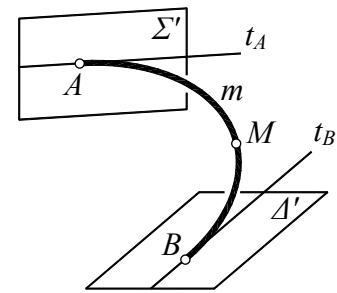


Рис. 10.7

Мы видим, что кривые второго порядка s и d имеют три общие точки A , B , M и две общие касательные в точках A и B . Но кривые второго порядка, имеющие пять общих элементов (три точки и две касательные), совпадают. Следовательно, плоскость MAB пересекает обе поверхности по одной и той же кривой второго порядка $s=d$. Эта кривая принадлежит данным поверхностям Σ и Δ , то есть является линией m их пересечения.

Таким образом, линия m пересечения поверхностей второго порядка, соприкасающихся в точках A и B – кривая второго порядка, проходящая через точки касания A и B .

В соответствии с теоремой 1, если две поверхности второго порядка пересекаются по кривой m второго порядка, то они пересекаются и еще по одной кривой n второго порядка. Покажем, что кривая n также проходит через точки A и B . Предположим, что n не проходит через A , B . Тогда кривые m и n пересекутся в каких-то других точках, в которых, как и в точках A , B , будет реализовано двойное соприкосновение поверхностей Σ и Δ . Но, согласно условию теоремы, данные поверхности касаются только в точках A и B . Поэтому предположение, что n не проходит через A , B , неверно. Следовательно, n проходит через точки A , B . Итак, линия пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих касание в двух точках, распадается на две плоские кривые m , n второго порядка, проходящие через точки касания. Теорема доказана.

Так, например, сфера и эллиптический цилиндр (см. рис. 10.6) соприкасаются в точках A и B . В этих точках сфера и цилиндр имеют общие касательные плоскости Σ и Σ' . В соответствии с теоремой о двойном прикосновении, линия их пересечения распадается на две плоские кривые (окружности m и n), плоскости которых проходят через прямую AB , соединяющую точки касания.

Рассмотрим пример применения теоремы о двойном прикосновении.

Задача. Построить плоскость, пересекающую поверхность эллиптического конуса по окружности.

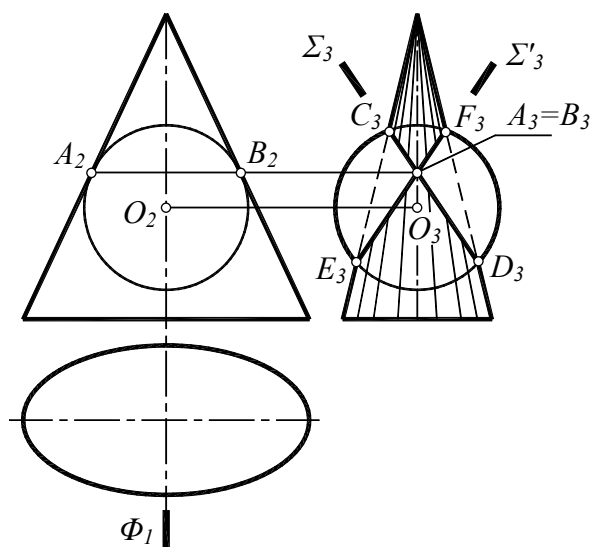


Рис. 10.8

Введем в рассмотрение вспомогательную сферу с центром в произвольной точке O на оси конуса и имеющую с ним касание в двух точках A и B (рис. 10.8). В этих точках сфера и конус имеют общие касательные плоскости. В соответствии с теоремой 2, через прямую AB пройдут плоскости Σ и Σ' кривых, по которым конус пересекается со сферой. Эти кривые – окружности, так как они лежат на поверхности сферы. Следовательно, плоскости Σ , Σ' пересекают поверхность конуса по окружностям.

В общей плоскости симметрии Φ (плоскость Φ параллельна Π_3) получаем профильные очерковые линии конуса и сферы, пересекающиеся между собой в точках C_3, D_3 и E_3, F_3 . Через точки C, D и E, F , а также через пару точек A, B проходит линия пересечения данных поверхностей, распавшаяся на две окружности. На плоскости Π_3 эти окружности изображаются отрезками C_3D_3 и E_3F_3 .

Таким образом, на поверхности эллиптического конуса имеются два семейства круговых сечений: любая плоскость, параллельная плоскостям Σ или Σ' , пересекает поверхность эллиптического конуса по окружности.

Одно из замечательных свойств поверхностей второго порядка состоит в том, что все эти поверхности, за исключением гиперболического параболоида, гиперболического и параболического цилиндров, имеют круговые сечения. Для построения круговых сечений какой-либо поверхности второго порядка может быть использована вспомогательная сфера, касающаяся этой поверхности в двух точках. На основании теоремы о двойном прикосновении, данная поверхность будет пересекаться с вспомогательной сферой по искомым круговым сечениям.

10.4. Теорема Монжа

Поверхности второго порядка могут соприкасаться между собой не только в отдельных точках, но и по плоской кривой (второго порядка). В этом случае говорят, что одна из поверхностей “вписана” (плотно вложена) в другую поверхность или одна из поверхностей “описана” (плотно облегает) другую поверхность.

Определение. Поверхность второго порядка вписана в другую поверхность второго порядка (или описана около нее), если эти поверхности касаются друг друга по плоской кривой.

Например, в круговой цилиндр радиусом R можно вложить сферу такого же радиуса R . Цилиндр и сфера будут соприкасаться по окружности. При этом говорят, что сфера *вписана* в цилиндр, а цилиндр *описан* около сферы.

Сфера может быть вписана не только в цилиндр, но и в круговой конус. В этом случае сфера и конус также соприкасаются по окружности.

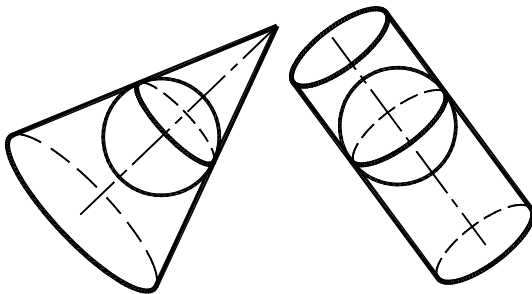


Рис. 10.9

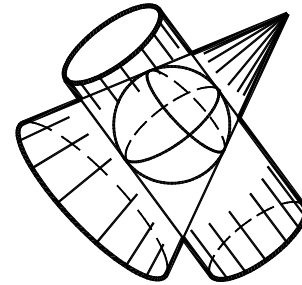


Рис. 10.10

На рис. 10.9 показаны две сферы. Одна из них вписана (плотно вложена) в круговой конус, другая сфера вписана (плотно вложена) в цилиндр вращения. И наоборот: конус и цилиндр, показанные на рис. 10.9, описаны около вложенных в них сфер.

Пусть конус и цилиндр описаны около одной сферы (рис. 10.10). Как выглядит линия их пересечения? Ответ на этот вопрос дает теорема 3 (теорема Монжа).

Теорема 3 (теорема Монжа). *Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.*

Доказательство

Пусть поверхности второго порядка Θ и Γ описаны около поверхности Φ и соприкасаются с ней по плоским кривым t и g . Кривые t и g , лежащие на Φ , пересекаются в точках T и G . В этих точках поверхности Θ , Γ и Φ имеют общие касательные плоскости. Значит, в точках T и G имеется двойное прикосновение поверхностей Θ и Γ . Следовательно, на основании теоремы о двойном прикосновении, эти поверхности пересекаются по двум плоским кривым, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки T , G пересечения линий касания. Теорема доказана.

В практических задачах теорема Монжа применяется чаще всего в тех случаях, когда пересекаются поверхности вращения второго порядка, описанные около общей сферы или вписанные в нее. Рассмотрим несколько задач на построение линии пересечения поверхностей второго порядка для особых случаев их взаимного расположения, удовлетворяющих условиям теоремы Монжа.

Задача 1. *Построить линию пересечения поверхностей кругового конуса и цилиндра вращения, описанных около сферы (рис. 10.11).*

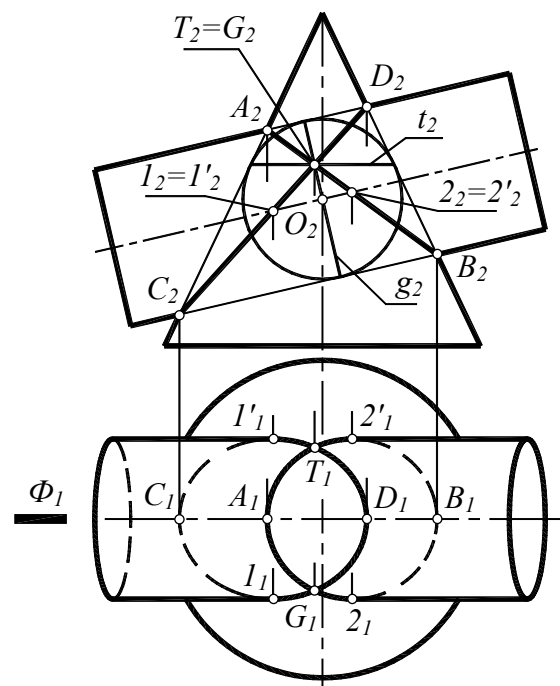


Рис. 10.11

Конус и цилиндр касаются сферы по окружностям t и g , которые пересекаются между собой в точках T и G . Согласно теореме Монжа, в этом случае линиями пересечения данных поверхностей будут два эллипса, плоскости которых проходят через прямую TG , соединяющую точки T , G пересечения линий касания t , g .

Данные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , параллельную плоскости проекций Π_2 . Следовательно, прямая TG занимает фронтально-проецирующее положение. Искомые линии пересечения конуса и цилиндра проецируются на Π_2 отрезками A_2B_2 и C_2D_2 , где A , B , C , D – точки пересечения фронтальных очерковых линий конуса и цилиндра (см. рис. 10.11).

На горизонтальной проекции видимость линии пересечения, распавшейся на два эллипса, меняется в точках 1 , $1'$ и 2 , $2'$, лежащих на горизонтальном очерке цилиндра. Любое количество точек линии пересечения конуса и цилиндра можно построить по их принадлежности к поверхности конуса.

Задача 2. Построить линию пересечения поверхностей двух цилиндров одинакового диаметра с пересекающимися осями.

На рис. 10.12–10.14 показаны фронтальные проекции круговых цилиндров одинакового диаметра. Пересекающиеся оси цилиндров параллельны фронтальной плоскости проекций.

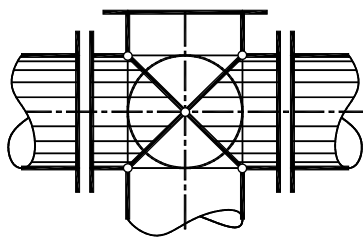


Рис. 10.12

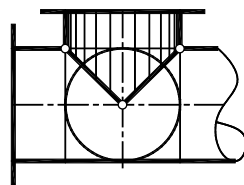


Рис. 10.13

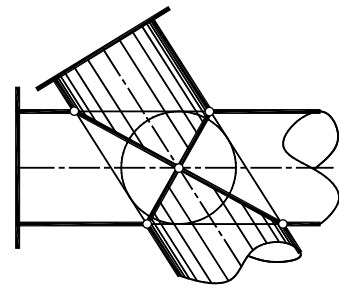


Рис. 10.14

Во всех трех случаях цилиндры описаны около сферы (с центром в точке пересечения осей). В соответствии с теоремой Монжа, линия их пересечения распадается на две плоские кривые (эллипсы), фронтальные проекции которых вырождаются в отрезки прямых линий.

Задача 3. Спроектировать угловое соединение двух трубопроводов одинакового диаметра.

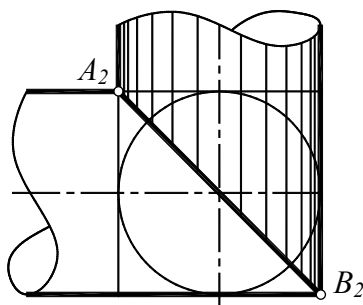


Рис. 10.15

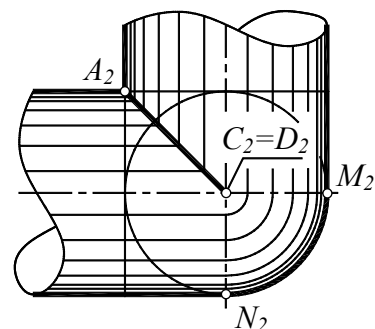


Рис. 10.16

На рис. 10.15 показан простой угловой переходник, предназначенный для соединения цилиндрических трубопроводов с взаимно перпендикулярными осями. Линия AB пересечения соединяемых трубопроводов, в соответствии с теоремой Монжа – эллипс.

При транспортировке по такому трубопроводу жидких или сыпучих тел будет возникать застойная зона в области точки B . Чтобы устранить этот недостаток, сопряже-

ние трубопроводов делают плавным, дополняя его сферической поверхностью. В этом случае переходник состоит из двух цилиндрических поверхностей и четверти сферы. Цилиндрические поверхности касаются сферы по полуокружностям CMD и CND (рис. 10.16). Линия CAD пересечения сопрягаемых трубопроводов – половина эллипса.

Вопросы для повторения

1. Какую поверхность называют алгебраической? Что называют порядком алгебраической поверхности?
2. Перечислить все алгебраические поверхности второго порядка.
3. Каков геометрический алгоритм формирования конической и цилиндрической поверхностей второго порядка?
4. Что называют биквадратной кривой? Перечислить все возможные случаи распада биквадратной кривой на алгебраические кривые.
5. Как построить круговые сечения эллиптического цилиндра?
6. Как построить круговые сечения прямого эллиптического конуса?
7. Даны два круговых конуса с общей фронтальной плоскостью симметрии, описанные около одной и той же сферы. Очерковая образующая первого конуса параллельна очерковой образующей второго конуса. По какой линии пересекаются данные конусы? Сделать чертеж.

Лекция 11

ПЛОСКОСТЬ, КАСАТЕЛЬНАЯ К ПОВЕРХНОСТИ

Первоначальное понятие о касающихся друг друга линиях или поверхностях мы приобретаем из повседневного опыта. Например, интуитивно ясно, что лежащие на столе линейка (прямая линия) и гимнастический обруч (окружность) могут касаться друг друга. При этом у них будет только одна общая точка. Шар, лежащий на столе, касается плоскости стола. Можно сказать иначе: плоскость стола касается шара. Плоскость и шар имеют единственную общую точку – точку касания.

Этим наглядным представлениям надо придать форму точных математических определений. Рассмотрим следующие геометрические понятия:

- прямая, касательная к кривой линии;
- прямая, касательная к поверхности;
- плоскость, касательная к поверхности.

11.1. Общие определения

Касательной прямой t к кривой линии l называют предельное положение секущей $s=MM'$, когда точка M' , оставаясь на линии l , стремится к точке M (секущая – это прямая, пересекающая кривую линию в двух точках). Точку M называют точкой касания (рис. 11.1). Касание можно рассматривать как частный случай пересечения, когда точки пересечения совпадают.

Пусть имеется некоторая поверхность Φ , на которой отмечена произвольная точка M (рис. 11.2). Проведем через M секущую s , пересекающую поверхность в точке M' .

Касательной прямой t к поверхности Φ называют предельное положение секущей MM' , когда точка M' , оставаясь на поверхности Φ , стремится к точке касания M .

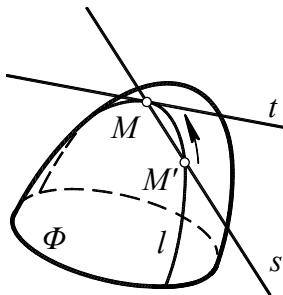


Рис. 11.2

Точка M' , перемещаясь к точке касания M , может двигаться по произвольной кривой линии l , лежащей на поверхности Φ (см. рис. 11.2). В точке M прямая t будет касательной не только к поверхности Φ , но и к кривой l . Поэтому касательную к поверхности можно определить следующим образом.

Касательной прямой t к поверхности Φ называют прямую, касательную к какой-нибудь кривой, лежащей на этой поверхности.

Прямая линия, касательная к какой-нибудь кривой, лежащей на поверхности, касается этой поверхности. Поскольку через данную точку поверхности можно провести множество разных кривых, лежащих на этой поверхности, то и касательных в данной точке поверхности может быть бесчисленное множество. В курсе дифференциальной геометрии доказывается, что все прямые, касательные к поверхности в данной ее точке, лежат в одной плоскости.

Касательной плоскостью Θ к поверхности Φ в точке M называют геометрическое место касательных к всевозможным кривым, проходящим по поверхности через данную точку M .

Из этого определения следует, что плоскость Θ , касатель-

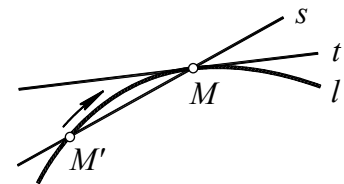


Рис. 11.1

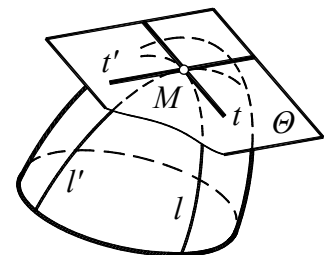


Рис. 11.3

ную к поверхности в данной точке M , можно задать двумя прямыми t и t' , касательными к двум произвольным гладким кривым l и l' , проведенным по поверхности через точку M (рис. 11.3).

11.2. Три типа точек поверхности

Рассмотрим взаимное расположение касательной плоскости и поверхности, к которой она проведена. Здесь возможны различные случаи.

Случай 1. Касательная плоскость имеет с поверхностью одну общую точку; в окрестности точки касания поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости.

Такие точки поверхности называют эллиптическими. Например, выпуклые криволинейные поверхности (сфера, эллипсоид и др.) содержат только эллиптические точки.

Название “эллиптические точки” можно наглядно пояснить следующим образом. Пусть в точке A плоскость Θ касается выпуклой поверхности вращения (рис. 11.4). Немного сдвинем эту плоскость параллельно самой себе в направлении нормали к поверхности. В своем новом положении плоскость Θ пересечет данную поверхность по замкнутой кривой e , напоминающей эллипс. На дополнительной плоскости проекций Π_4 изображена истинная форма e_4 кривой e .

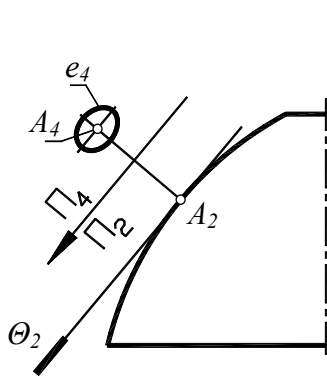


Рис. 11.4

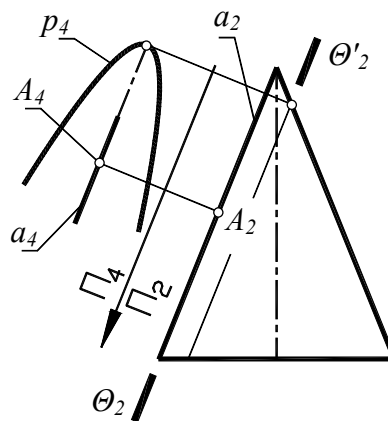


Рис. 11.5

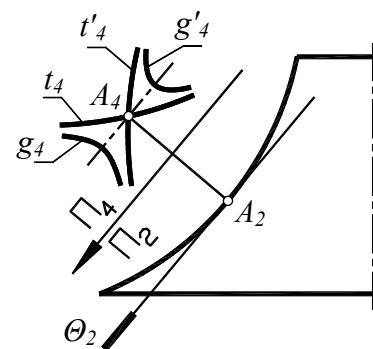


Рис. 11.6

В технических приложениях замкнутую область, ограниченную кривой e , называют “пятном контакта” поверхности с касательной плоскостью. Для всех выпуклых тел форма пятна контакта близка к эллипсу, чем и объясняется название точки на поверхности тела. В частности, если пятно контакта имеет форму окружности, то такую точку поверхности называют омбилической, или точкой округления.

Случай 2. Касательная плоскость соприкасается с поверхностью по линии; в окрестности линии касания поверхность может быть расположена по одну или по разные стороны от касательной плоскости.

Точки такой поверхности, лежащие на линии касания, называют параболическими. Например, развертывающиеся поверхности (цилиндры, конусы, произвольные торсовые поверхности) содержат только параболические точки.

Название “параболические точки” можно наглядно пояснить следующим образом. Пусть плоскость Θ касается конуса вращения в точке A , лежащей на образующей a (рис. 11.5). При этом касание происходит не только в точке A , но вдоль всей образующей a . Немного сдвинем касательную плоскость Θ параллельно самой себе в направлении нормали к поверхности до положения Θ' . Плоскость Θ' пересечет конус по параболе p , чем и объясняется название точек на поверхности.

Случай 3. Касательная плоскость соприкасается с поверхностью в одной точке, но при этом пересекает поверхность; в окрестности точки касания поверхность располагается по разные стороны от касательной плоскости (рис. 11.6).

Такие точки называют гиперболическими. Отсек поверхности в области гиперболической точки A имеет седлообразную форму (рис. 11.7).

Название “гиперболические точки” можно пояснить следующим образом. Пусть в точке A плоскость Θ касается вогнутой поверхности вращения (см. рис. 11.6). В области точки A поверхность имеет выпукло-вогнутую (седлообразную) форму. Касательная плоскость Θ пересекается с ней по кривым t и t' , проходящим через точку A .

Немного сдвинем эту плоскость параллельно самой себе в направлении нормали к поверхности. В своем новом положении плоскость Θ пересечется с поверхностью по двум кривым g и g' , напоминающим ветви гиперболы. На дополнительной плоскости проекций Π_4 изображена истинная форма кривых t, t' и g, g' , которые похожи на асимптоты и две ветви гиперболы (см. рис. 11.6). Этим сходством объясняется название точек седлообразной поверхности.

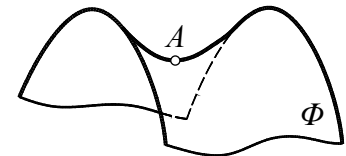


Рис. 11.7

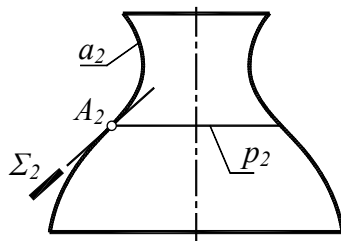


Рис. 11.8

Названия трех типов точек поверхности (эллиптические, параболические, гиперболические) объясняются не только сходством “пятен контакта” с соответствующими кривыми второго порядка. Эти названия имеют точный математический смысл, обусловленный возможностью замены малой области данной поверхности отсеком наиболее тесно соприкасающегося с ней параболоида: эллиптического, гиперболического или вырожденного параболоида (параболического цилиндра).

Поверхности, содержащие все три типа точек, называются поверхностями двойкой кривизны. Например, поверхность вращения с выпукло-вогнутым меридианом a содержит области эллиптических и гиперболических точек, отделенные друг от друга параллелью p , проходящей через точку перегиба A меридиана a (рис. 11.8). Выше параллели p находится область гиперболических точек, ниже p – область эллиптических точек. Бесконечно узкий “поясок” p данной поверхности вращения состоит из параболических точек и может рассматриваться как бесконечно узкий участок конической поверхности с касательной плоскостью Σ .

Поверхность открытого тора содержит эллиптические точки на “наружной” поверхности и гиперболические (седловые) точки на “внутренней” поверхности. Области эллиптических и гиперболических точек отделены параллелями p и p' , состоящими из параболических точек (рис. 11.9).

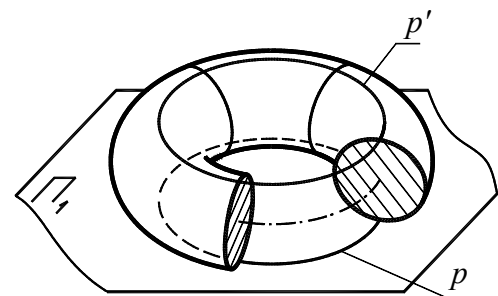


Рис. 11.9

11.3. Примеры построения касательных плоскостей

Рассматривают три основных типа задач на построение плоскости, касательной к какой-либо кривой поверхности.

1. Касание в данной точке поверхности (через данную точку поверхности провести касательную плоскость).

2. Касание из внешней точки (провести касательную плоскость через точку, лежащую вне данной поверхности).

3. Касание с учетом дополнительных условий (к данной поверхности провести касательную плоскость, удовлетворяющую некоторым дополнительным условиям).

Касательная плоскость к поверхности в заданной ее точке определяется двумя прямыми, касающимися двух пересекающихся в этой точке кривых линий на поверхности. Поэтому решение задачи первого типа (через данную точку поверхности провести касательную плоскость) сводится к построению пары наиболее простых по форме и расположению кривых линий на поверхности, проходящих через данную точку, и построению прямых, касательных к этим линиям в точке их пересечения.

Задача второго типа (из внешней точки A , не лежащей на поверхности Φ , провести к этой поверхности касательную плоскость) может быть сведена к задаче первого типа. Проведем через данную точку A произвольную секущую плоскость Λ , которая пересекает данную поверхность (рис. 11.10). Из точки A строим касательную a к линии разреза $l = \Phi \cap \Lambda$ и отмечаем точку касания L . Получаем задачу первого типа: через точку L на поверхности Φ провести плоскость, касательную к этой поверхности. Эта плоскость обязательно будет заключать в себя касательную a (так как a касается поверхности Φ в точке L), следовательно, и точку A , лежащую на этой касательной.

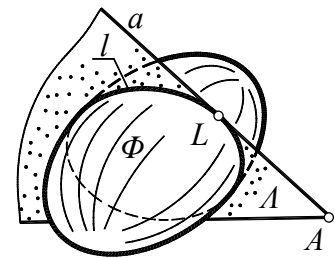


Рис. 11.10

Задача второго типа имеет множество решений. Действительно, к любой гладкой поверхности, за исключением поверхностей, содержащих только параболические точки (цилиндра, конуса и тора), из внешней точки можно провести множество касательных плоскостей.

Задача третьего типа (построение касательной плоскости, удовлетворяющей дополнительным геометрическим условиям) имеет конечное число решений. Пусть, например, требуется из внешней точки провести касательную плоскость к сфере. Такая задача имеет бесконечное множество решений. Но если потребовать, чтобы касательная плоскость проходила еще через одну точку (то есть наложить дополнительное условие), то число решений сокращается до двух.

Построение касательной плоскости, удовлетворяющей заданным условиям, может считаться *комбинированной задачей* (см. лекцию 12).

11.3.1. Касание в данной точке поверхности (задачи первого типа)

Задача 1. Построить плоскость Θ , касающуюся сферы в точке A на ее поверхности (рис. 11.11).

Мысленно разрежем сферу плоскостями уровня Λ и Γ , проходящими через A . Получаем две линии разреза: l и g . Через точку A проведем в плоскости Λ горизонталь h , касательную к линии разреза l , в плоскости Γ – фронталь f , касательную к линии разреза g . Пересекающиеся прямые h и f определяют плоскость Θ , касательную к сфере в точке A . Задача решена.

Задача 2. Построить плоскость Θ , касающуюся конуса вращения в точке A на его поверхности (рис. 11.12).

Через точку A проведем плоскость уровня Λ , пересекающую конус по параллели l . Горизонталь h касается этой параллели в точке A . Образующая конуса SB и горизонталь h , пересекающиеся в точке A , определяют плоскость Θ , касающуюся конуса не только в точке A , но вдоль всей образующей SB . Задача решена.

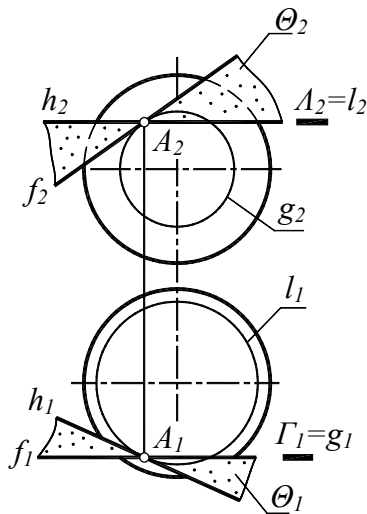


Рис. 11.11

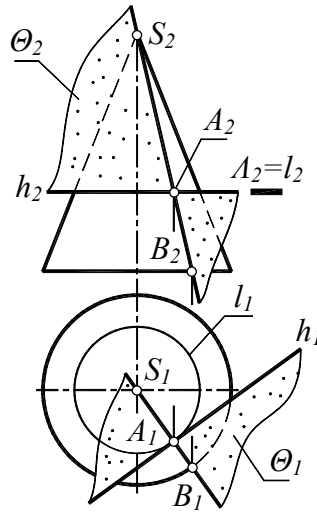


Рис. 11.12

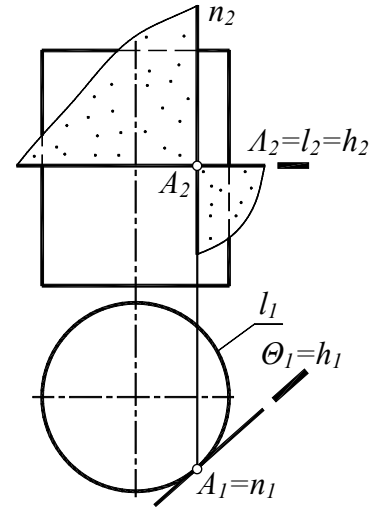


Рис. 11.13

Задача 3. Построить плоскость Θ , касающуюся прямого кругового цилиндра в точке A на его поверхности (рис. 11.13).

Через точку A проведем плоскость уровня A , пересекающую цилиндр по параллели l . Горизонталь h касается этой параллели в точке A . Вертикальная образующая n цилиндра и горизонталь h , пересекающиеся в точке A , определяют плоскость Θ , касающуюся конуса не только в точке A , но вдоль всей образующей n . Задача решена.

Задача 4. Построить плоскость Θ , касающуюся поверхности вращения (“кувшин”) в точке A (рис. 11.14).

Через точку A проведем горизонтальную плоскость уровня A , пересекающую кувшин по параллели (окружности) l . Горизонталь h касается параллели в точке A , следовательно, h – прямая, касательная к поверхности в точке A .

Начертим касательную t к фронтальному очерку поверхности в точке T , лежащей в плоскости A , и отметим точку S пересечения этой касательной с осью поверхности (касательная t может быть начерчена только приближенно, так как фронтальная очерковая линия кувшина – нелинейная графически заданная кривая линия). Будем мысленно вращать касательную t вокруг оси. При этом точка касания “скользит” по параллели l . Когда точка касания совпадет с точкой A , касательная займет положение $a=SA$. Прямые a и h , касающиеся поверхности в точке A , определяют положение искомой касательной плоскости Θ . Задача решена.

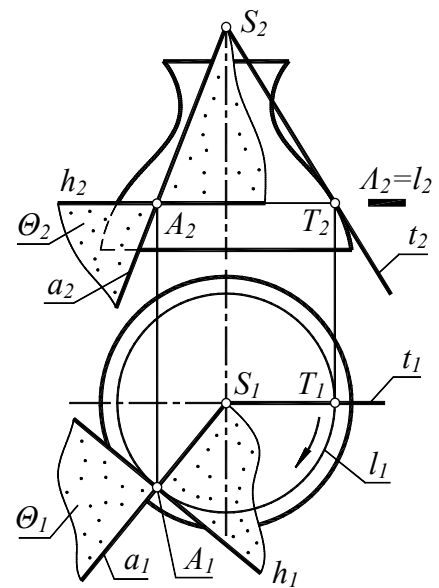


Рис. 11.14

Правило. Задачи на построение плоскости, касательной к поверхности в данной ее точке, решаются по общей схеме: построение двух графически простых кривых линий на поверхности, проходящих через данную точку, и построение прямых, касательных к этим линиям в данной точке. Эти прямые определяют положение искомой касательной плоскости.

11.3.2. Касание из внешней точки (задачи второго типа)

Как уже отмечалось, задача второго типа (через внешнюю точку провести к поверхности касательную плоскость) имеет, как правило, множество решений. Например, через произвольную точку пространства проходит бесконечное множество плоскостей, касающихся сферы. Но к конической, цилиндрической поверхности или к торсу можно провести лишь конечное число касательных плоскостей.

Это различие в числе решений объясняется тем, что множество плоскостей, проходящих через данную точку, образует связку (двупараметрическое множество). Требование, чтобы плоскость, принадлежащая связке, касалась гладкой неразвертывающейся поверхности, “отнимает” у плоскости один параметр (одну степень свободы). Поэтому остается однопараметрическое (∞^1) множество решений. Но требование, чтобы плоскость касалась развертывающейся поверхности (конуса, цилиндра или тора), отнимает у плоскости, принадлежащей данной связке, два параметра (две степени свободы). Поэтому через произвольную точку пространства можно провести к конусу, цилиндру или торсу лишь конечное число касательных плоскостей [9].

Задача 1. Через внешнюю точку A провести плоскость Θ , касающуюся сферы (рис. 11.15).

Через точку A проведем произвольную секущую плоскость, например, фронтальную плоскость уровня Γ . Плоскость Γ разрезает сферу по окружности g . В плоскости Γ проведем через точку A фронталь f , касающуюся окружности g в точке L .

Через точку L проведем еще одну произвольную плоскость, например, горизонтальную плоскость уровня A , разрезающую сферу по окружности l . В плоскости A начертим горизонталь h , касающуюся линии разреза l в точке L .

Таким образом, прямые h и f – касательные в точке L к линиям l и g , лежащим на сфере. Следовательно, плоскость $\Theta(h \cap f)$ в точке L касается сферы. Плоскость Θ – искомая, так как проходит через внешнюю точку A .

Задача имеет бесчисленное множество решений. Действительно, представим себе коническую поверхность с вершиной в точке A , описанную около данной сферы. Любая плоскость, касающаяся конической поверхности, коснется также и сферы в точке, лежащей на линии касания сферы и конической поверхности (линия касания конической поверхности и вписанной в нее сферы – окружность).

Задача 2. Через внешнюю точку A провести плоскость Θ , касающуюся эллиптического конуса с круговым основанием (рис. 11.16).

Горизонтальная плоскость уровня A , проходящая через данную точку A , разрезает конус по окружности l с центром O . Из точки A проведем к окружности l две касательные h, h' и отметим точки касания L и M . В этих точках горизонталь h и h' , проходя через точку A , касаются поверхности конуса.

Задача оказалась сведена к задаче *первого типа*: провести касательные плоскости через точки L и M , принадлежащие поверхности конуса. Для этого достаточно провести через L, M еще по одной касательной к поверхности конуса. В качестве этих касательных можно взять образующие конуса SU и SV , проходящие через точки L и M .

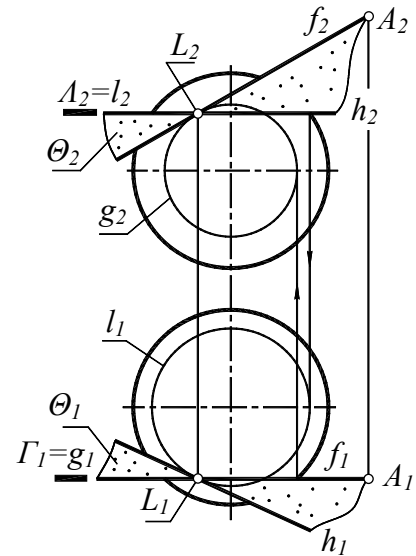


Рис. 11.15

Образующая конуса SU и горизонталь h , пересекающиеся в точке L , определяют плоскость Θ , проходящую через внешнюю точку A и касающуюся конуса вдоль образующей SU .

Образующая SV и горизонталь h' , пересекающиеся в точке M , определяют еще одну плоскость Θ' , также проходящую через A и касающуюся конуса вдоль образующей SV . Задача полностью решена (через внешнюю точку A к конической поверхности второго порядка проведены две касательные плоскости).

Таким образом, все задачи второго типа ("через внешнюю точку A провести к поверхности касательную плоскость"), решаются по следующей общей схеме.

1. Рассекаем поверхность произвольной плоскостью, проходящей через заданную внешнюю точку A .

2. Проводим через точку A касательную l к линии разреза и отмечаем точку касания L .

3. Решаем ранее рассмотренную задачу первого типа: через точку L на поверхности проводим плоскость, касательную к этой поверхности.

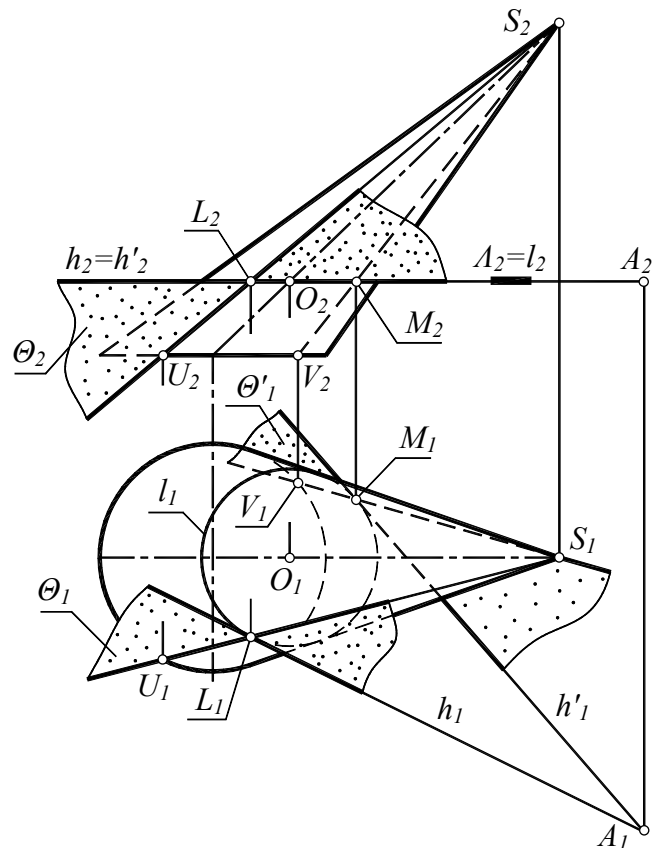


Рис. 11.16

11.3.3. Касание с учетом дополнительных условий (задачи третьего типа)

Задачи третьего типа отличаются большим разнообразием и отсутствием универсальной схемы их решения. Рассмотрим некоторые из них.

Построить плоскость, касательную к поверхности Φ , проходящую через данную прямую или параллельную данной прямой.

Построить плоскость, касательную к поверхности Φ , параллельную данной плоскости.

Построить плоскость, касательную к двум поверхностям (например, к конусу и сфере).

Такие задачи не всегда имеют решение. Пусть, например, требуется через данную прямую провести касательную плоскость к поверхности цилиндра или конуса. Чтобы эта задача имела решение, данная прямая должна либо проходить через вершину конуса, либо располагаться параллельно образующим цилиндра.

Задача 1. *Провести плоскость, касательную к сфере Φ и проходящую через прямую a общего положения (рис. 11.17).*

Плоскости Θ и Θ' , касательные к сфере и проходящие через данную прямую a , должны касаться цилиндра, описанного около сферы и имеющего образующие, параллельные a . Поэтому точки касания плоскостей Θ и Θ' со сферой лежат в плоскости Σ , перпендикулярной к прямой a и проходящей через центр сферы.

Строим плоскость Σ , для чего через центр сферы O проводим горизонталь h и фронталь f так, чтобы выполнить условия теоремы о перпендикулярности прямой a и плоскости Δ : $h_1 \perp a_1, f_2 \perp a_2$.

Находим линию пересечения d сферы Φ и плоскости Σ : $d = \Phi \cap \Sigma$. Отмечаем точку A пересечения прямой a с плоскостью Σ : $A = a \cap \Sigma$ (некоторые вспомогательные построения на рис. 11.17 не показаны).

В плоскости Σ проводим из точки A касательные l и m к окружности d и отмечаем точки касания L и M . Через эти точки проходят искомые касательные плоскости Θ и Θ' . Задача решена.

В процессе решения потребовалось вычерчивать эллипсы d_1, d_2 (проекции окружности d) и строить касательные к эллипсам. Чтобы не вычерчивать эллипсы, можно применить способ замены плоскостей проекций (преобразовать прямую общего положения a в проецирующую прямую). Тогда на одной из плоскостей проекций прямая a будет изображаться точкой, а проекция окружности d останется окружностью.

Задача 2. Провести плоскость, касательную к трем сферам.

Пусть центры сфер O, O', O'' расположены в горизонтальной плоскости уровня Σ (рис. 11.18). Введем в рассмотрение вспомогательные конусы, описанные около данных сфер. Конус с вершиной S , описанный около левой и средней сфер, касается их по окружностям a и b . Конус с вершиной S' , описанный около правой и средней сфер, соприкасается с этими сферами по окружностям c и b' .

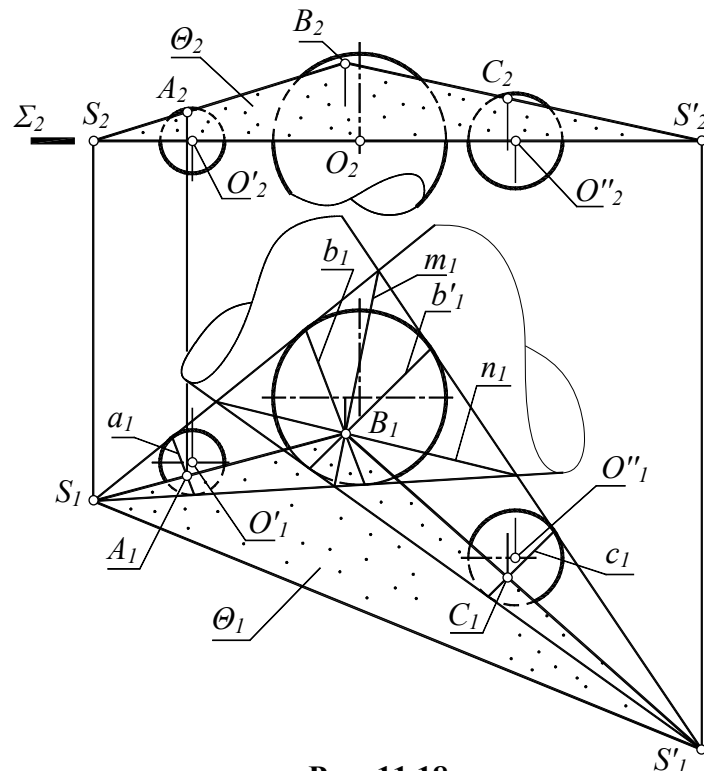


Рис. 11.18

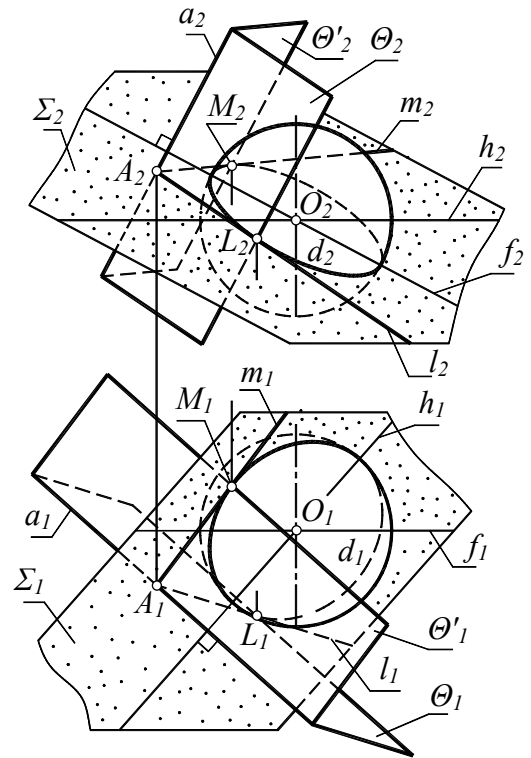


Рис. 11.17

Линия пересечения вспомогательных конусов, согласно теореме Монжа, распадается на две плоские кривые, в данном случае – на два эллипса m и n . Плоскости эллипсов m, n проходят через прямую, соединяющую точки B и B' пересечения линий касания b и b' . В точках B и B' происходит соприкосновение вспомогательных конических поверхностей с вписанной в них средней сферой. Иначе говоря, в этих точках оба конуса и средняя сфера имеют общие касательные

плоскости. Точки B и B' расположены симметрично относительно плоскости Σ (точка B' на рис. 11.18 условно не показана).

Через точку B проходит плоскость Θ , касающаяся конусов по образующим SB и $S'B$. Соприкасаясь с поверхностями вспомогательных конусов, плоскость Θ касается также и сфер, вписанных в эти конусы.

Таким образом, плоскость $\Theta(SBS')$ является искомой, так как она касается всех трех сфер. На рис. 11.18 отмечены точки касания A, B, C , лежащие на пересечении прямых SB и $S'B$ и линий касания сфер с вспомогательными конусами. Задача решена. В зависимости от взаимного расположения сфер в пространстве задача может иметь от двух до шести решений.

Задача 3. Построить плоскость, касательную к наклонному эллиптическому цилиндру с круговым основанием и параллельную прямой общего положения.

Через какую-нибудь точку на оси цилиндра (например, через центр B верхнего основания) проводим прямую, параллельную данной прямой a (рис. 11.19). В точке R эта прямая пересекается с плоскостью основания цилиндра. Получаем плоскость ABR , параллельную прямой a и проходящую через ось AB цилиндра.

Переместим плоскость ABR параллельно самой себе до положения $\Theta(A'B'R')$. В новом положении горизонталь $A'R'$, лежащая в плоскости Θ , касается кругового основания цилиндра, а прямая $A'B'$, параллельная оси цилиндра, касается цилиндра вдоль его образующей. Плоскость $\Theta(A'B'R')$ касается цилиндра вдоль образующей $A'B'$ и параллельна плоскости ABR , которая, в свою очередь, параллельна прямой a . Следовательно, плоскость Θ параллельна прямой a .

Таким образом, плоскость $\Theta(A'B'R')$ – искомая, так как она касается цилиндра и параллельна данной прямой. Задача имеет два решения. Второе решение на рис. 11.19 условно не показано.

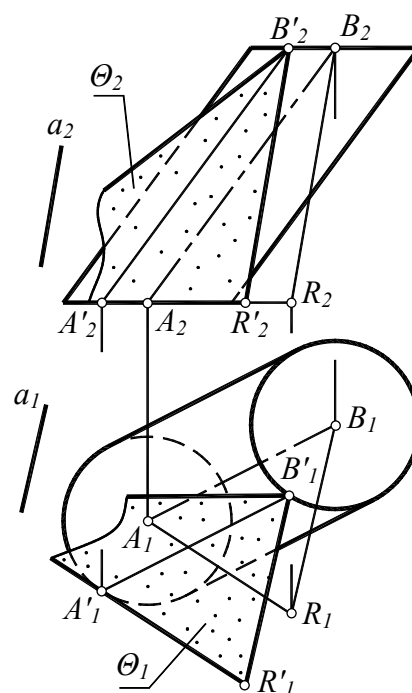


Рис. 11.19

Вопросы для повторения

1. Дать определения понятиям “прямая линия, касательная к поверхности” и “плоскость, касательная к поверхности”.
2. Перечислить три типа точек поверхности. Чем объясняются названия точек?
3. По какой линии происходит касание плоскости и развертываемой поверхности?
4. В каком случае плоскость, касающаяся поверхности, пересекает эту поверхность? Может ли плоскость, касательная к развертываемой поверхности, пересекать эту поверхность?
5. Возможно ли, чтобы на гладкой поверхности были эллиптические и гиперболические точки, но не было параболических точек?
6. Сформулируйте правило построения плоскости, касательной к поверхности в данной точке этой поверхности.
7. Какие задачи называют задачами первого типа? Какие задачи называются задачами второго типа?
8. Сформулируйте схему решения задачи второго типа. Можно ли свести задачу второго типа к задаче первого типа?

Лекция 12

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Многие задачи начертательной геометрии сводятся к построению фигур (точек, линий, поверхностей), удовлетворяющих определенным позиционным или метрическим условиям. Каждому условию соответствует некоторое множество элементов (точек, линий), которое называют *геометрическим местом* этих элементов. Например, сфера – геометрическое место точек, удаленных от данной точки (центра сферы) на заданное расстояние.

Задачи, в которых на искомый элемент наложены два или более условий, называются комбинированными. Иногда такие задачи называют “комплексными”, имея при этом в виду, что на искомый элемент наложен комплекс (два или более) условий.

Перед тем, как приступать к решению комбинированных задач, необходимо овладеть навыками решения типовых геометрических задач, рассмотренных в предыдущих лекциях. Напомним эти задачи.

1. Построение точки пересечения прямой линии и поверхности (первая позиционная задача).
2. Построение линии пересечения двух поверхностей (вторая позиционная задача).
3. Построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.
4. Определение длины отрезка прямой общего положения.
5. Преобразование фигуры общего положения в фигуру частного положения способом замены плоскостей проекций.

12.1. Последовательность решения комбинированной задачи

Геометрическая задача, в которой на искомый элемент наложено несколько (два и более) условий, решается по следующей схеме.

1. Вводятся вспомогательные геометрические фигуры (множества), каждое из которых удовлетворяет одному из условий или группе условий, наложенных на искомый элемент.

2. Искомый элемент определяется как результат пересечения вспомогательных фигур (множеств).

Эта схема реализуется в следующем порядке.

Анализ – выявление условий, наложенных на искомый элемент, и тех фигур (множеств), которые удовлетворяют этим условиям.

Исследование – определение количества решений задачи.

Составление алгоритма (алгоритм – символическая запись последовательности решения задачи).

Построение – графическая реализация алгоритма на чертеже.

Построение – это запись (фиксация) решения на чертеже. Перед тем, как выполнять построение, задачу надо мысленно решить в трехмерном пространстве. Пусть, например, надо через данную точку A провести прямую, параллельную двум данным плоскостям. Представим заданные плоскости, произвольно “висящие” в пространстве. Они пересекаются по некоторой линии m . Любая прямая m' , параллельная линии m , будет параллельна обеим плоскостям. Следовательно, для решения задачи достаточно найти линию m пересечения данных плоскостей и через точку A провести искомую прямую параллельно найденной линии.

Задача мысленно решена. Теперь можно приступать к графическим построениям: начертить линию m пересечения данных плоскостей и через точку A провести прямую, параллельную найденной прямой t .

12.2. Геометрические места точек или прямых, удовлетворяющих заданным условиям

Перечислим определения некоторых геометрических мест, встречающихся при решении комбинированных задач.

1. Геометрическое место точек, удаленных от данной точки O на расстояние R , есть поверхность сферы с центром O и радиусом R .

2. Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой j на расстояние R , есть поверхность цилиндра вращения с осью j и радиусом R .

3. Геометрическое место точек, удаленных от данной плоскости на заданное расстояние – две плоскости, параллельные данной.

4. Геометрическое место прямых, проходящих через точку S на прямой j и наклоненных к j под постоянным углом – прямолинейные образующие конуса вращения с вершиной S и осью j .

5. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку S и равнонаклоненных к данной плоскости Σ – образующие конуса вращения с вершиной S и осью, перпендикулярной к плоскости Σ .

6. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B , есть плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (срединная плоскость).

7. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек A , B и C , есть перпендикуляр к плоскости этих точек, проходящий через центр окружности ABC .

8. Геометрическое место точек, равноудаленных от четырех точек A , B , C , D , не лежащих в одной плоскости – точка (центр сферы, проходящей через данные точки A , B , C , D).

9. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей Σ и Δ – биссекторная плоскость двугранного угла $\Sigma \cap \Delta$.

12.3. Примеры решения комбинированных задач

Задача 1. Опустить перпендикуляр t из точки M на прямую m .

Требование “опустить перпендикуляр на прямую” означает, что перпендикуляр к прямой должен с ней пересечься. Эта задача рассматривалась в лекции 4. Решим ее как комбинированную задачу, выполнив анализ, исследование и составив алгоритм.

Анализ

Искомая прямая t должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая t должна проходить через точку M и быть перпендикулярна к прямой m . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Σ , проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой m . Это условие записывается в символической форме:

$$\{t: (M \in t \perp m)\} = \Sigma.$$

Требования, наложенные на искомый элемент t , отмечены в круглых скобках. Фигурными скобками обозначают множество каких-либо элементов. Поэтому символическая запись читается следующим образом: плоскость Σ образована множеством прямых t , проходящих через точку M и перпендикулярных к прямой m .

Условие 2. Искомая прямая t должна проходить через точку M и пересекать прямую m . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ , проходящую через точку M и прямую m :

$$\{t: (M \in t \cap m)\} = \Delta.$$

Таким образом, искомая прямая t должна одновременно находиться в плоскости Σ (первое условие) и в плоскости Δ (второе условие). Следовательно, прямая t есть линия пересечения плоскостей Σ и Δ : $t = \Sigma \cap \Delta$.

Исследование

Искомая прямая – результат пересечения двух плоскостей. Плоскости общего положения пересекаются по прямой. В общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Σ . Через точку M проводим плоскость Σ , перпендикулярную к данной прямой m . Зададим плоскость Σ горизонталью и фронталью таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости. Краткая запись этого действия имеет вид: $M \in \Sigma(h \cap f) \perp m$.

2. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой M и прямой m :

$$\Delta(m, M) - \text{задана.}$$

3. Построение искомой прямой: $t = \Sigma \cap \Delta$.

Графическая реализация

Графическая реализация алгоритма показана на рис. 12.1. Через точку M проведена плоскость $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярная к прямой m . Точка M – общая точка плоскостей Σ и Δ , поэтому для построения линии t их пересечения достаточно найти еще одну общую точку этих плоскостей. Например, на рис. 12.1 найдена точка K пересечения прямой m с плоскостью Σ (по схеме решения первой позиционной задачи). Точка K – общая точка плоскостей Σ и Δ , поэтому прямая $t = MK$ – искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую m . Задача решена.

Задача 2. Через точку M провести прямую t , пересекающую данные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 12.2).

Анализ

Искомая прямая t должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая t должна проходить через точку M и пересекать прямую a . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Delta(M, a)$. Символическая запись этого условия имеет вид:

$$\{t: (M \in t \cap a)\} = \Delta.$$

Условие 2. Прямая t должна проходить через точку M и пересекать прямую b . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Sigma(M, b)$. Символическая запись этого условия имеет вид:

$$\{t: (M \in t \cap b)\} = \Sigma.$$

Прямая t должна одновременно находиться в плоскости Δ (первое условие) и в плоскости Σ (второе условие). Следовательно, искомая прямая t – линия пересечения плоскостей Δ и Σ : $t = \Delta \cap \Sigma$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

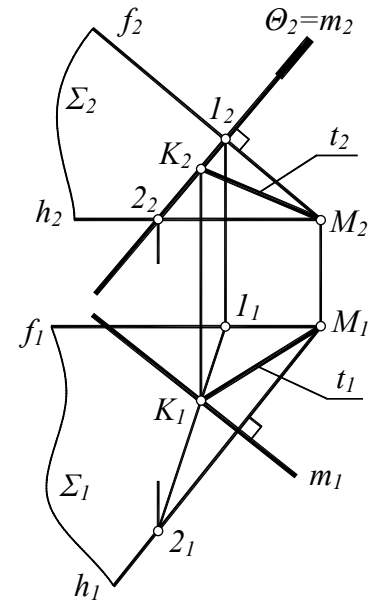


Рис. 12.1

Алгоритм

1. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой M и прямой a :

$$\Delta(M, a) - \text{задана.}$$

2. Построение плоскости Σ выполнять не надо, так как плоскость Σ уже задана на чертеже точкой M и прямой b :

$$\Sigma(M, b) - \text{задана.}$$

3. Выполняем построение искомой прямой как линии пересечения двух плоскостей:

$$m = \Delta \cap \Sigma.$$

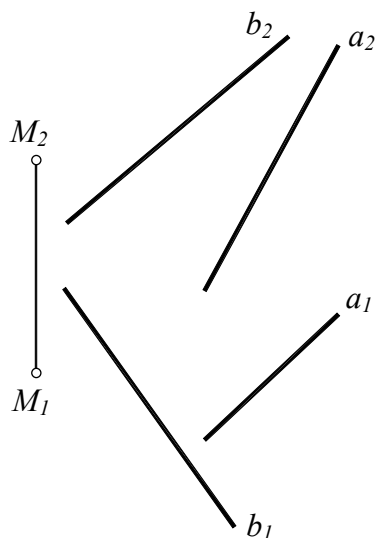


Рис. 12.2

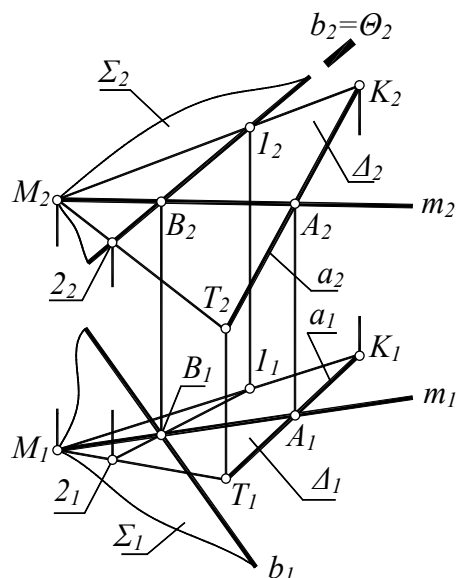


Рис. 12.3

Графическая реализация (рис. 12.3)

Поскольку плоскости $\Delta(M, a)$ и $\Sigma(M, b)$ уже заданы, то для решения задачи достаточно построить линию их пересечения. Одна точка этой линии известна: точка M – общая точка плоскостей Δ и Σ .

В качестве еще одной общей точки плоскостей Δ и Σ можно взять, например, точку B пересечения прямой b с плоскостью Δ . Точка B определяется по алгоритму решения первой позиционной задачи: через b проводим вспомогательную плоскость Θ , строим линию разреза $(I-2) = \Theta \cap \Delta$ и на пересечении линии разреза с прямой b отмечаем точку B . Искомая прямая m проходит через точку M и пересекает данные прямые a и b в точках A и B (см. рис. 12.3). Для построения линии $1-2$ потребовалось начертить в плоскости Δ вспомогательные прямые MT и MK , где T, K – произвольные точки прямой a .

Задача 3. Построить прямую m , параллельную данной прямой l и пересекающую данные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 12.4).

Условие параллельности прямых m и l означает, что m должна проходить через несобственную точку L^∞ прямой l . Следовательно, задача 3 отличается от ранее рассмотренной задачи 2 только тем, что в задаче 3 искомая прямая должна проходить не через “обычную” точку L , а через несобственную L^∞ , заданную на чертеже направлением l .

Анализ

Искомая прямая m должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая m должна проходить через несобственную точку L^∞ прямой l и пересекать прямую a . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Delta(L^\infty, a) = \Delta(l' \cap a)$, где l' – прямая, параллельная l и пересекающая прямую a (в произвольной точке). Символическая запись этого условия: $\{m: (L^\infty \in m \cap a)\} = \Delta$.

Условие 2. Прямая m должна проходить через точку L^∞ и пересекать прямую b . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Sigma(L^\infty, b)$. Символическая запись этого условия имеет вид: $\{m: (L^\infty \in m \cap b)\} = \Sigma$.

Искомая прямая m должна одновременно находиться в плоскости Δ (первое условие) и в плоскости Σ (второе условие). Следовательно, прямая m – линия пересечения плоскостей Δ и Σ : $m = \Delta \cap \Sigma$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой L^∞ и прямой a : $\Delta(L^\infty, a)$ – задана.
2. Построение плоскости Σ выполнять не надо, так как плоскость Σ уже задана на чертеже точкой L^∞ и прямой b : $\Sigma(L^\infty, b)$ – задана.
3. Искомая прямая определяется как линия пересечения плоскостей Δ и Σ : $m = \Delta \cap \Sigma$.

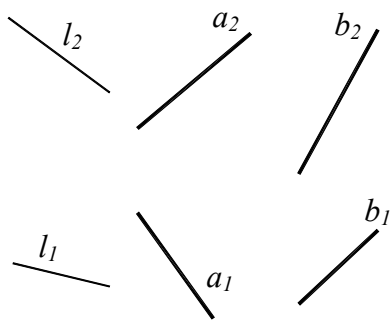


Рис. 12.4

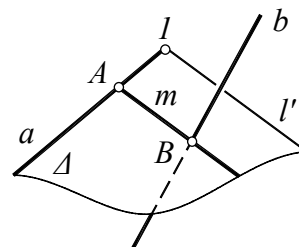


Рис. 12.5

Графическая реализация

Поскольку плоскости $\Delta(L^\infty, a)$ и $\Sigma(L^\infty, b)$ заданы, то для решения задачи достаточно построить линию их пересечения. Одна точка этой линии известна – это несобственная точка L^∞ прямой l , общая для плоскостей Δ и Σ . В качестве еще одной общей точки плоскостей Δ и Σ можно взять, например, точку B пересечения прямой b с плоскостью $\Delta(L^\infty, a) = \Delta(l' \cap a)$. Здесь l' – прямая, параллельная l и пересекающая прямую a в произвольно отмеченной на a точке I . Искомая прямая m параллельна l , проходит через B и пересекает прямую a в точке A . На рис. 12.5 дано схематическое решение задачи.

Задача 4. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми a и b .

Расстояние между скрещивающимися прямыми a, b (см. рис. 12.4) определяется как длина отрезка AB , перпендикулярного к прямым a, b и пересекающего их в точках A и B соответственно.

Схема решения

1. Находим направление l общего перпендикуляра к данным скрещивающимся прямым a, b (это направление определяется как перпендикуляр к плоскости $a \cap b'$, где $b' \parallel b$).
2. Строим прямую m , параллельную прямой l и пересекающую прямые a, b в точках A, B (точно так же, как это было сделано при решении задачи 3).
3. Каким-либо из известных способов (например, способом прямоугольного треугольника) определяем истинную длину отрезка AB . Задача решена.

Примечание. Задачи 2, 3, 4 несущественно отличаются друг от друга. Во всех этих задачах требуется найти прямую, проходящую через данную точку (собственную или

несобственную) и пересекающую две данные прямые. Как известно (см. п. 6.3.2), условие прохождения прямой через фиксированную точку отнимает у четырехпараметрического (∞^4) множества прямых две степени свободы. Условия пересечения с каждой из данных прямых “связывают” еще две степени свободы. Следовательно, прямая, удовлетворяющая наложенным на нее условиям (инцидентность данной точке и пересечение с двумя данными прямыми), вовсе не имеет степеней свободы: $\infty^4 - \infty^2 - \infty^2 = \infty^0$. Это означает, что множество таких прямых не бесконечно. Например, в каждой из задач 2, 3, 4 получено единственное решение.

Задача 5. Через точку M провести прямую l , параллельную плоскости $\Delta(a \cap b)$ и пересекающую прямую m (рис. 12.6).

Анализ

Искомая прямая l должна удовлетворять двум условиям.

1. Множество прямых l , проходящих через точку M и параллельных плоскости Δ , образует плоскость Δ' , параллельную Δ : $\{l: (M \in l \parallel \Delta)\} = \Delta'$.

2. Множество прямых l , проходящих через точку M и пересекающих прямую m , образует плоскость $\Theta(M, m)$: $\{l: (M \in l \cap m)\} = \Theta$.

Искомая прямая определяется как пересечение выявленных множеств: $l = \Delta' \cap \Theta$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения плоскостей Θ и Δ' . Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку M проводим плоскость Δ' , параллельную Δ : $M \in \Delta' \parallel \Delta$.
2. Плоскость $\Theta(M, m)$ – задана.
3. Искомая прямая: $l = \Delta' \cap \Theta$.

Графическая реализация (см. рис. 12.6)

Плоскость Δ' , проходящая через M и параллельная плоскости Δ , задана прямыми a' и b' , параллельными прямым a и b . Определяем линию пересечения плоскостей Δ' и Θ . Точка M – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка N) найдена по схеме решения первой позиционной задачи как точка пересечения прямой m с плоскостью Δ' (с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ , см. рис. 12.4). Прямая $l = MN$ – искомая.

Примечание. Условие параллельности прямой l и плоскости Δ означает, что прямая l пересекается с несобственной прямой плоскости Δ . Иначе говоря, в задаче 5 требуется найти прямую, проходящую через данную точку и пересекающую две данные прямые, одна из которых несобственная. Следовательно, задача 5 по существу ничем не отличается от ранее рассмотренных задач 2, 3, 4.

Задача 6. Через точку A провести прямую l , параллельную плоскостям $\Sigma(m \cap n)$ и $\Delta(c \cap d)$ (рис. 12.7).

Анализ

1. Множество прямых l , проходящих через точку A параллельно плоскости Σ , образует плоскость Σ' , параллельную Σ : $\{l: (A \in l \parallel \Sigma)\} = \Sigma'$.

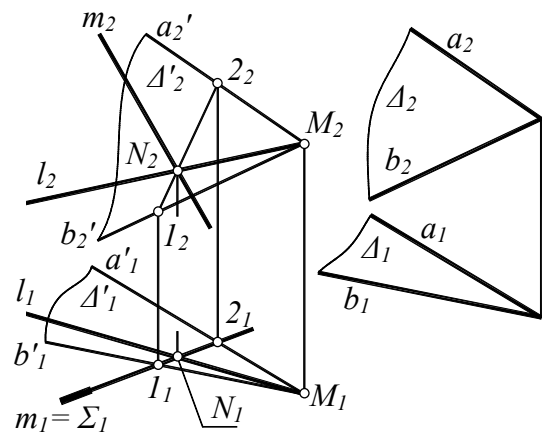


Рис. 12.6

2. Множество прямых l , проходящих через точку A и параллельных плоскости Δ , образует плоскость Δ' , параллельную Δ : $\{l: (A \in l \parallel \Delta)\} = \Delta'$. Искомая прямая l : $l = \Sigma' \cap \Delta'$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через A проводим плоскость Σ' , параллельную Σ : $A \in \Sigma' \parallel \Sigma$.
2. Через A проводим плоскость Δ' , параллельную Δ : $A \in \Delta' \parallel \Delta$.
3. Искомая прямая: $l = \Sigma' \cap \Delta'$.

Графическая реализация

Для решения задачи надо через точку A провести плоскости Σ' и Δ' , параллельные плоскостям Σ и Δ , затем построить линию l пересечения плоскостей Σ' и Δ' . Точка A – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (см. рис. 12.7). Прямая $l = AB$ – искомая.

Задача 7. На чертеже задан отрезок BC и прямая m . Построить равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и вершиной A на прямой m (рис. 12.8).

Анализ

На положение искомой точки A наложены два условия.

1. Точка A должна располагаться на прямой m . Этому условию отвечают все точки на этой прямой: $\{A: (A \in m)\} = m$.

2. Точка A должна быть равноудалена от точек B и C , так как A – вершина равнобедренного треугольника с основанием BC . Этому условию удовлетворяют точки срединной плоскости Φ , перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину: $\{A: (|A-B| = |A-C|)\} = \Phi$.

Искомая точка: $A = m \cap \Phi$.

Исследование

Искомая точка является результатом пересечения прямой линии с плоскостью. Произвольная прямая и плоскость общего положения пересекаются в одной точке. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через середину O отрезка BC проводим плоскость Φ , перпендикулярную BC :

$$O \in \Phi \perp BC.$$

2. Прямая m – задана.

3. Искомая точка: $A = m \cap \Phi$.

Графическая реализация (см. рис. 12.8)

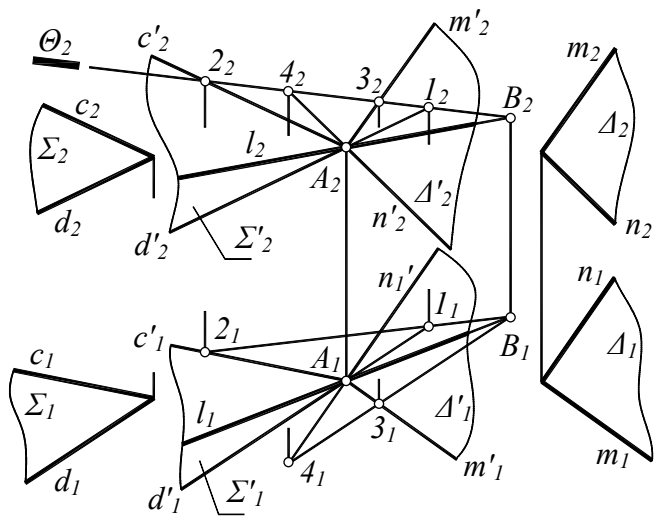


Рис. 12.7

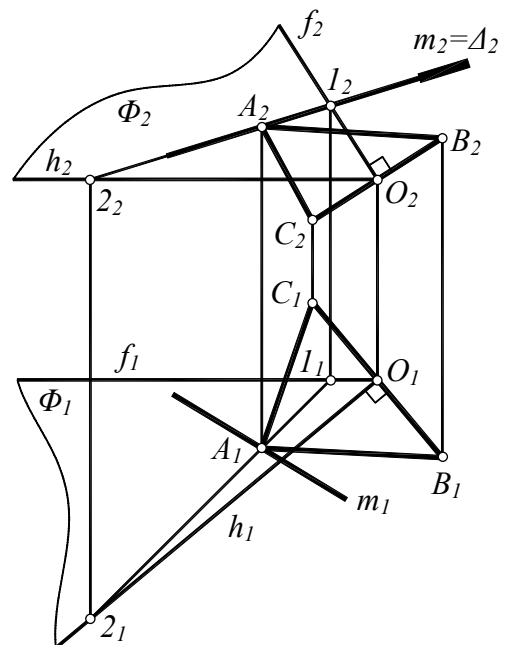


Рис. 12.8

Через середину O отрезка BC проводим плоскость $\Phi(h \cap f)$, перпендикулярную прямой BC . Затем определяем искомую точку A пересечения прямой m и плоскости Φ (по схеме решения первой позиционной задачи). Задача решена.

Задача 8. Через точку A провести прямую l , параллельную плоскости $\Gamma(m \cap n)$ и перпендикулярную прямой a (рис. 12.9).

Анализ

На положение искомой прямой l наложены два условия.

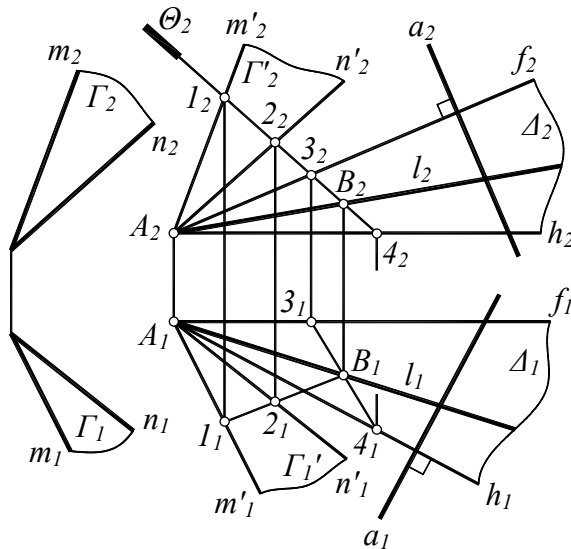


Рис. 12.9

1. Прямая l должна проходить через точку A параллельно плоскости $\Gamma(m \cap n)$. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Γ' , проходящую через точку A и параллельную плоскости Γ : $\{l: (A \in l \parallel \Gamma)\} = \Gamma'$.

2. Прямая l должна проходить через точку A и располагаться перпендикулярно к данной прямой a . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ , проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a :

$$\{l: (A \in l \perp a)\} = \Delta.$$

Искомая прямая находится на пересечении выявленных множеств:

$$l = \Gamma' \cap \Delta.$$

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку A проводим плоскость Γ' , параллельную Γ : $A \in \Gamma' \parallel \Gamma$.
2. Через точку A проводим плоскость Δ , перпендикулярную a : $A \in \Delta \perp a$.
3. Искомая прямая: $l = \Gamma' \cap \Delta$.

Графическая реализация (см. рис. 12.9)

Проведем через точку A плоскость Γ' , параллельную плоскости Γ , задав ее прямыми m', n' , параллельными прямым m, n . Проведем через A еще одну плоскость Δ , перпендикулярную к прямой a , задав ее горизонталью и фронталью в соответствии с условием теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости. Точка A – общая точка плоскостей Γ' и Δ . Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (по схеме решения второй позиционной задачи). Прямая $l = AB$ – искомая. Задача решена.

Задача 9. В треугольнике ABC построить геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек D и E (рис. 12.10).

Анализ

На искомое множество точек наложены два условия.

1. Искомое множество X_i должно принадлежать плоскости треугольника $\Gamma(ABC)$.
2. Точки множества X_i должны быть равноудалены от точек D и E . Этому условию удовлетворяют все точки срединной плоскости Θ , проходящей через середину O отрезка DE перпендикулярно к этому отрезку: $\{X_i: (|X_i - D| = |X_i - E|)\} = \Theta$.

Точки, равноудаленные от D и E , находятся на пересечении плоскостей $\Gamma(ABC)$ и Θ . Плоскости пересекаются по прямой, следовательно, искомое множество точек X_i – отрезок прямой линии, ограниченный сторонами треугольника ABC .

Исследование

Искомый элемент – прямая линия, которая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Плоскость $\Gamma(ABC)$ – задана.
2. Через середину O отрезка DE проводим срединную плоскость Θ , перпендикулярную отрезку DE : $O \in \Theta \perp DE$.
3. Искомое множество – отрезок MN линии пересечения плоскостей Γ и Θ , ограниченный сторонами треугольника ABC : $MN = \Gamma \cap \Theta$.

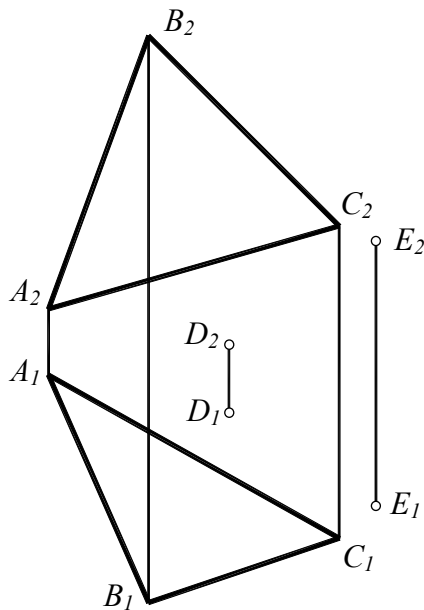


Рис. 12.10

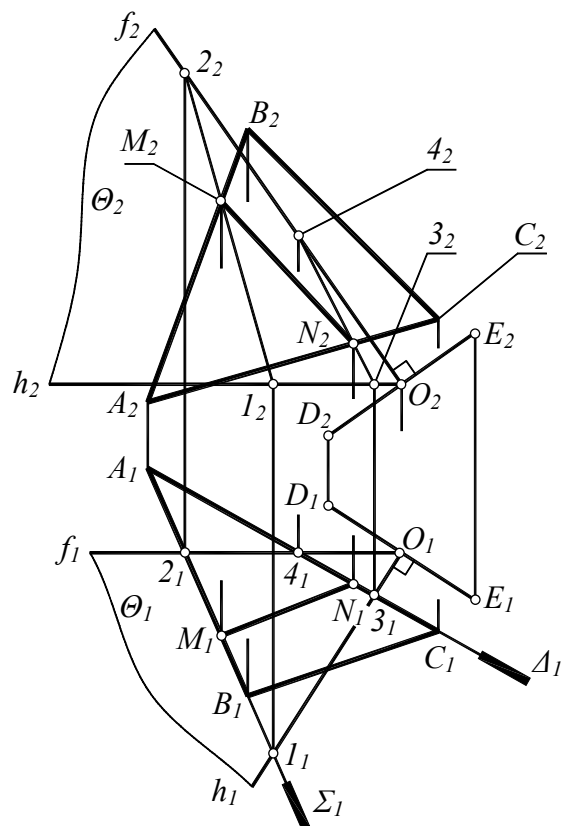


Рис. 12.11

Графическая реализация (рис. 12.11)

Через середину O отрезка DE проводим плоскость Θ , перпендикулярную этому отрезку. Плоскость Θ задана на рис. 12.11 горизонталью и фронталью, перпендикулярными к DE (см. теорему 2 о перпендикулярности прямой и плоскости). Затем с помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ и Δ определяем точки M и N пересечения сторон AB и AC треугольника ABC со срединной плоскостью Θ (по схеме решения первой позиционной задачи). Отрезок MN содержит множество точек, равноудаленных от данных точек D и E , и при этом принадлежит плоскости треугольника. Следовательно, MN – искомое геометрическое место точек. Задача решена.

Задача 10. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек A, B, C (рис. 12.12).

Анализ

На искомое множество точек X_i наложены три условия (условия равноудаленности от пар точек $A-B$, $B-C$ и $A-C$).

1. Условию равноудаленности от точек A и B удовлетворяют все точки плоскости Θ , проходящей через середину O отрезка AB перпендикулярно к этому отрезку:

$$\{X_i : (|X_i - A| = |X_i - B|)\} = \Theta.$$

2. Условию равноудаленности от точек B и C удовлетворяют все точки плоскости Θ' , проходящей через середину O' отрезка BC перпендикулярно к этому отрезку:

$$\{X_i : (|X_i - B| = |X_i - C|)\} = \Theta'.$$

3. Условие равноудаленности от точек A и C есть следствие первых двух условий. Действительно, в соответствии с условиями 1 и 2 получаем: $|X_i - A| = |X_i - B|$ и $|X_i - B| = |X_i - C|$. Отсюда следует, что $|X_i - A| = |X_i - C|$. Поэтому для решения задачи достаточно найти множество точек, удовлетворяющих только первым двум условиям, то есть найти линию пересечения плоскостей Θ и Θ' .

Исследование

Искомое множество является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости пересекаются по одной прямой. Задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через середину O отрезка AB проводим плоскость Θ , перпендикулярную отрезку AB : $O \in \Theta \perp AB$.

2. Через середину O' отрезка BC проводим плоскость Θ' , перпендикулярную отрезку BC : $O' \in \Theta' \perp BC$.

3. Искомое множество – линия пересечения плоскостей Θ и Θ' : $l = \Theta \cap \Theta'$.

Графическая реализация (см. рис. 12.12)

Через середину O отрезка AB проводим плоскость Θ , перпендикулярную отрезку AB . Плоскость Θ задана на рис. 12.12 горизонталью h и фронталью f , перпендикулярными к AB (см. теорему 2 о перпендикулярности прямой и плоскости). Затем через середину O' отрезка BC проводим плоскость Θ' , перпендикулярную отрезку BC . Плоскость Θ' задана на рис. 12.12 горизонталью h' и фронталью f' . Требуется построить линию пересечения плоскостей Θ и Θ' (решить вторую позиционную задачу).

С помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ и Σ' находим общие точки F и E срединных плоскостей Θ и Θ' . Точка F найдена как точка пересечения горизонтали $h \subset \Theta$ с плоскостью Θ' . Для этого через h проведена секущая плоскость Σ и построена линия разреза $m' = \Sigma \cap \Theta'$, параллельная горизонтали h' . На пересечении линии разреза m' с горизонталью h отмечена точка F . Аналогичным образом, с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ' найдена точка $E = h' \cap \Theta$. Для этого построена линия разреза $m = \Sigma' \cap \Theta$ (линия m параллельна горизонталью h). Затем на пересечении линии разреза m с горизонталью h' отмечена точка E . Через точки E и F проходит искомая прямая l , несущая множество точек, равноудаленных от заданных точек A, B, C .

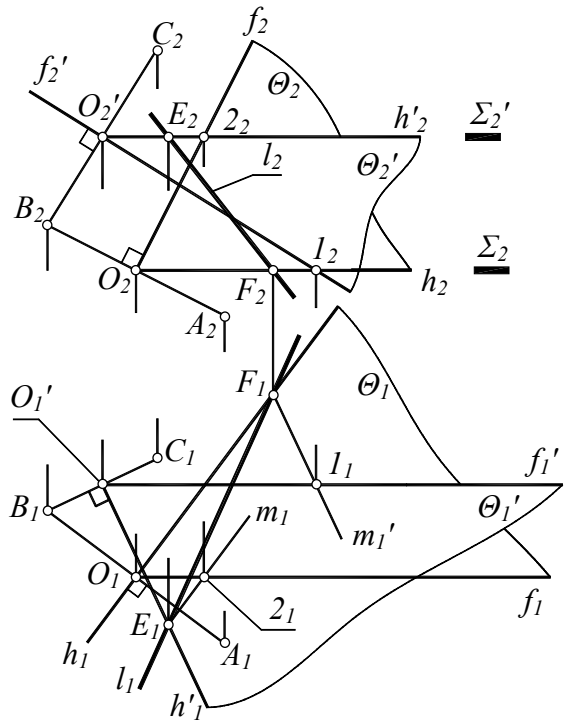


Рис. 12.12

Примечание. Задача может быть решена способом замены плоскостей проекций. Двумя последовательными заменами плоскостей проекций плоскость ABC преобразуется в плоскость уровня. Через центр окружности, проходящей через A, B, C , проводим перпендикуляр l к плоскости ABC . Прямая l – искомая, так как содержит множество точек, равноудаленных от данных точек A, B, C .

Задача 11. Найти множество точек, удаленных от фронтали f на расстояние 20 мм и от точки A – на 25 мм (рис. 12.13).

Анализ

На искомое множество точек X_i наложены два условия.

1. Условию удаленности от прямой f на расстояние 20 мм удовлетворяют все точки цилиндрической поверхности вращения Θ с осью f и радиусом 20 мм:

$$\{X_i : (|X_i - f| = 20 \text{ мм})\} = \Theta.$$

2. Условию удаленности от точки A на 25 мм удовлетворяют все точки сферы Φ с центром A и радиусом 25 мм: $\{X_i : (|X_i - A| = 25 \text{ мм})\} = \Phi$.

Искомое множество точек X_i находится на пересечении поверхностей цилиндра и сферы.

Исследование

Искомое множество является результатом пересечения двух алгебраических поверхностей второго порядка – цилиндра и сферы. Линия пересечения алгебраических поверхностей второго порядка есть алгебраическая кривая четвертого порядка. Любая точка, принадлежащая этой кривой, удовлетворяет условию задачи.

Алгоритм

Определяем линию пересечения поверхностей сферы и цилиндра, используя схему решения второй позиционной задачи.

Графическая реализация

Преобразуем чертеж так, чтобы цилиндр Θ занял проецирующее положение. С этой целью вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение плоскость проекций Π_4 , перпендикулярную оси f цилиндра.

В новой системе координат Π_2/Π_4 находим линию $BDCE$ пересечения поверхностей Θ и Φ . Проекция этой линии на плоскости Π_4 совпадает с очерком цилиндра Θ , так как поверхность этого цилиндра занимает проецирующее положение относительно Π_4 .

“Возвращаем” линию $BDCE$ в исходную систему координат Π_2/Π_1 , используя основной инвариант преобразования системы координат: *расстояние любой точки до новой плоскости проекций Π_4 равно расстоянию этой же точки до заменяемой плоскости проекций Π_1* . Дополнительные (промежуточные) точки линии $BDCE$ могут быть найдены с помощью вспомогательных секущих плоскостей, параллельных Π_2 . Построение промежуточных точек на рис. 12.13 условно не показано.

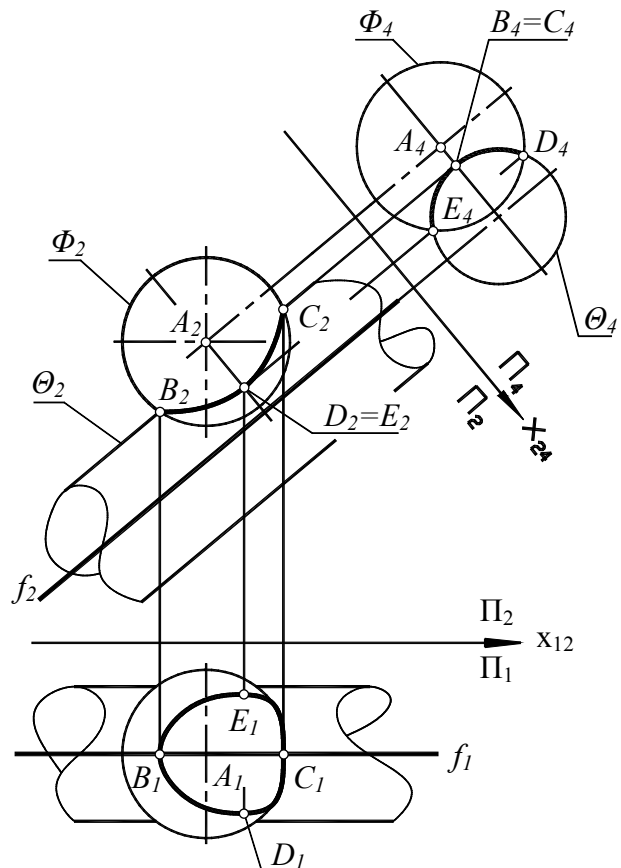


Рис. 12.13

Задача 12. Построить недостающую проекцию прямой l , параллельной прямой BC , если расстояние между l и BC равно 20 мм (рис. 12.14).

Анализ

На искомую прямую l наложены два условия.

1. Множество прямых l , фронтальные проекции которых совпадают с заданной проекцией l_2 , образуют фронтально-проецирующую плоскость Σ , проекция Σ_2 которой совпадает с фронтальной проекцией прямой l :

$$\{l: (l \rightarrow l_2)\} = \Sigma.$$

2. Множество прямых l , параллельных прямой BC и удаленных от нее на 20 мм, образуют цилиндр вращения Θ с осью BC и радиусом 20 мм:

$$\{l: (l \parallel BC, |l-BC|=20 \text{ мм})\} = \Theta.$$

Искомая прямая l находится на пересечении цилиндра Θ и плоскости Σ .

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения цилиндра вращения и плоскости Σ , параллельной оси цилиндра. Возможны три случая.

1. Плоскость Σ не пересекается с цилиндром – нет действительных решений.
2. Плоскость Σ пересекает цилиндр – получаем два различных решения.
3. Плоскость Σ касается цилиндра – получаем два совпадающих решения.

Алгоритм

Находим линию l пересечения поверхностей Θ и Σ : $l = \Theta \cap \Sigma$.

Графическая реализация (рис. 12.15)

Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы ось BC цилиндра Θ заняла проецирующее положение. С этой целью выполняем две последовательные замены плоскостей проекций.

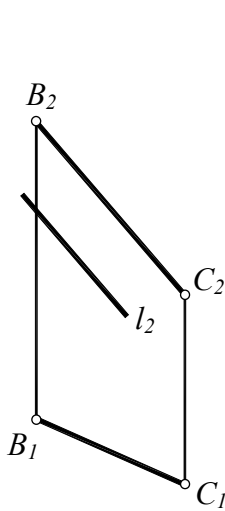


Рис. 12.14

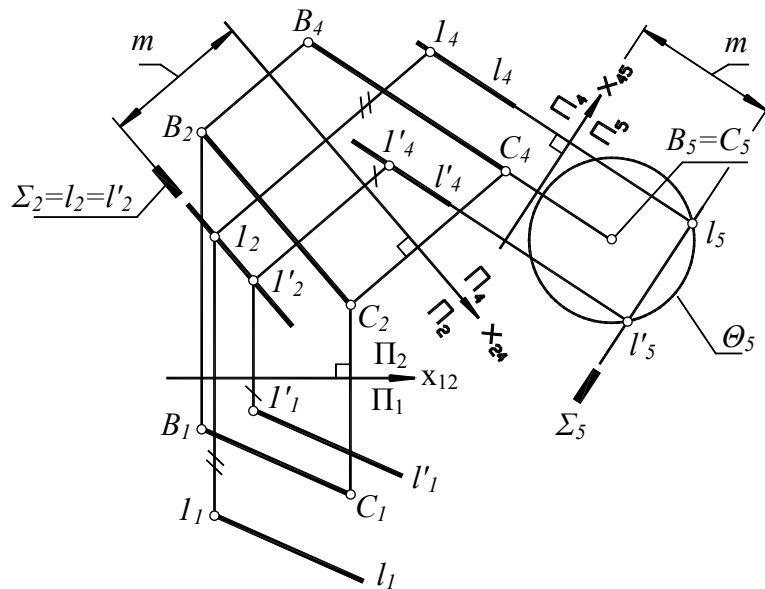


Рис. 12.15

Первая замена плоскостей проекций. Вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой BC и перпендикулярную плоскости Π_2 . Получаем новую систему координат Π_2/Π_4 , в которой прямая BC стала прямой уровня (BC параллельна Π_4). Плоскость Σ также параллельна плоскости Π_4 .

Вторая замена плоскостей проекций. В системе координат Π_2/Π_4 сохраняем плоскость Π_4 , а плоскость Π_2 заменяем плоскостью Π_5 , расположенной перпендикулярно к прямой BC . Получаем систему координат Π_4/Π_5 , в которой цилиндр Θ занимает проецирующее положение.

В системе координат Π_4/Π_5 плоскость Σ по-прежнему параллельна плоскости Π_4 , поэтому проекция Σ_5 плоскости Σ параллельна оси x_{45} , причем расстояние от Σ_5 до x_{45} на плоскости Π_5 равно расстоянию от Σ_2 до x_{24} на плоскости Π_2 (это расстояние обозначено на рис. 12.15 буквой m).

В пересечении цилиндра Θ и плоскости Σ получаем две прямые l и l' , которые удовлетворяют условиям задачи: они параллельны прямой BC и удалены от нее на 20 мм. Таким образом, в системе координат Π_4/Π_5 задача решена.

Найденные решения l и l' необходимо “возвратить” в исходную систему координат Π_1/Π_2 . Для этого в системе координат Π_4/Π_5 отмечаем на прямых l и l' произвольные точки l и l' . На плоскости Π_2 проекции этих точек принадлежат проекции l_2 прямой l .

Горизонтальные проекции l_1 и l'_1 точек l и l' определяются с учетом основного инварианта преобразования системы координат: *расстояние от любой точки до новой плоскости проекций равно расстоянию от этой же точки до заменяемой плоскости проекций.* Отсюда следует, что расстояние от l_4 до x_{24} на плоскости Π_4 равно расстоянию от l_1 до x_{12} на плоскости Π_1 . Расстояния $|l_4 - x_{24}|$ и $|l_1 - x_{12}|$ также равны между собой. Это позволяет отметить горизонтальные проекции l_1 и l'_1 точек l , l' и провести через них горизонтальные проекции l_1 и l'_1 искомых прямых (параллельно горизонтальной проекции прямой BC). Задача решена в исходной системе координат.

Вопросы для повторения

1. Какие геометрические задачи называют комбинированными (комплексными)?
2. Какие элементарные построения надо уметь выполнять на чертеже для успешного решения типовых комплексных задач? Перечислить типовые позиционные и метрические задачи, встречающиеся в процессе решения различных комбинированных задач.
3. Что означает словосочетание “геометрическое место точек”? Приведите примеры геометрических мест точек.
4. Геометрическое место точек, удаленных от точки A на расстояние R , есть сфера с центром A и радиусом R . Что представляет собой множество прямых, удаленных от точки A на расстояние R ?
5. Геометрическое место точек, удаленных от прямой a на расстояние R , есть цилиндр вращения с осью a и радиусом R . Что представляет собой множество прямых, удаленных от прямой a на расстояние R ?
6. В какой последовательности следует решать комбинированную геометрическую задачу? С чего начинается решение? Каким действием завершается решение задачи?
- 7*. Построить прямую, пересекающую четыре данные прямые a, b, c, d общего положения (рис. 12.16). Сколько решений может иметь эта задача?

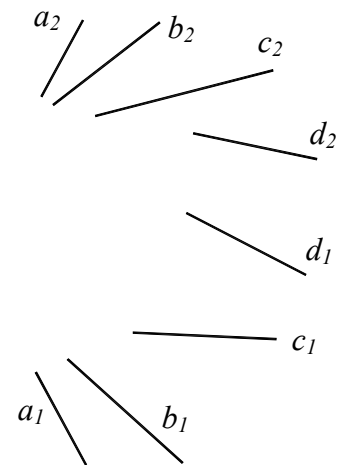


Рис. 12.16

*Задача 7 рекомендуется для решения на факультативных занятиях (с использованием средств компьютерной графики).

Лекция 13

РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построение разверток представляет важную техническую задачу, так как в промышленности широко применяются конструкции и изделия из листового материала, выполненные способом изгибания. Если поверхность представить в виде тонкой, гибкой и нерастяжимой пленки, то некоторые поверхности путем изгибания можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Такие поверхности называются *развертывающимися*, а фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется *разверткой*.

Определение. *Поверхности, которые путем изгибания можно совместить с плоскостью без складок и разрывов, называются развертывающимися. Фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой этой поверхности.*

Поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие. При развертывании поверхности взаимно однозначное соответствие между поверхностью и ее разверткой не нарушается: каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке. Из физической модели процесса развертывания поверхности на плоскость (изгибание предварительно разрезанной поверхности без ее растяжения) следуют инвариантные метрические свойства поверхности и ее развертки.

Инвариантные метрические свойства. *На поверхности и на ее развертке сохраняются равными: расстояние между точками поверхности, углы между пересекающимися линиями в точках их пересечения и величины площадей фигур на поверхностях.*

Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и некоторые криволинейные поверхности. В дифференциальной геометрии доказывается, что к развертываемым криволинейным поверхностям относятся только линейчатые поверхности, состоящие исключительно из параболических точек. Касательная плоскость к такой поверхности касается ее не в одной точке, а вдоль прямолинейной образующей, проходящей через эту точку (см. п. 11.2). Отсюда следует **признак развертываемости:** *у линейчатой развертываемой поверхности касательные плоскости, проведенные во всех точках одной прямолинейной образующей, совпадают.*

Среди криволинейных поверхностей указанным признаком развертываемости на плоскость обладают только торсовые поверхности. Действительно, физическая модель образования торсовой поверхности общего вида (“перекатывание” плоскости по криволинейным направляющим a , b и соединение точек касания прямолинейной образующей, см. п. 6.2.6) предполагает существование плоскости, касающейся поверхности вдоль прямолинейной образующей. Иными словами, наличие признака развертываемости “заложено” в самом определении торсовой поверхности.

Конические и цилиндрические поверхности являются частным случаем торсовой поверхности, когда одна из криволинейных направляющих a , b вырождается в собственную или несобственную точку (см. рис. 6.26). Например, если направляющая a выродилась в собственную точку A , то получаем коническую поверхность с вершиной A и направляющей b . Если точка A – несобственная (бесконечно удалена по заданному направлению a), то получается цилиндрическая поверхность с направляющей b , образующие которой параллельны направлению a .

Таким образом, поскольку конические и цилиндрические поверхности являются частным случаем торсовой поверхности, то они так же, как и торсовые поверхности общего вида, обладают свойством развертываемости.

Вывод. Свойством развертываемости на плоскость обладают, кроме многогранных поверхностей, лишь торсовые поверхности (в частности – конические и цилиндрические поверхности).

Различают *точные* и *приближенные* развертки развертываемых поверхностей. Для любой многогранной поверхности может быть построена ее точная развертка. Действительно, если дан двухпроекционный чертеж некоторого многогранника (например, пирамиды), то на основе чертежа графическими приемами, пользуясь линейкой и циркулем, можно определить истинные длины всех ребер и построить точную развертку всех граней пирамиды.

Если же на чертеже дана какая-либо криволинейная развертываемая поверхность (например, поверхность эллиптического конуса), то с помощью линейки и циркуля может быть построена только ее приближенная развертка.

Конечно, в некоторых случаях можно построить точную развертку поверхности, используя уравнение поверхности или числа, определяющие ее размеры. Так, если дан прямой конус вращения высотой h и диаметром основания d , то этими двумя числами поверхность определена. По ним можно вычислить размеры развертки, представляющей собой круговой сектор. Рассчитав с любой желаемой степенью точности радиус сектора и его центральный угол, можно построить точную развертку конуса. Однако на практике таким “графоаналитическим” приемом пользуются редко.

В начертательной геометрии поверхность задают с помощью чертежа, а развертку строят на основе чертежа графическими способами. Поэтому развертка любой развертываемой криволинейной поверхности (конической, цилиндрической, торсовой), которая строится графически, является приближенной.

Общий способ приближенного построения развертки произвольной развертываемой поверхности заключается в следующем. *Заданную развертываемую поверхность Φ заменяют (аппроксимируют) вписанной или описанной многогранной поверхностью Φ' . Затем строят точную развертку аппроксимирующей многогранной поверхности Φ' и принимают ее за приближенную развертку данной поверхности Φ .*

Хотя все остальные поверхности (не относящиеся к многогранным, цилиндрическим, коническим, торсовым) теоретически не развертываются на плоскость, инженерная практика, тем не менее, требует построения их “разверток”. Для неразвертываемых поверхностей строят так называемые *условные* развертки.

13.1. Построение разверток поверхностей многогранников

Напомним, что многогранником называют пространственную геометрическую фигуру, со всех сторон ограниченную плоскими многоугольниками (гранями). Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, которая получается при совмещении граней многогранника с плоскостью. Процесс построения развертки поверхности многогранника сводится к построению истинных величин его граней, что непосредственно связано с определением натуральной (истинной) длины каждого ребра многогранника. Рассмотрим построение разверток наиболее распространенных многогранных поверхностей – поверхностей пирамид и призм.

13.1.1. Развертка пирамиды

Поверхность n -угольной пирамиды включает в себя основание (плоский n -угольник) и боковую поверхность, состоящую из n треугольников. Для построения развертки пирамиды необходимо определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания. На рис. 13.1, *a* изображена треугольная пирамида $ABCS$. Основанием

пирамиды является треугольник ABC , расположенный в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций, поэтому стороны основания AB , BC , AC проецируются на Π_1 в натуральную величину.

Длины боковых ребер пирамиды определяются с помощью вспомогательных прямоугольных треугольников. Вспомогательные треугольники имеют общий катет S_2O_0 (разность высот концов боковых ребер пирамиды). Другой катет равен длине горизонтальной проекции соответствующего ребра. Например, в треугольнике $S_2O_0A_0$ катет S_2O_0 равен разности высот точек S и A . Другой катет O_0A_0 равен горизонтальной проекции ребра SA : $O_0A_0=S_1A_1$. Истинная длина ребра SA равна величине гипотенузы S_2A_0 . Аналогично длина ребра SB равна S_2B_0 , а длина ребра SC равна S_2C_0 .

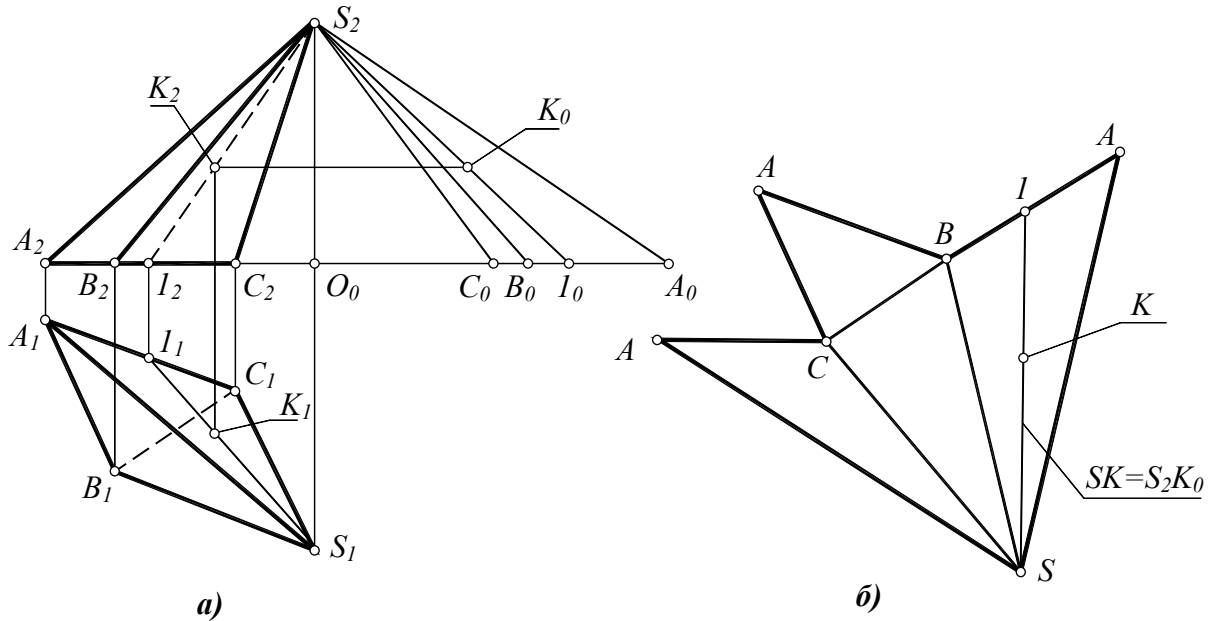


Рис. 13.1

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из трех примыкающих друг к другу треугольников (рис. 13.1, б), конгруэнтных соответствующим граням пирамиды. Например, треугольник ACS (развертка соответствующей грани пирамиды) построен по известной длине стороны AC и найденным на рис. 13.1, а длинам боковых ребер пирамиды AS и CS . К развертке боковых граней пирамиды пристраиваем ее основание ABC .

Пусть на поверхности пирамиды отмечена точка K . Чтобы найти положение этой точки на развертке, проводим через K вспомогательную прямую $S-K-I$, отмечаем на развертке точку I и с помощью прямоугольного треугольника $S_2O_0I_0$ находим истинную длину отрезка $SK=S_2K_0$. Откладывая этот отрезок на развертке от точки S вдоль прямой $S-I$, находим точку K .

13.1.2. Развертка призмы

На рис. 13.2, а изображена наклонная призма. Призма расположена таким образом, что ее основание параллельно горизонтальной плоскости проекций, поэтому на Π_1 основание ABC призмы проецируется в натуральную величину $A_1B_1C_1$. Боковые ребра призмы параллельны фронтальной плоскости проекций, поэтому на Π_2 они проецируются без искажения.

Развертка боковой поверхности призмы может быть получена *способом нормального сечения*. Для этого боковую поверхность призмы рассекают фронтально-

проецирующей плоскостью Σ , перпендикулярной боковым ребрам призмы. Истинную форму нормального сечения $I_4 2_4 3_4$ определяют способом замены плоскостей проекций.

Чтобы построить развертку призмы, нормальное сечение $I_4 2_4 3_4$ “разворачиваем” в прямую линию нормального сечения $I 2 3 I$ и через каждую точку проводим перпендикуляры к этой прямой (рис. 13.2, б). На каждом из построенных перпендикуляров откладываем по обе стороны от линии нормального сечения отрезки боковых ребер, измеренные на плоскости Π_2 до нормального сечения и после него. Например, отрезки $A-I$ и $I-A'$ на развертке равны отрезкам $A_2 I_2$ и $I_2 A'_2$ на фронтальной проекции призмы. Точно так же $B-2=B_2 2_2$, $B'-2=B'_2 2_2$ и $C-3=C_2 3_2$, $C'-3=C'_2 3_2$. Соединяя точки A, B, C и A', B', C' , получаем развертку боковой поверхности призмы.

Присоединяя к развертке боковой поверхности призмы оба основания (треугольники ABC и $A'B'C'$), получаем полную развертку призмы (см. рис. 13.2, б). На развертку призмы нанесена точка K , принадлежащая грани $ABB'A'$. Для построения на развертке точки K использована вспомогательная прямая EE' , проходящая через точку K и параллельная ребрам призмы.

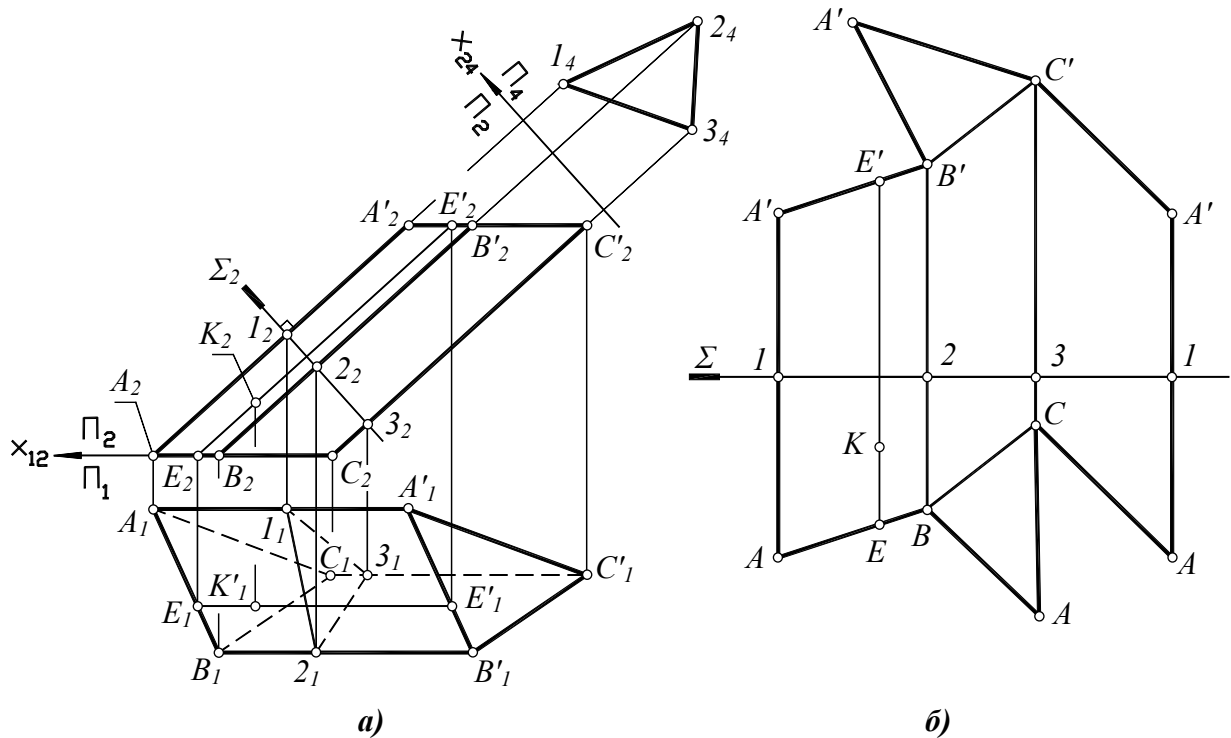


Рис. 13.2

Кроме способа нормального сечения, для построения развертки поверхности призмы может быть использован способ раскатки (частный случай способа нормальных сечений) или способ триангуляции, когда каждая грань призмы делится диагональю на два треугольника [6].

13.2. Построение разверток кривых развертывающихся поверхностей

Напомним, что различают точные и приближенные развертки развертывающихся поверхностей. Точная развертка строится графоаналитическим способом по известным размерам поверхности с использованием ее уравнения. Например, точная развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра высотой H и радиусом основания r имеет форму прямоугольника с размерами сторон H и $2\pi r$.

Приближенная развертка строится графическим способом с использованием чертежа поверхности. Чтобы построить приближенную развертку какой-либо развертываемой поверхности, надо ее заменить (аппроксимировать) многогранной поверхностью. Точную развертку этой многогранной поверхности принимают за приближенную развертку данной развертываемой поверхности.

13.2.1. Точная развертка поверхности прямого кругового конуса

Точная развертка поверхности прямого кругового конуса, образующая которого равна l и радиус основания r (рис. 13.3, а), имеет форму кругового сектора с радиусом l и центральным углом $\alpha = 360^\circ r/l$ (рис. 13.3, б).

Задача. На поверхности конуса отмечена точка K . Построить точку K на развертке конуса.

Через точку K на поверхности конуса проведем его образующую $S-3$ (см. рис. 13.3, а). Найдем положение образующей $S-3$ на развертке конуса. Для этого дугу $1-3$ кругового основания конуса заменяем ломаной линией 123 . Участки этой ломаной линии откладываем от точки 1 на развертке конуса (вдоль дуги кругового сектора). Получаем на развертке точку 3 , через которую проходит образующая $S-3$.

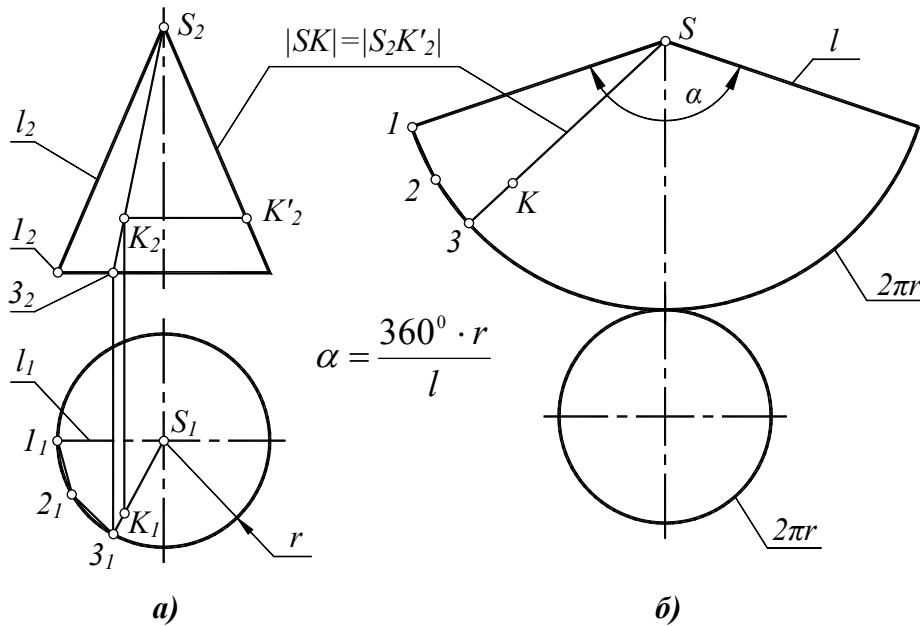


Рис. 13.3

Расстояние SK от вершины S до искомой точки K определено на рис. 13.3, а способом вращения вокруг проецирующей прямой: мысленно вращаем отрезок SK вокруг горизонтально-проецирующей оси конуса (см. п. 5.5). Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет положение фронтали (совместится с фронтальной проекцией очерковой образующей конуса). Фронтальная проекция S_2K_2' повернутого отрезка определяет натуральную величину отрезка SK . Расстояние SK на развертке равно расстоянию S_2K_2' на фронтальной проекции конуса.

Заметим, что построение точки K на развертке выполнено приближенным графическим способом: дуга $1-3$ кругового основания конуса заменена ломаной линией 123 . Хотя развертка конуса была построена точно, но точка K на развертке найдена приближенно, поэтому решение задачи в целом следует считать приближенным.

13.2.2. Точная развертка поверхности усеченного кругового цилиндра

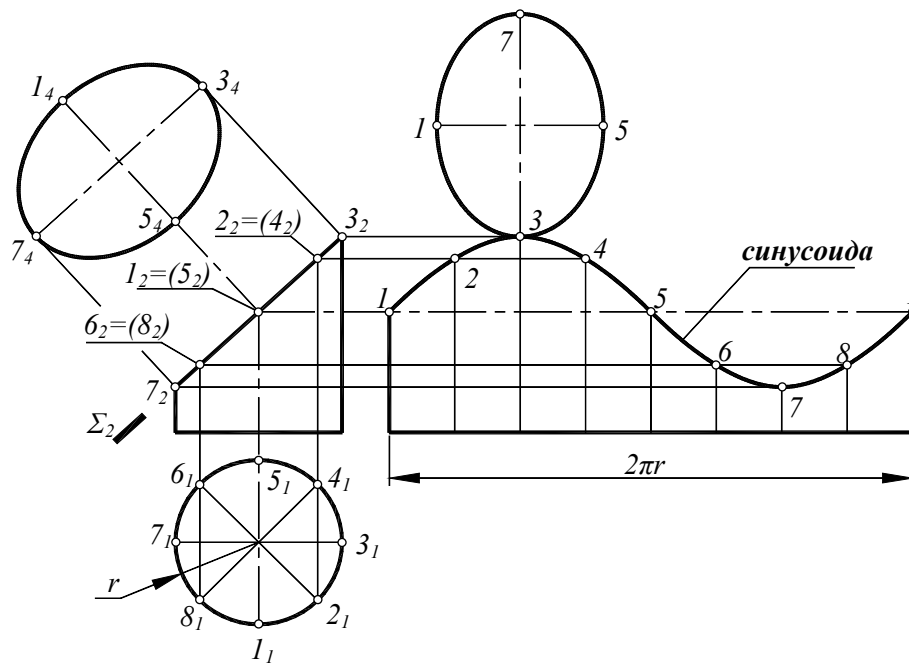


Рис. 13.4

На рис. 13.4 представлена развертка косорассеченного цилиндра. Верхняя часть цилиндра вращения “срезана” наклонной плоскостью Σ . Фигура косоугольного сечения представляет собой эллипс. На развертке цилиндра этот эллипс “переходит” в синусоиду, в чем можно убедиться следующим образом.

Пусть по наклонному сечению цилиндра (эллипсу) движется точка A (рис. 13.5). Координата x_A точки A равна отрезку A_1P_1 и вычисляется по формуле $x_A = r \cdot \sin \varphi$, где r – радиус цилиндра. Высота z_A точки A , отсчитываемая от уровня точки I , определяется формулой $z_A = x_A \cdot \operatorname{tg} \beta$. Подставляя во вторую формулу вместо координаты x_A ее выражение из первой формулы, получаем: $z_A = k \cdot \sin \varphi$, где $k = r \cdot \operatorname{tg} \beta$. Таким образом, высота точки, движущейся по линии наклонного сечения цилиндра, пропорциональна синусу угла поворота φ точки A . При изменении угла φ от 0° до 360° точка A “пробегает” всю линию сечения (эллипс), а на развертке цилиндра получается полная волна синусоиды.

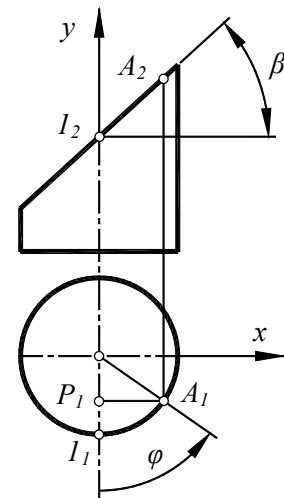


Рис. 13.5

13.2.3. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса

Напомним, что для построения приближенной развертки развертывающейся поверхности надо ее аппроксимировать (приближенно заменить) многогранной поверхностью. Заменим поверхность конуса поверхностью вписанной в него пирамиды.

На рис. 13.6, а показана правильная 12-угольная пирамида, вписанная в прямой круговой конус. Основание пирамиды – правильный 12-угольник, вписанный в круговое основание конуса. Поверхность конуса приближенно заменена двенадцатью одинаковыми треугольниками (гранями пирамиды, вписанной в конус). Это геометрическое

действие (аппроксимация криволинейной поверхности сеткой треугольников) называют *триангуляцией*.

Определение. *Триангуляция* – замена (аппроксимация) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней.

После аппроксимации поверхности конуса поверхностью вписанной в него пирамиды надо построить точную развертку пирамиды. Размеры всех боковых ребер пирамиды равны между собой и равны длине l очерковой образующей конуса.

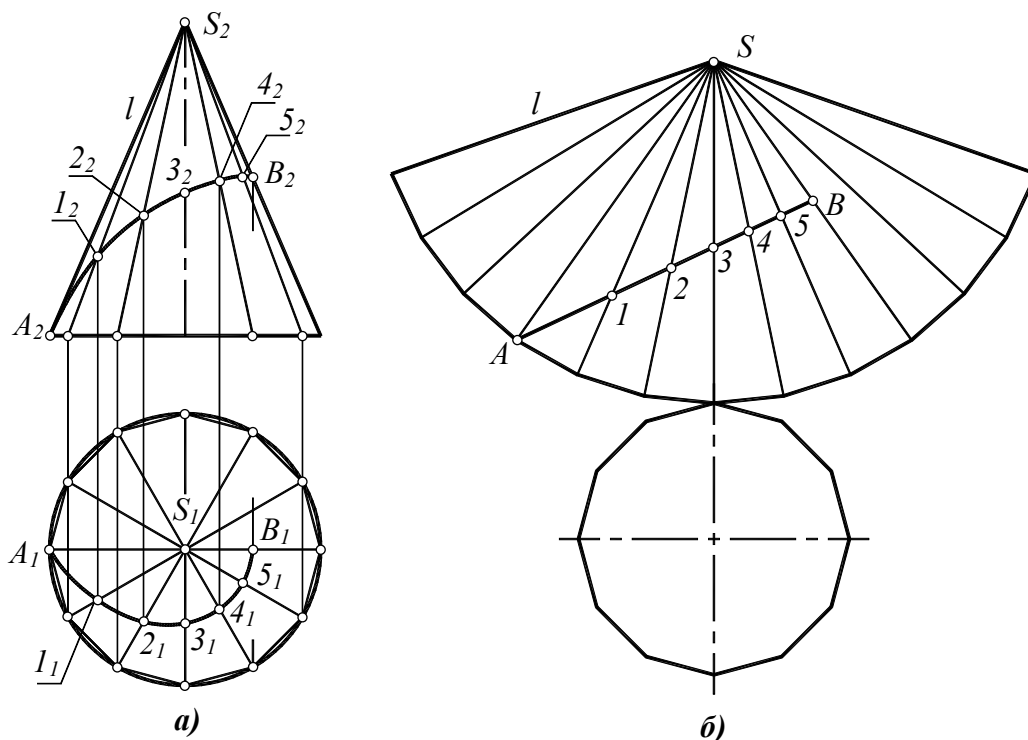


Рис. 13.6

Чтобы построить развертку пирамиды, на свободном месте чертежа произвольно выбираем положение вершины развертки – точку S , и строим 12 одинаковых треугольников с общей вершиной S . Боковые стороны каждого треугольника равны длине l очерковой образующей конуса. Основание каждого треугольника равно длине стороны правильного многоугольника, вписанного в круговое основание конуса. Получаем развертку вписанной в конус пирамиды в виде 12 треугольников со смежными сторонами. Построенная таким образом точная развертка пирамиды принимается за приближенную развертку боковой поверхности конуса. Основание пирамиды (правильный 12-угольник) принимается за развертку основания конуса (рис. 13.6, б).

Отметим на поверхности конуса две точки A и B (см. рис. 13.6, а). Кратчайший путь между двумя точками, проложенный по данной поверхности, называют *геодезической линией*.

Задача. *На поверхности конуса построить кратчайший путь (геодезическую линию) между точками A и B (см. рис. 13.6, а).*

Построение геодезической линии AB на поверхности выполняется с помощью развертки. Прямой линии на развертке соответствует кратчайший путь на поверхности (почему?). Переносим точки A, B с чертежа конуса на развертку и соединяем A и B отрезком прямой (см. рис. 13.6, б). Затем на отрезке AB отмечаем промежуточные точки $1, 2, \dots, 5$ и “возвращаем” эти точки на чертеж конуса.

Соединяя плавной кривой фронтальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем фронтальную проекцию геодезической линии AB . Соединяя плавной кривой горизон-

тальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем горизонтальную проекцию геодезической линии AB . Задача решена приближенно, так как для решения использована приближенная развертка конической поверхности.

13.2.4. Приближенная развертка поверхности наклонного конуса

На рис. 13.7 построена приближенная развертка поверхности наклонного конуса с круговым основанием. Для построения приближенной развертки поверхность конуса заменена поверхностью вписанной в него двенадцатиугольной пирамиды.

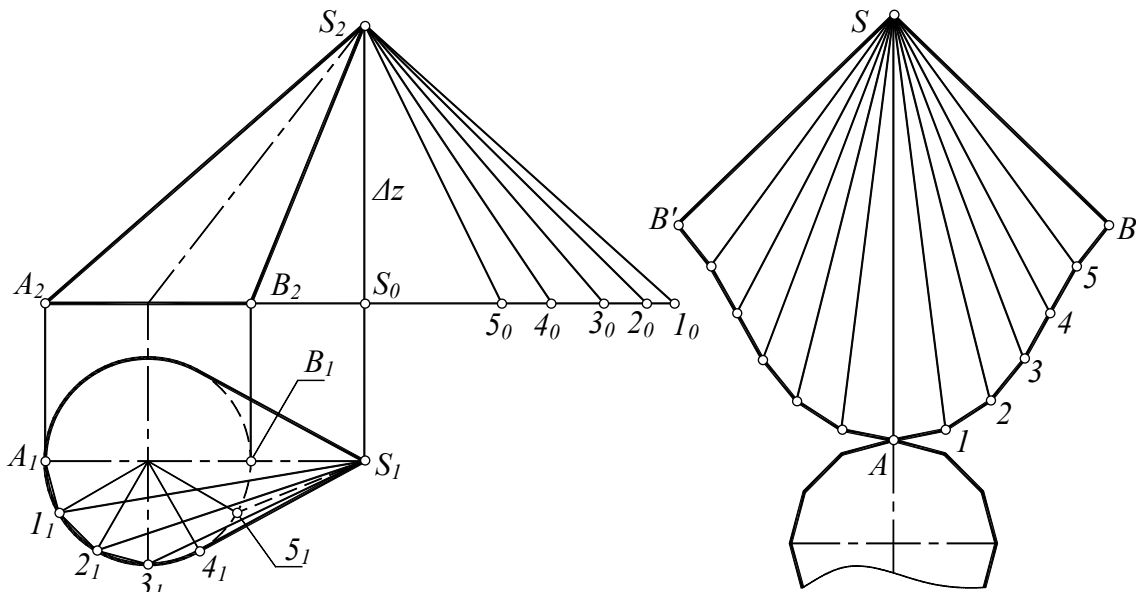


Рис. 13.7

Поверхность конуса имеет плоскость симметрии, поэтому развертка представляет собой симметричную фигуру. В плоскости симметрии лежит самая короткая образующая SB , по которой сделан разрез поверхности. Самая длинная образующая SA , также лежащая в плоскости симметрии, является осью симметрии развертки поверхности.

Натуральные величины образующих определены способом вспомогательного прямоугольного треугольника. Например, истинная длина образующей $S-1$ найдена как гипотенуза S_2l_0 прямоугольного треугольника $S_2S_0l_0$. Один катет этого треугольника – разность высот Δz концов образующей (эта величина одинакова для всех образующих конуса). Другой катет S_0l_0 равен длине S_1l_1 горизонтальной проекции образующей.

От оси симметрии SA строим примыкающие друг к другу треугольники – шесть треугольников в одну сторону и шесть в другую. Все треугольники имеют общую вершину S . Каждый из треугольников строится по трем сторонам. Боковые стороны каждого треугольника равны истинным величинам ребер вписанной в конус пирамиды, а основание треугольника равно длине стороны многоугольника, вписанного в круговое основание конуса.

13.2.5. Приближенная развертка поверхности усеченного конуса

Дан усеченный конус с круговым основанием, наклонной осью и плоскостью симметрии $\Phi \parallel \Pi_2$ (рис. 13.8, а). Вписываем в конус 8-угольную усеченную пирамиду, вершина которой совпадает с вершиной S усеченного конуса (рис. 13.8, б). Точную развертку поверхности вписанной усеченной пирамиды будем считать приближенной разверткой усеченного конуса.

Размеры боковых ребер пирамиды от вершины S до основания определены способом вспомогательного прямоугольного треугольника (см. рис. 13.8, б). Например, длина ребра $S-I$ найдена как гипотенуза S_2I_0 прямоугольного треугольника $S_2B_2I_0$. Катет S_2B_2 этого треугольника – разность высот концов ребер, одинаковая для всех ребер пирамиды. Другой катет B_2I_0 равен длине S_1I_1 горизонтальной проекции ребра $S-I$.

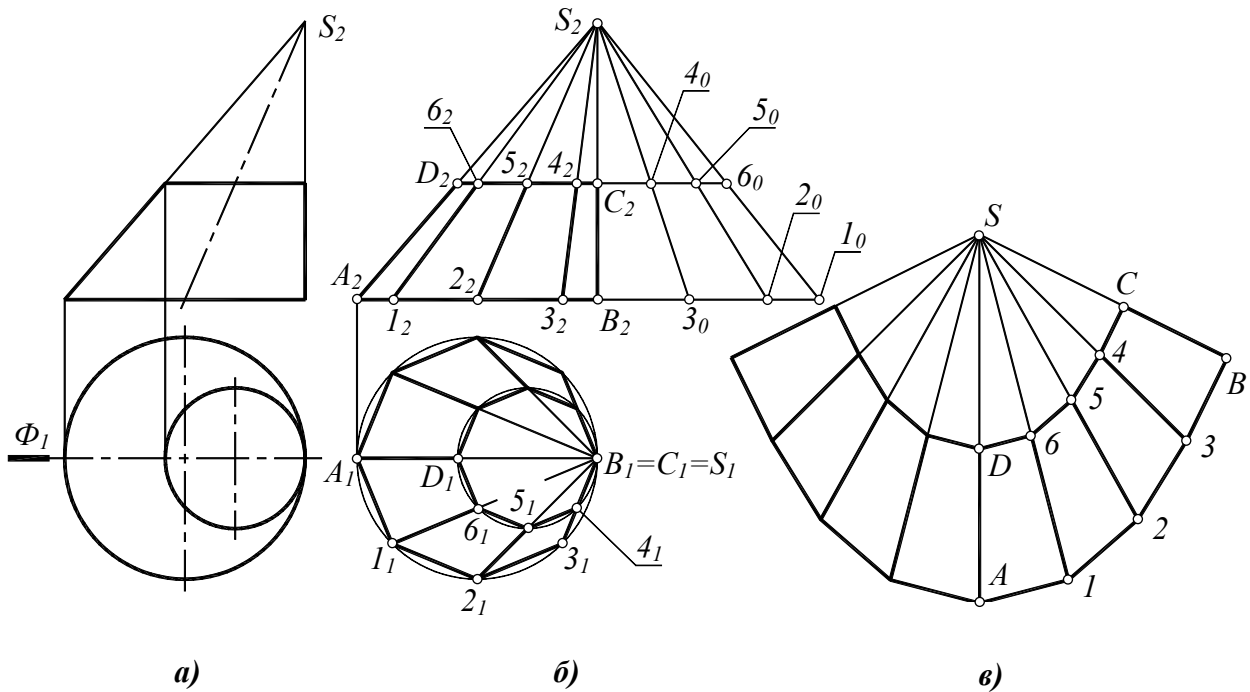


Рис. 13.8

Считая, что пирамида не усечена, построим ее развертку. Развертка каждой грани представляет собой треугольник, боковые стороны которого равны длинам соответствующих ребер неусеченной пирамиды (они определены на рис. 13.8, б), а длина основания равна длине стороны 8-угольника, вписанного в круговое основание конуса. Развертка поверхности неусеченной пирамиды представляет собой 8 примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной S (рис. 13.8, в).

Пирамида усечена плоскостью, параллельной ее основанию, поэтому истинная форма каждой грани усеченной пирамиды – трапеция. Развертка поверхности усеченной пирамиды представляет собой примыкающие друг к другу трапеции. Отложим на развертке неусеченной пирамиды истинную длину какого-нибудь ребра усеченной пирамиды (например, длину ребра BC , изображенного на P_2 в натуральную величину). Через точку C на развертке проводим отрезок $C-4$, параллельный отрезку $B-3$. Затем из точки 4 проводим отрезок $4-5$, параллельный отрезку $3-2$. Продолжая построение, получаем развертку усеченной пирамиды в виде набора из восьми примыкающих друг к другу трапеций (см. рис. 13.8, в).

Развертки нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды (не показанные на чертеже), имеют форму правильных 8-угольников, вписанных в нижнее и верхнее круговые основания данного усеченного конуса.

13.2.6. Приближенная развертка поверхности наклонного цилиндра

Дан наклонный цилиндр с круговым основанием (рис. 13.9, а). Вписываем в цилиндр 8-угольную наклонную призму (рис. 13.9, б). Точную развертку поверхности призмы будем считать приближенной разверткой поверхности наклонного цилиндра.

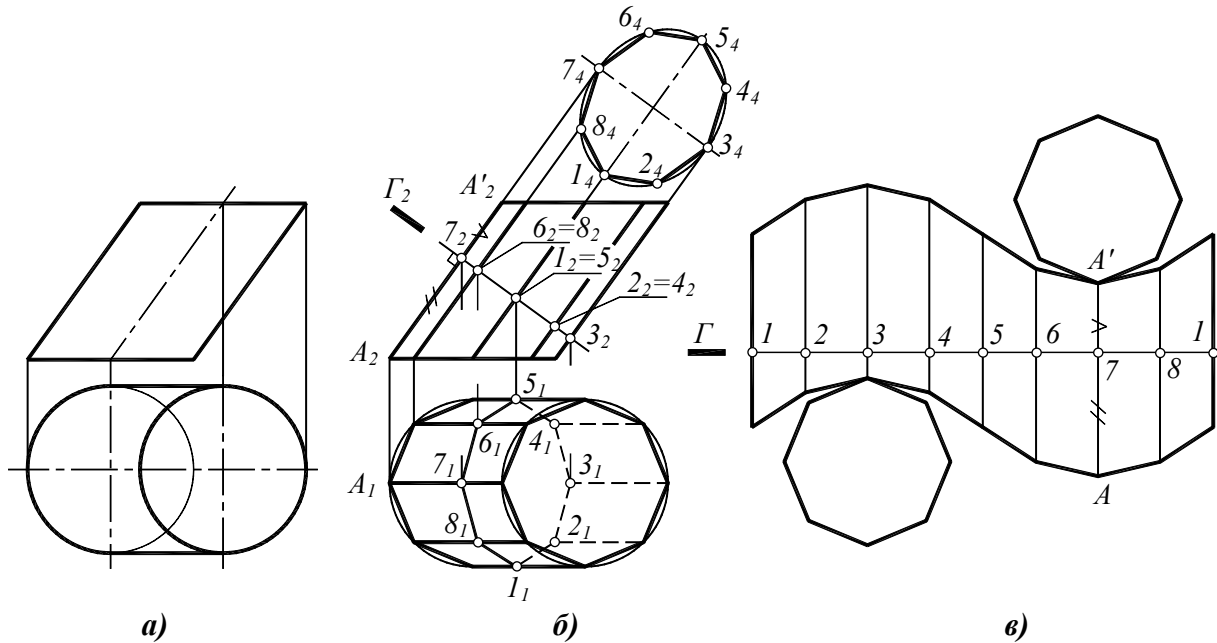


Рис. 13.9

Развертку боковой поверхности призмы получают способом нормального сечения, в соответствии с которым боковую поверхность призмы рассекают фронтально-проецирующей плоскостью Γ , перпендикулярной ее боковым ребрам (см. п. 13.1.2). Истинная форма нормального сечения призмы $1_4 2_4 \dots 8_4$ определена способом замены плоскостей проекций. Нормальное сечение $1_4 2_4 \dots 8_4$ “разворачиваем” в прямую $1-2-\dots-8-1$ и через каждую точку проводим прямую, перпендикулярную линии нормального сечения (рис. 13.9, в). На каждом из построенных перпендикуляров откладываем отрезки боковых ребер, измеренные на Π_2 до и после нормального сечения. Например, отрезки $A-7$ и $A'-7$ на развертке равны отрезкам $A_2 7_2$ и $A'_2 7_2$ на плоскости Π_2 . Концы отрезков соединяем ломаными линиями. К развертке боковой поверхности призмы добавляем ее основания – два многоугольника (см. рис. 13.9, в).

13.3. Построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей

Многие сооружения часто ограничены неразвертывающимися поверхностями. Между тем условия их постройки заставляют изготавливать эти поверхности из листового материала. Поэтому составление условных разверток неразвертывающихся поверхностей представляет собой важную техническую задачу. Например, поверхность корпуса морского судна состоит из отсеков криволинейных поверхностей, которые выкраивают из металлических листов, а затем склепывают друг с другом. Образуется кривая (а в сущности – многогранная) поверхность корпуса.

Пусть требуется построить условную развертку некоторой неразвертывающейся поверхности Φ . Разбиваем поверхность Φ на отдельные участки (отсеки). Каждый отсек аппроксимируем (приближенно заменяем) отсеком какой-либо развертывающейся поверхности – многогранником, цилиндром или конусом (в зависимости от формы

данной поверхности Φ). В результате вместо исходной неразвертывающейся поверхности получаем поверхность Φ' , состоящую из участков развертывающихся поверхностей. Выполняем построение разверток всех участков составной поверхности Φ' . Совокупность полученных разверток принимаем за условную развертку поверхности Φ .

13.3.1. Построение условных разверток способом триангуляции

Напомним, что триангуляцией называют замену (аппроксимацию) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Произвольная неразвертывающаяся поверхность Φ может быть аппроксимирована многогранной поверхностью Φ' с треугольными гранями. Развертка полученной многогранной поверхности Φ' принимается за условную развертку данной поверхности Φ .

Пусть требуется построить условную развертку косоугольной плоскости, “натянутой” на пространственный (неплоский) четырехугольник $ABCD$ (рис. 13.10). Косая плоскость (гиперболический параболоид) – неразвертывающаяся поверхность, образованная прямолинейной образующей, движущейся параллельно заданной плоскости параллелизма и пересекающей прямолинейные направляющие (см. п. 6.2.4). В рассматриваемом примере направляющие прямые – скрещивающиеся стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$, а плоскость Π_1 – плоскость параллелизма. Горизонтальная образующая скользит по направляющим AD и BC , последовательно занимая положения AB , $1-1'$, $2-2'$, DC .

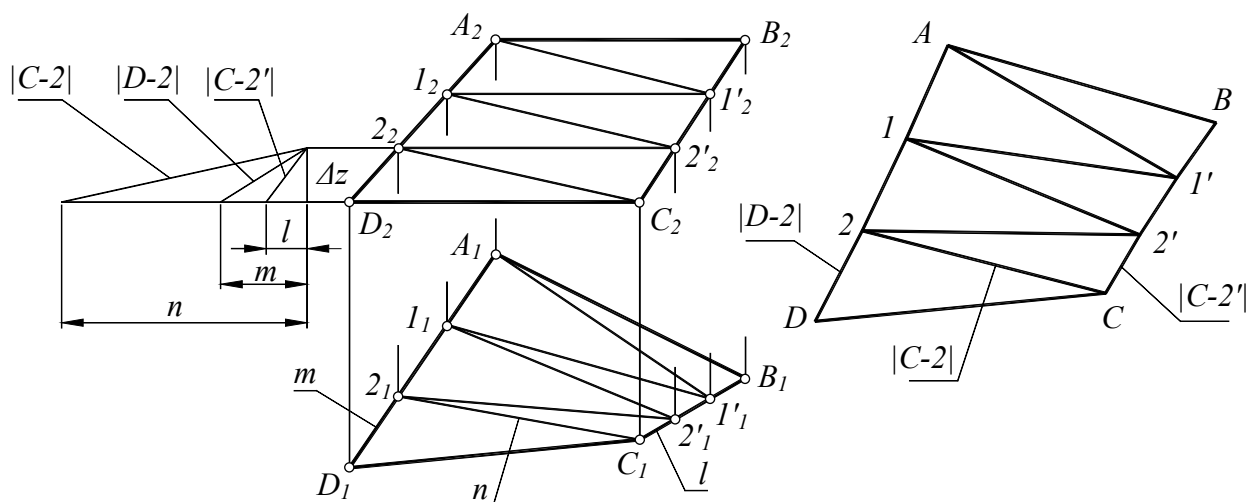


Рис. 13.10

Чтобы выполнить триангуляцию, предварительно разбиваем отсек $ABCD$ косоугольной плоскости на части с помощью образующих. Для упрощения построений поверхность разбита образующими AB , $1-1'$, $2-2'$, DC только на три части, каждая из которых ограничена пространственным четырехугольником.

Проводя диагонали полученных неплоских четырехугольников, заменяем каждую часть поверхности двумя треугольниками. Например, нижний участок, ограниченный пространственным четырехугольником $D-2-2'-C$, заменен двумя треугольниками $D2C$ и $C22'$. В результате заданный отсек $ABCD$ косоугольной плоскости заменен (аппроксимирован) многогранной поверхностью, состоящей из шести треугольников. При увеличении числа разбиений точность аппроксимации возрастает.

Для построения развертки полученной шестигранной поверхности надо определить истинные размеры сторон ее треугольных граней. На рис. 13.10 показано определение (способом прямоугольного треугольника) истинной величины отрезков $D-2$, $C-2'$ и $C-2$. Для определения $|D-2|$ построен вспомогательный прямоугольный треугольник с кате-

тами Δz и m , где Δz – разность высот концов отрезка $D-2$, а $m=D_1 2_1$ – длина его горизонтальной проекции. Для определения $|C-2'|$ построен прямоугольный треугольник с катетами Δz и l , где $l=C_1 2'_1$. Для определения $|C-2|$ построен прямоугольный треугольник с катетами Δz и n , где $n=C_1 2_1$. Гипотенузы вспомогательных прямоугольных треугольников равны истинным величинам соответствующих отрезков.

Истинные размеры остальных ребер аппроксимирующей многогранной поверхности определяются аналогично (с учетом того, что горизонтальные отрезки AB , $1-1'$, $2-2'$, DC изображаются на Π_1 в натуральную величину). После определения истинных размеров всех ребер выполняем построение развертки, состоящей из примыкающих друг к другу треугольников. Каждый из треугольников строится “по трем сторонам”. Полученную точную развертку многогранной поверхности, состоящей из треугольных граней, принимаем за условную развертку исходной неразвертываемой поверхности.

Примечание. Практически вся земная поверхность “покрыта” триангуляционной сетью опорных геодезических пунктов с таким расчетом, чтобы они являлись вершинами треугольников, по возможности близких к равносторонним. В результате истинная поверхность земли аппроксимируется сетью треугольников (с размерами сторон на территории России 4...25 км). Геодезические пункты отмечаются заложенными в землю бетонными пилонами, над которыми сооружаются вышки. Координаты каждого геодезического пункта (широта, долгота, высота над уровнем моря) определены с большой точностью. Сеть геодезических пунктов используется как для геодезических работ, так и в системах глобального позиционирования (GPS, ГЛОНАСС).

13.3.2. Построение условных разверток поверхностей вращения

Для построения условных разверток неразвертываемых поверхностей вращения за аппроксимирующие поверхности принимают цилиндры и конусы. В соответствии с этим различают два способа построения условных разверток поверхностей вращения: *способ цилиндров* и *способ конусов*.

Пусть требуется построить условную развертку поверхности вращения (рис. 13.11). При построении условной развертки *способом цилиндров* данная поверхность мысленно разрезается меридиональными плоскостями Γ , Γ' ,... (то есть плоскостями, проходящими через ее ось вращения), на несколько равных частей (рис. 13.12, а). Каждая часть заменяется отрезком цилиндрической поверхности Φ , которая касается заданной поверхности вдоль ее меридиана m . В результате поверхность вращения приближенно заменяется (аппроксимируется) составной поверхностью, состоящей из одинаковых цилиндрических “лепестков” Φ с горизонтальными образующими.

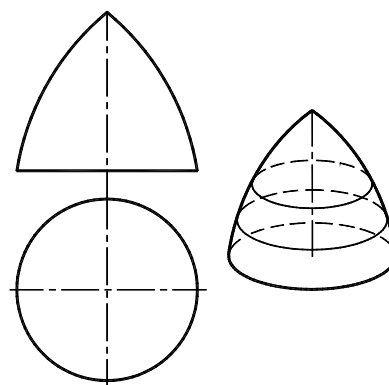


Рис. 13.11

Каждый лепесток можно приближенно развернуть на плоскость. Совокупность разверток всех лепестков составляет условную развертку поверхности вращения.

При построении условной развертки поверхности вращения *способом конусов* данная поверхность, как и при использовании способа цилиндров, мысленно разрезается на несколько частей. Но секущие плоскости Σ , Σ' ,... проводят не через ось вращения, а перпендикулярно ей. Вся поверхность делится секущими плоскостями на несколько горизонтальных “поясков” (рис. 13.12, б). Каждый поясик заменяется отрезком конической поверхности Θ . В результате заданная поверхность вращения приближенно заменяется (аппроксимируется) составной поверхностью, состоящей из разных конических поясков Θ , стыкующихся между собой по параллелям данной поверхности вращения.

Каждый конический пояс, представляющий собой поверхность усеченного кругового конуса, можно развернуть на плоскость. Совокупность разверток всех поясков составляет условную развертку поверхности.

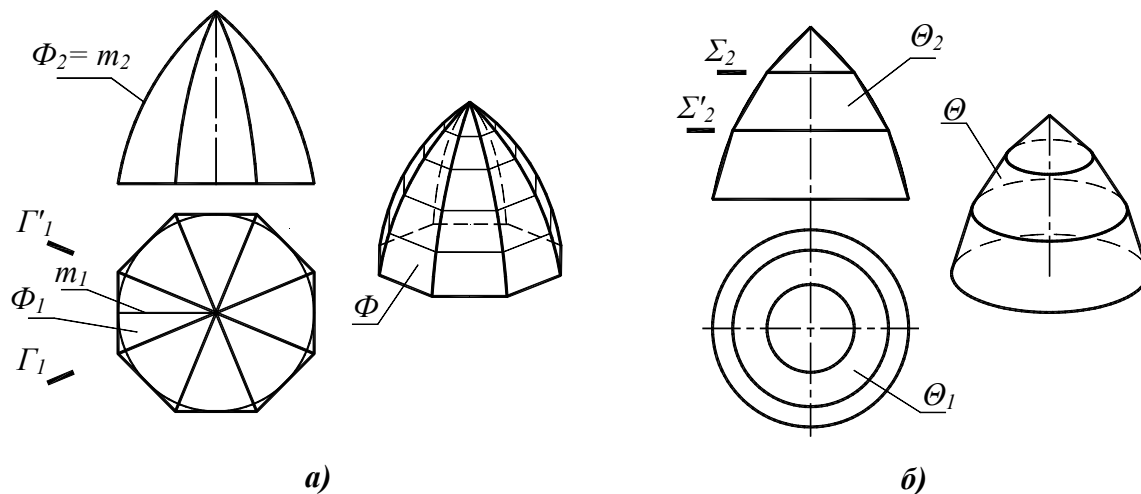


Рис. 13.12

Рассмотрим конструктивное построение условной развертки неразвертывающейся поверхности вращения способом цилиндров и способом конусов.

13.3.2.1. Способ цилиндров

Данную поверхность вращения мысленно разрезаем меридиональными плоскостями Γ, Γ', \dots на равные участки (рис. 13.13, а). Развертки одинаковых участков поверхно-

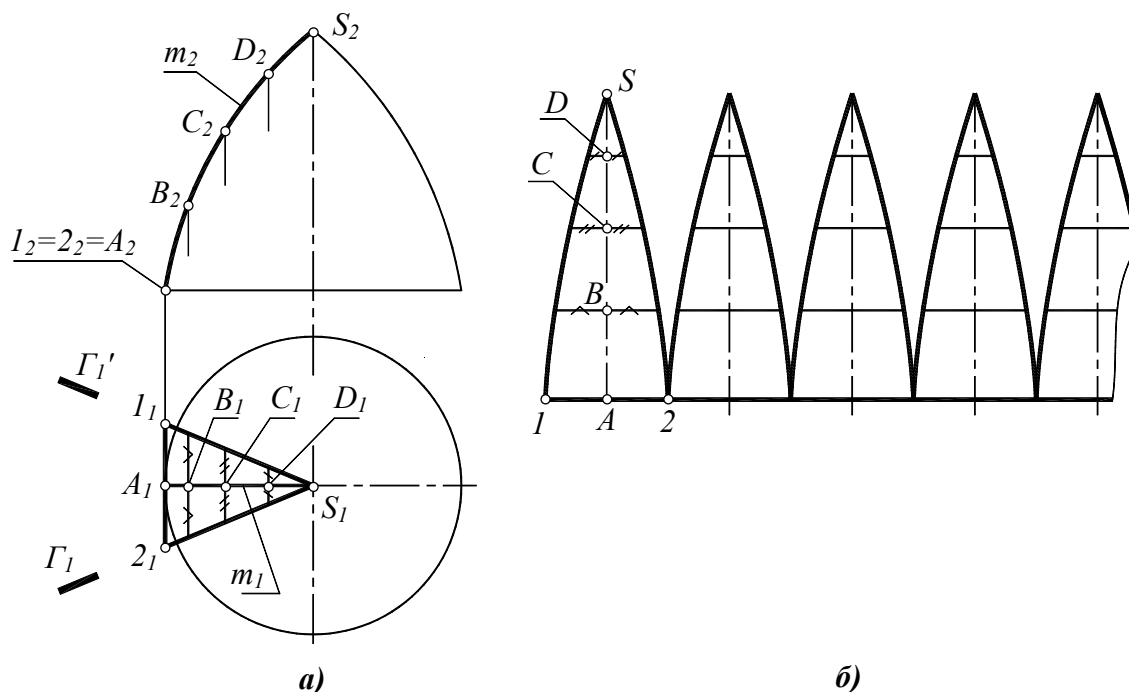


Рис. 13.13

сти одинаковы, поэтому достаточно построить условную развертку лишь одного участка. На рис. 13.13, а поверхность разрезана на 8 участков. Показан только один участок, выделенный плоскостями Γ, Γ' . Отмечен средний меридиан $m=AS$ этого участка.

Заменяем выделенный участок поверхности вращения участком (отсеком) Φ цилиндрической поверхности, касающейся заменяемого участка вдоль среднего меридиана m . Меридиан m расположен во фронтальной плоскости уровня, поэтому дуга AS меридиана m изображается на Π_2 в натуральную величину.

Цилиндрический отсек Φ , как и выделенный участок поверхности вращения, ограничен плоскостями Γ, Γ' . Поверхность отсека Φ занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому его фронтальная проекция совпадает на чертеже с фронтальной проекцией m_2 меридиана m . Горизонтальная проекция отсека Φ – треугольник $1_1 2_1 S_1$.

Таким образом, участок исходной поверхности вращения, ограниченный плоскостями Γ, Γ' , приближенно заменяется (аппроксимируется) отсеком Φ цилиндрической поверхности, ограниченным теми же плоскостями Γ, Γ' . Направляющая линия поверхности Φ – меридиан m , являющийся одновременно нормальным сечением цилиндра Φ ; образующие цилиндра Φ горизонтальны (см. рис. 13.13, а).

Для приближенного построения развертки отсека Φ заменяем направляющую $m=AS$ ломаной линией $ABCDS$, фронтальная проекция $A_2 B_2 C_2 D_2 S_2$ которой указывает истинную длину всех ее звеньев. В соответствии со способом нормального сечения, спрямляем ломаную линию $A_2 B_2 C_2 D_2 S_2$ в отрезок $ABCDS$, начерченный на свободном месте чертежа (рис. 13.13, б). Через точки A, B, C, D проводим прямые, перпендикулярные AS , на которых откладываем отрезки касательных, проведенных к соответствующим параллелям. Эти отрезки ограничены плоскостями Γ, Γ' . Например, через точку A проведен отрезок $1-2$ касательной к круговому основанию данного тела вращения, ограниченный плоскостями Γ, Γ' .

Соединяя концы отрезков касательных плавной кривой, получаем приближенную развертку одного цилиндрического “лепестка” $1-2-S$. Полная условная развертка данной поверхности вращения состоит из восьми таких лепестков (см. рис. 13.13, б). Точность построения условной развертки увеличивается с увеличением числа участков, на которые разделена данная поверхность.

13.3.2.2. Способ конусов

Данную поверхность вращения мысленно разрезаем плоскостями, перпендикулярными ее оси, на несколько частей – “поясков”. Для упрощения построений поверхность разрезана плоскостями Δ, Δ' всего на три части (рис. 13.14, а). Меридиан AS данной поверхности вращения заменяем ломаной линией $ABCS$, что позволяет аппроксимировать “пояски” отсеками конических поверхностей вращения, образующие которых совпадают со звеньями ломаной линии $ABCS$. Верхний участок поверхности (от вершины S до параллели c) заменен конической поверхностью с вершиной S и образующей CS . Средний участок (между параллелями b и c) заменен отсеком поверхности усеченного конуса с образующей BC и вершиной S' . Нижний участок (от основания a до параллели b) заменяется отсеком поверхности усеченного конуса с образующей AB и вершиной S'' . Все отсеки конических поверхностей имеют общую ось вращения, совпадающую с осью данной поверхности.

После аппроксимации данной поверхности вращения тремя отсеками конических поверхностей построение условной развертки сводится к построению разверток поверхностей трех конусов. Построение этих разверток, показанное на рис. 13.14, б, выполняется точно (см. п. 13.2.1). Например, развертка нижнего отсека конической поверхности (с направляющей a , образующей AB и вершиной S'') представляет собой часть сектора, ограниченного двумя концентрическими дугами окружностей с радиусами $|AS''|$ и $|BS''|$. Центральный угол сектора вычисляется по формуле $\alpha = 360^\circ r/l$, где $l = |AS''|$, r – радиус параллели a .

Длины дуг окружностей, соприкасающихся в точках B, C , равны между собой, так как они соответствуют параллелям b, c данной поверхности.

Совокупность разверток отсеков конических поверхностей, показанная на рис. 13.14, б, принимается за условную развертку данной неразвертываемой поверхности вращения. Точность построения условной развертки увеличивается с увеличением числа участков, на которые разделена данная поверхность.

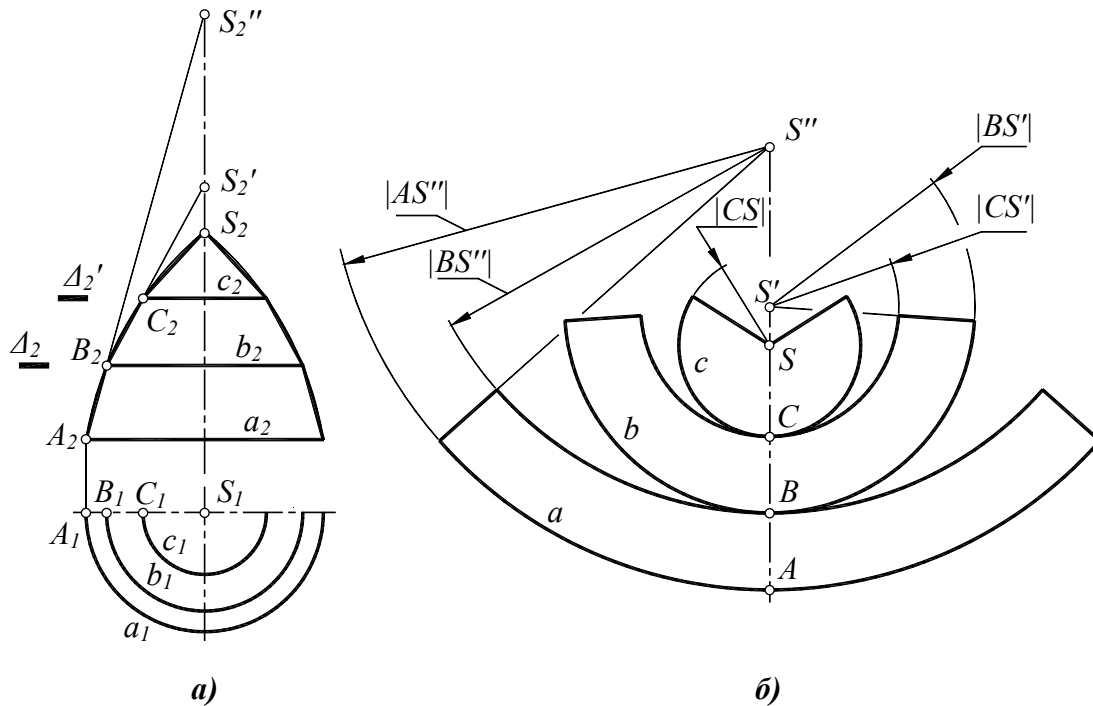


Рис. 13.14

Вопросы для повторения

1. Какие поверхности называют развертывающимися? Что называют разверткой поверхности?
2. Какие поверхности являются развертывающимися?
3. Какие свойства развертываемой поверхности сохраняются на ее развертке?
4. Какая развертка называется точной и какая – приближенной? Для каких поверхностей составляют условные развертки?
5. Что представляют собой развертки боковых поверхностей: а) прямой призмы; б) прямого кругового цилиндра; в) прямого кругового конуса?
6. Что называют геодезической линией на поверхности? Каким способом построить геодезическую линию между указанными на чертеже точками развертываемой поверхности?
7. В чем заключается способ триангуляции?
8. Какими способами может быть построена условная развертка неразвертываемой поверхности вращения?

Лекция 14

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Компьютерная графика – наука, предметом изучения которой является создание, обработка и хранение изображений с помощью ЭВМ.

Компьютерная графика используется в работе архитекторов, строителей, конструкторов, разработчиков новой техники. В разработке технических устройств принимают участие не только конструкторы, но и технологи, специалисты по инженерным расчетам, дизайнеры, экономисты и др. Чтобы согласовать их работу, упростить и облегчить процесс взаимопонимания, сохранения и передачи необходимой информации, создается так называемая *система автоматизированного проектирования*.

14.1. Система автоматизированного проектирования

Системой автоматизированного проектирования (САПР) называют комплекс технических и программных средств, предназначенных для автоматизации процесса проектирования.

Система автоматизированного проектирования может использоваться в следующих целях:

- для разработки геометрической модели изделия (CAD);
- для выполнения инженерных расчетов (CAE);
- для технологической подготовки производства (CAM).

Аббревиатура CAD (computer-aided design) означает использование компьютера для разработки геометрической модели изделия. Существует множество программных средств для создания геометрических моделей. Например, широко применяются программы ArchiCAD (для архитекторов и строителей), AutoCAD (для инженеров-механиков) и другие.

Термин CAE (computer-aided engineering) обозначает комплекс программных средств, предназначенных для выполнения инженерных расчетов.

Для подготовки и организации процесса производства на станках с числовым программным управлением используют автоматизированную систему технологической подготовки производства CAM (computer-aided manufacturing).

Универсальная САПР, позволяющая решать как задачи геометрического моделирования и расчета, так и технологической подготовки производства, обозначается аббревиатурой CAD/CAE/CAM.

Для разных технических отраслей разрабатываются разные САПР. Например, для конструкторов легких спортивных самолетов и для разработчиков металлургического оборудования требуются совершенно разные программные средства, базы данных и методики расчета. Поэтому существуют сотни специализированных САПР, в которых используются самые разные программные средства и массивы справочной информации. Объединяет их один общий признак – любую САПР возможно разработать и практически реализовать только с помощью ЭВМ. Произошедшую в конце 20 века повсеместную компьютеризацию всех сторон человеческой деятельности совершенно обобщенно называют *информационной революцией*.

14.2. Информационные революции

В истории развития цивилизации произошло несколько информационных революций. *Первая информационная революция* связана с изобретением письменности. Появи-

лась возможность передачи знаний от поколения к поколению. *Вторая революция* (середина 16 века) вызвана изобретением книгопечатания. *Третью информационную революцию* (конец 19 века) связывают с открытием и практическим использованием электричества. Появились телеграф, телефон, магнитофон, радиосвязь, что позволило оперативно передавать и накапливать информацию.

Четвертая информационная революция (70-е годы 20 века) обусловлена изобретением микропроцессорной технологии и появлением персонального компьютера. Особенно большое влияние на развитие компьютерной техники оказал открытый в 1988 году GMR-эффект (аббревиатура физического термина Giant MagnetoResistive – гигантское магнитное сопротивление). GMR-эффект – это свойство сверхтонких (толщиной 1...5 нанометров) металлических пленок очень сильно изменять свое электрическое сопротивление под действием переменного магнитного поля.

Один нанометр – это десять ангстрем. В ангстремах измеряют межатомное расстояние в кристаллической решетке твердого вещества. Например, в кристаллической решетке железа расстояние между атомами составляет около 3 ангстрем, то есть 0,3 нанометра. Следовательно, в металлической пленке толщиной 3 нанометра “умещается” всего 10 слоев атомов железа. Такая сверхтонкая пленка обладает особыми свойствами, в частности, демонстрирует GMR-эффект. На изменении физических свойств вещества при уменьшении размеров его частиц до наноуровня основаны современные нанотехнологии.

Используя сверхтонкие пленки из магнитного материала, удалось разработать так называемые GMR-сенсоры (миниатюрные сверхчувствительные датчики, реагирующие на изменение магнитного поля изменением своего электрического сопротивления). Применение таких датчиков для записи и считывания информации с магнитных дисков привело к резкому увеличению быстродействия и объема памяти современных персональных компьютеров. За два последних десятилетия объем памяти возрос от 0,3Gb до 1000Gb, то есть более чем в 3000 раз.

Такое существенное улучшение технических характеристик компьютера привело к появлению разнообразных графических программ, позволяющих выполнять не только обычные плоские чертежи и изображения, но и реализовать так называемую *трехмерную графику*.

14.3. Двумерная и трехмерная графика

Двумерная графика (иногда ее называют 2D-графика) – это построение плоских изображений (чертежей, графиков, диаграмм, схем и т.п.). Например, на экране компьютера можно решать задачи по начертательной геометрии точно так же, как это делается на листе бумаги. Вместо линейки и циркуля учащийся вызывает команды “начертить отрезок” или “начертить окружность”. В этом случае компьютер используется как обычный кульман (кульман – чертежная доска на подставке, к которой кнопками прикрепляется лист ватмана; ватман – плотная бумага для черчения).

Трехмерная графика, или 3D-графика (от английского three dimensions – три измерения) – раздел компьютерной графики, включающий в себя совокупность приемов и программных средств, предназначенных для изображения объемных фигур на экране компьютера.

3D-моделирование – процесс создания виртуальной трехмерной модели объекта. Трехмерная модель существует в матрично-цифровой форме и фиксируется в памяти компьютера. Матрицы содержат координаты характерных точек объекта и коэффициенты уравнений, описывающих криволинейные участки моделируемой фигуры.

С помощью компьютерных средств эти виртуальные фигуры, существующие в цифровом виде, проецируются на плоскость экрана компьютера. Для повышения наглядности получаемого двумерного изображения, для зрительного придания ему “объемности” применяются разнообразные способы визуализации (скрытие невидимых линий, тонирование, оттенение и др.). При этом может достигаться очень высокая степень наглядности (“фотореалистичность”).

Создается впечатление, будто компьютер исполняет роль физически неосуществимого “трехмерного кульмана”, позволяющего чертить не на плоскости, а непосредственно в трехмерном пространстве. Разумеется, на экране компьютера мы видим не 3D-модель объекта (3D-модель существует только в цифровой форме!), а ее проекцию на плоскость экрана монитора.

Нетрудно увидеть аналогию между трехмерной графикой и обычной фотокиносъемкой. В обоих случаях связь между фигурами пространства и их изображениями устанавливается посредством проецирования. Различие состоит в том, что при фотографировании выполняется проецирование на плоскость фотопленки некоего реально существующего объекта, а при 3D-моделировании мы видим на экране компьютера проекцию виртуальной 3D-модели, существующей в матрично-цифровой форме.

Таким образом, в основе трехмерной графики, как и в основе всей начертательной геометрии, лежит *метод проецирования* (см. лекцию 1).

14.4. Аксонометрия как теоретическая основа трехмерной графики

Для формирования на плоскости или на экране компьютера наглядного и вместе с тем обратимого изображения объемной фигуры используется *аксонометрический чертеж* (кратко – аксонометрия).

До сих пор мы рассматривали “двухкартинные” чертежи, составленные из двух проекций объекта. Такой чертеж обладает свойством обратимости, то есть позволяет определить форму и размеры объекта, но не обладает наглядностью.

Чтобы составить чертеж, обладающий одновременно как наглядностью, так и обратимостью, к изображаемому пространственному объекту Φ “жестко прикрепляют” ортогональную систему координат $x_0y_0z_0$ с отмеченными на осях x_0, y_0, z_0 единичными отрезками. Фигуру Φ и прикрепленную к ней систему координат рассматривают как единый объект, который параллельно проецируют на какую-либо плоскость Π .

На рис. 14.1 показаны три изображения $MNKLS$ пирамиды $M_0N_0K_0L_0S_0$ (пирамида проецировалась параллельными лучами на плоскость Π). Изображение на рис. 14.1, *а* – не обратимо. Ни форма, ни тем более размеры объекта – неизвестны. Можно лишь предполагать, что показана четырехугольная пирамида. На рис. 14.1, *б* дополнительно указана проекция S_1 вершины S_0 на плоскость основания. Форма фигуры стала понятнее, но обратимость не обеспечена.

И, наконец, на рис. 14.1, *в* представлено изображение пирамиды вместе с прикрепленной к пирамиде ортогональной системой координат (основание пирамиды совмещено с плоскостью x_0y_0). Полученное изображение обладает свойством обратимости, так как с его помощью можно определить координаты всех точек пирамиды, а значит – все ее размеры. Например, точка M имеет координаты $M(2, 5, 0)$. Такое наглядное и вместе с тем обратимое изображение называют аксонометрическим чертежом.

Определение 1. *Аксонометрический чертеж на плоскости Π – это параллельная проекция на плоскость Π изображаемого объекта и жестко связанной с ним ортогональной системы координат, на осях которой отмечены отрезки единичной длины. Плоскость Π называют аксонометрической плоскостью проекций.*

Обратимость аксонометрического чертежа достигается не только за счет наличия на нем проекций координатных осей. Например, если на аксонометрическом чертеже пирамиды (см. рис. 14.1, в) не указать точку S_1 (эта точка – изображение ортогональной проекции вершины пирамиды S_0 на координатную плоскость x_0y_0), то чертеж утратит определенность. Мы не сумеем определить ни форму, ни высоту пирамиды, несмотря на наличие осей координат. Точку S_1 называют *вторичной проекцией* точки S_0 .

Определение 2. Вторичная проекция S_1 точки S_0 – это изображение (на плоскости проекций Π) ортогональной проекции точки S_0 на какую-либо координатную плоскость системы координат $x_0y_0z_0$, жестко связанной с изображаемой объемной фигурой.

Иначе говоря, вторичная проекция точки – это “проекция проекции” этой точки. Так, точка S_1 изображает не вершину пирамиды, а проекцию вершины на координатную плоскость x_0y_0 , жестко связанную с основанием пирамиды (см. рис. 14.1, в).

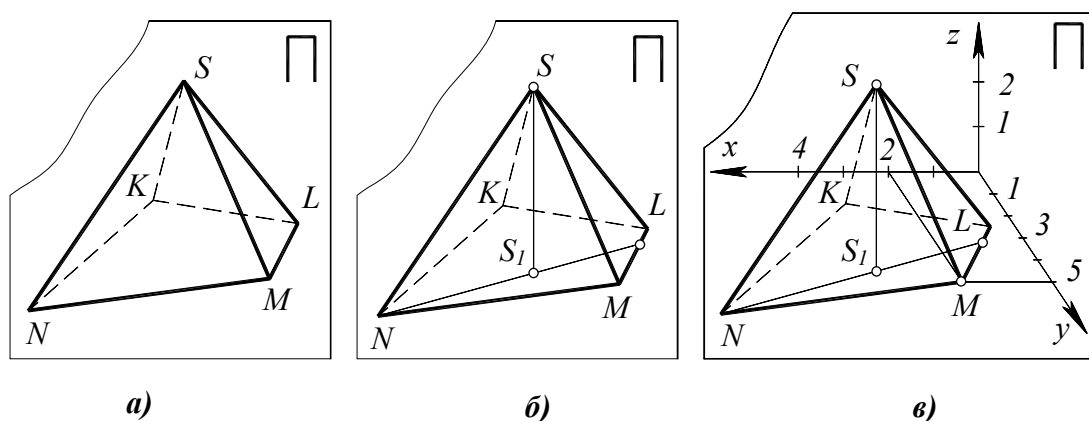


Рис. 14.1

Таким образом, на аксонометрическом чертеже, как и на двухкартинном чертеже Монжа, *любая точка обязательно задается двумя своими проекциями*. Например, на рис. 14.1, в вершина S_0 пирамиды задана своей проекцией S (ее называют *аксонометрической проекцией*) и вторичной проекцией S_1 .

Правило. Аксонометрический чертеж трехмерного объекта только в том случае обладает свойством обратимости, если на нем можно указать вторичную проекцию любой точки изображенного на нем объекта.

14.4.1. Выбор плоскости проекций и направления проецирования

Аксонометрическая плоскость проекций Π , на которую проецируется заданный объект, может быть произвольно расположена в пространстве относительно данного объекта. В САД-системах при изображении виртуальных 3D-фигур на экране компьютера плоскость проекций совпадает с плоскостью экрана, а изображаемая фигура может перемещаться или поворачиваться для обеспечения необходимого ракурса.

Направление проецирования также может быть выбрано произвольным образом. Если проецирующие лучи наклонены к плоскости проекций Π под углом, отличным от прямого, то такая аксонометрия называется *косоугольной*.

Наиболее естественный и наглядный образ объемной фигуры достигается, если проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций. Такой вид проецирования называют *ортогональной аксонометрией*. Для формирования изображений виртуальных 3D-объектов в компьютерных САД-системах обычно используют ортогональную аксонометрию (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости экрана).

14.4.2. Показатели искажения

Напомним, что мы связали с изображаемым объектом тройку координатных осей x_0, y_0, z_0 . Аксонометрическая плоскость проекций Π в общем случае пересекает все три оси координат (рис. 14.2, а). Проекции осей x_0, y_0, z_0 на аксонометрическую плоскость проекций Π обозначим буквами x, y, z и назовем аксонометрическими осями координат.

Определение. Аксонометрическими осями координат x, y, z называют проекции (на аксонометрическую плоскость проекций Π) осей x_0, y_0, z_0 , жестко связанных с изображаемым трехмерным объектом.

Оси x_0, y_0, z_0 наклонены к плоскости Π , поэтому отрезки, начерченные вдоль этих осей, проецируются на плоскость Π с искажением. Показателем искажения называют отношение длины проекции отрезка к длине самого отрезка. Показатель искажения по аксонометрической оси x обозначают буквой u , по y – буквой v , по z – буквой w . Пусть, например, вдоль координатной оси z_0 отложен отрезок длиной 10 мм, а длина его проекции на плоскости Π равна 7 мм. Тогда показатель искажения по аксонометрической оси z равен $w=0,7$. Очевидно, $u=\cos\alpha$, $v=\cos\beta$, $w=\cos\gamma$, где α, β, γ – углы наклона координатных осей x_0, y_0, z_0 к аксонометрической плоскости проекций Π .

В общем случае, при произвольно выбранной плоскости проекций и произвольно назначенном направлении проецирования, показатели искажения отличаются друг от друга: $u \neq v \neq w$. Такую аксонометрию называют *триметрией*. Если два показателя искажения совпадают, получаем *диметрию*. Если показатели искажения равны ($u=v=w$), то такую аксонометрическую проекцию называют *изометрией*.

Показатель искажения может принимать значения от нуля до единицы. Если изображаемый отрезок параллелен плоскости проекций Π , то показатель искажения равен единице. Если отрезок располагается перпендикулярно к плоскости проекций, то показатель искажения равен нулю. Чем больше показатель искажения по аксонометрической оси отличается от единицы, тем сильнее искажен размер фигуры вдоль этой оси.

Любая аксонометрия (изометрия, диметрия, триметрия) может быть косоугольной или ортогональной. Например, можно начертить заданный объект в ортогональной изометрии, а можно – в косоугольной диметрии.

Известно, что в ортогональной аксонометрии сумма квадратов показателей искажения равна двум: $u^2 + v^2 + w^2 = 2$. Доказательство этого утверждения выполняется средствами элементарной тригонометрии [3].

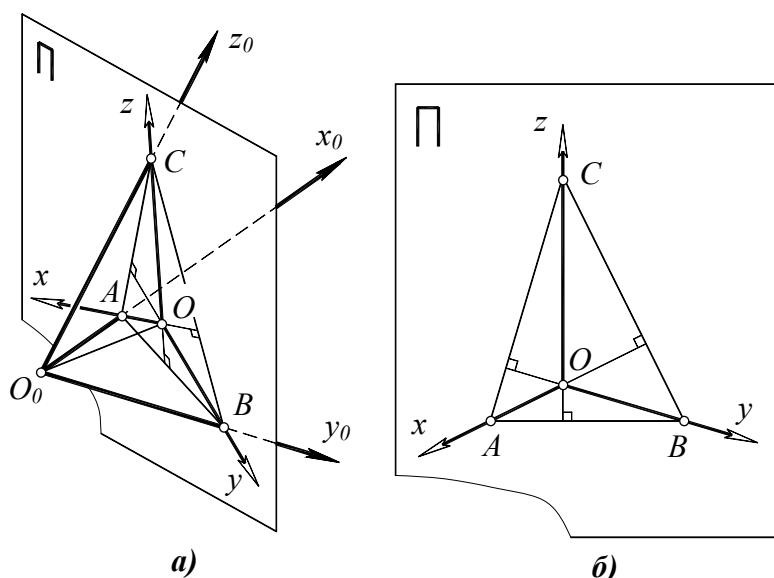


Рис. 14.2

14.4.3. Ортогональная аксонометрия

На рис. 14.2, а изображена тройка взаимно перпендикулярных координатных осей x_0, y_0, z_0 , жестко связанная с изображаемым объектом, и аксонометрическая плоскость проекций Π . Сам объект на рисунке не показан (он может иметь любую форму).

Оси координат x_0, y_0, z_0 пересекаются с плоскостью проекций в точках A, B, C . Треугольник ABC называют *треугольником следов*. Его стороны – это линии пересечения координатных плоскостей x_0y_0, x_0z_0, y_0z_0 с аксонометрической плоскостью проекций Π .

Рассмотрим ортогональную проекцию координатных осей x_0, y_0, z_0 на плоскость Π . Точка O – ортогональная проекция начала координат O_0 на плоскость Π , луч O_0O – направление проецирования, перпендикулярное плоскости проекций Π . Напомним, что проекции x, y, z координатных осей x_0, y_0, z_0 называют аксонометрическими осями.

Теорема 1. В случае ортогонального проецирования аксонометрические оси x, y, z перпендикулярны сторонам треугольника следов (рис. 14.2, б).

Доказательство. Покажем, что луч z перпендикулярен к стороне AB . Ось z_0 перпендикулярна плоскости x_0y_0 , так как оси x_0, y_0, z_0 взаимно перпендикулярны. Прямая AB лежит в плоскости x_0y_0 , следовательно, скрещивающиеся прямые z_0 и AB взаимно перпендикулярны. Прямая AB лежит в плоскости Π , поэтому можно сказать, что AB параллельна плоскости Π . Согласно следствию из теоремы о проекциях прямого угла (см. п. 4.2), если одна из взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых ($AB \perp z_0$) параллельна плоскости проекций Π , то проекции этих прямых взаимно перпендикулярны, то есть $AB \perp z$. Аналогично доказывается перпендикулярность аксонометрических осей x, y соответствующим сторонам треугольника следов. Теорема доказана.

Любое сечение ABC ортогональной тройки прямых x_0, y_0, z_0 всегда является остроугольным треугольником. Следовательно, треугольник следов всегда остроугольный.

Теорема 2. Если задан треугольник следов (произвольный, но обязательно остроугольный!), то тем самым вполне определены не только положения аксонометрических осей, но и показатели искажения u, v, w по аксонометрическим осям x, y, z (доказательство и графический алгоритм определения показателей искажения даны в [3]).

Правило. Любой остроугольный треугольник на плоскости проекций Π может быть принят за треугольник следов ортогонального аксонометрического чертежа. Направления высот этого треугольника указывают положение аксонометрических осей x, y, z . При этом полностью определены не только направления аксонометрических осей, но и показатели искажения по этим осям.

14.4.4. Ортогональная изометрия

Если координатные оси x_0, y_0, z_0 одинаково наклонены к плоскости проекций Π , то получаем *ортогональную изометрию*. Треугольник следов становится равносторонним, а аксонометрические оси x, y, z располагаются под углом 120° друг к другу (рис. 14.3).

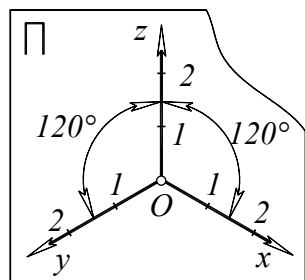


Рис. 14.3

Показатель искажения $u=v=w$ вычисляется из условия $u^2+v^2+w^2=2$. Отсюда $u=v=w=\sqrt{2/3}\approx 0,816$, поэтому при построении изометрии истинный размер объекта по любой оси координат приходится умножать на $0,816$. Чтобы не выполнять это неудобное вычисление, полагают показатели искажения равными единице, и в процессе построения откладывают по аксонометрическим осям истинные размеры изображаемой фигуры. При этом вид изображения не изменяется, но оно становится увеличенным примерно в $1/0,816\approx 1,22$ раза. Такое изображение называют *приведенной изометрией*.

14.4.5. Ортогональная диметрия

Расположим систему координат $x_0y_0z_0$ и жестко связанный с ней изображаемый объект относительно плоскости проекций Π таким образом, чтобы показатели искажения u , w по осям x и z были равны между собой, а показатель искажения по оси y – в два раза меньше: $u = w$, $v = 0,5u$. При этом оси x_0 и z_0 одинаково наклонены к аксонометрической плоскости проекций Π , а ось y_0 располагается к плоскости Π под некоторым увеличенным углом. Если ортогонально спроецировать изображаемый объект и связанную с ним систему координат на плоскость Π , то получим *ортогональную диметрию*.

Числовые значения показателей искажения определяются из условия: $u^2 + v^2 + w^2 = 2$. Подставляя сюда $u = w$, $v = 0,5u$, получаем: $u^2 + (0,5u)^2 + u^2 = 2$. Отсюда $u = \sqrt{(2/2,25)} \approx 0,943$. Следовательно, по осям x и z показатели искажения равны $u = w = 0,943$, а по оси y показатель искажения $v = 0,5u \approx 0,471$. Поэтому при построении диметрии приходится откладывать по осям x и z размеры объекта, умноженные на $0,943$, а по оси y – размер, умноженный на $0,471$. Чтобы не выполнять эти неудобные вычисления, принимают показатели искажения u и w по осям x, z равными единице; при этом показатель искажения по оси y должен быть равен $v = 0,5$. В процессе построения откладывают по осям x и z истинные размеры фигуры, а по оси y все размеры фигуры уменьшают в два раза. Вид изображения при таком “округлении” показателей искажения не меняется, но оно становится увеличенным приблизительно в $1/0,943 = 1,06$ раза. Такое изображение называют *приведенной ортогональной диметрией*.

Определение углов между аксонометрическими осями в ортогональной диметрии

1. Координатные оси x_0 и z_0 одинаково наклонены к плоскости проекций Π , поэтому $O_0A = O_0C$ (рис. 14.4, а). Примем $O_0A = O_0C = 1$. Тогда $OC = OA = u$, где $u = w = \sqrt{(2/2,25)}$ – ранее найденный показатель искажения по осям x и z .

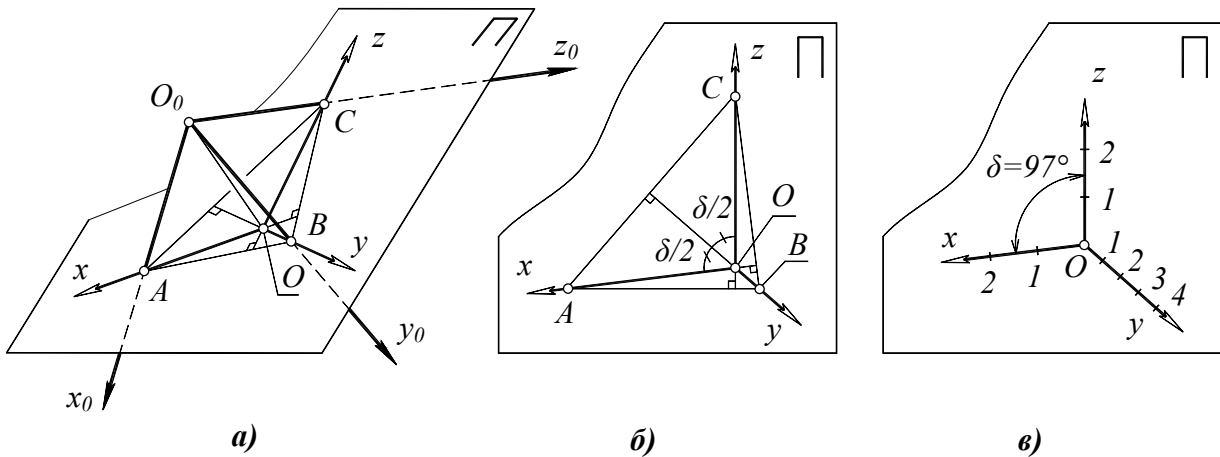


Рис. 14.4

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник AO_0C . Длина его гипотенузы, согласно теореме Пифагора, равна: $AC^2 = O_0A^2 + O_0C^2 = 2$.

3. Угол δ между аксонометрическими осями x и z равен углу при вершине равнобедренного треугольника AOC (рис. 14.4, б). Основание этого треугольника равно $AC = \sqrt{2}$, а боковые стороны $OC = OA = u = \sqrt{(2/2,25)}$. После элементарных расчетов получаем $\delta \approx 97^\circ$.

4. Согласно теореме 1 (см. п. 14.4.3), аксонометрическая ось y перпендикулярна стороне AC равнобедренного треугольника следов ABC , следовательно, ось y совпадает с биссектрисой угла δ (см. рис. 14.4, б).

Таким образом, на ортогональном диметрическом чертеже аксонометрические оси x и z составляют угол 97° , а ось y – биссектриса этого угла. При построении приведенной диметрии координаты произвольной точки $A(x_A, y_A, z_A)$ откладываются по осям x и z без искажения, а по оси y координата y_A уменьшается в два раза (рис. 14.4, в).

14.4.6. Косоугольная аксонометрия

Косоугольная аксонометрия обладает одним существенным недостатком: она способна неестественно исказить форму изображаемого объекта. Например, косоугольная проекция сферы – эллипс. Вряд ли зритель сумеет в эллипсе “опознать” сферу.

Рассмотрим еще один пример. На восходе или закате солнца тень от куба, падающая на землю, может быть очень вытянутой. Тень сохраняет параллельность ребер, но совершенно искажает пропорции куба. В данном случае тень – это косоугольная аксонометрическая проекция куба на горизонтальную плоскость. Такое изображение искажает пропорции предмета и лишено наглядности.

Тем не менее, есть некоторые практически приемлемые варианты косоугольного проецирования. Например, фронтальную плоскость проецируемого объекта (плоскость xz) можно разместить параллельно аксонометрической плоскости проекций. Тогда при любом направлении проецирования размеры объекта по осям x , z сохраняются. Если проецировать лучами, наклоненными к плоскости проекций под углом 45° , то любой отрезок вдоль оси y также проецируется в истинную величину. Получается *косоугольная фронтальная изометрия*. Иногда такой вид аксонометрии называют *кавалерной проекцией*. На рис. 14.5, а изображен куб в кавальерной проекции.

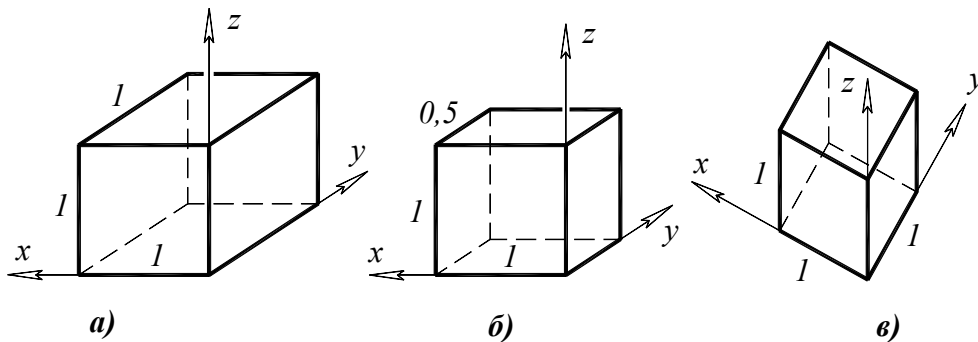


Рис. 14.5

Можно сохранить параллельность плоскости xz и аксонометрической плоскости проекций, но направление проецирования выбрать под углом, отличным от 45° . Получим *косоугольную фронтальную диметрию*. В этом случае по осям x и z размеры объекта сохраняются, а по оси y – искажаются. Показатель искажения зависит от направления проецирования. Такую аксонометрию называют *кабинетной проекцией*. Обычно по оси y размеры объекта сокращают в два раза. При этом получается наиболее естественное изображение (куб на рис. 14.5, б).

При построении планов жилой застройки применяют *косоугольную горизонтальную изометрию* (аксонометрическая плоскость проекций – горизонтальная, угол наклона проецирующих лучей 45°). Такое изображение условно принято называть *военной перспективой* (куб на рис. 14.5, в). Слово “перспектива” здесь не вполне уместно, поскольку

ку перспективной называют центральную проекцию, а в данном случае речь идет о параллельной проекции.

Рассмотренные выше пять видов аксонометрических проекций (две ортогональные и три косоугольные) рекомендованы стандартом для выполнения аксонометрических изображений. Самым наглядным изображением, лишенным заметных искажений формы, является ортогональная диметрия.

14.4.7. Основная теорема аксонометрии

Предположим, что в пространстве дан произвольный тетраэдр (четыреугольник) $M_0N_0K_0L_0$, который проецируется параллельными лучами на произвольную плоскость проекций Π по произвольному направлению. Проекция тетраэдра – полный четырехугольник $MNKL$ (рис. 14.6). Полным четырехугольником называют обычный четырехугольник, но с начерченными диагоналями. Меняя направление проецирования и положение плоскости проекций Π , будем получать разные проекции тетраэдра. Но всякий раз это будут полные четырехугольники.

Еще раз подчеркнем, что дан совершенно произвольный, случайный тетраэдр. У него ребра разной длины, разные углы при вершинах. Это неправильный четырехгранник. Вполне естественно предположить, что проекция неправильного четырехгранника – неправильный полный четырехугольник.

Зададим следующий вопрос. *Может ли неправильный тетраэдр проецироваться на плоскость какой-нибудь правильной фигурой (квадратом, прямоугольником, ромбом)?*

На первый взгляд кажется, что это невозможно. “Здравый смысл” подсказывает нам, что проекция (условно говоря, фотография) неправильного тетраэдра никак не может выглядеть квадратом или ромбом.

Оказывается, здесь геометрическая интуиция нас подводит. Основная теорема аксонометрии утверждает, что всегда можно выбрать направление проецирования и положение плоскости проекций так, чтобы заранее заданный произвольный тетраэдр проецировался в квадрат. Или в ромб. Или в равнобочную трапецию. Или в любой другой четырехугольник.

Иначе говоря, любой произвольный четырехгранник с ребрами разной длины может проецироваться в четырехугольник, подобный любому заранее начерченному полному четырехугольнику.

Это утверждение было доказано К. Польке для одного частного случая и обобщено Г. Шварцем. В окончательном виде теорема формулируется следующим образом [3].

Теорема Польке-Шварца. *Всякий полный четырехугольник можно рассматривать как косоугольную параллельную проекцию тетраэдра наперед заданной формы.*

Из теоремы следует, что любые три отрезка на плоскости (все – произвольной длины), исходящие из одной точки, можно рассматривать как параллельную проекцию трех взаимно перпендикулярных осей координат единичной длины. Это следствие из теоремы Польке-Шварца называют *основной теоремой аксонометрии*.

Основная теорема аксонометрии. *В косоугольной аксонометрии аксонометрические оси на плоскости чертежа Π и единицы длины на осях могут быть выбраны совершенно произвольно (теорема К. Польке).*

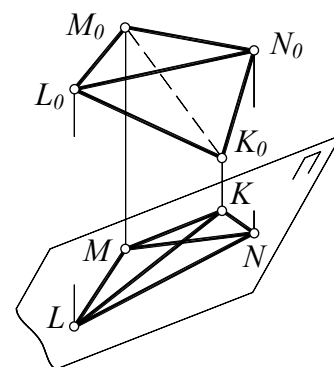


Рис. 14.6

14.5. Трехмерная графика в задачах начертательной геометрии

В начертательной геометрии различают позиционные, метрические и комбинированные задачи. Например, построение точки пересечения прямой и плоскости – это позиционная задача, а определение истинной длины отрезка – метрическая задача. Комбинированные задачи могут содержать как позиционные, так и метрические условия.

14.5.1. Позиционные задачи

Простейшие позиционные задачи, в которых предлагается находить точки и прямые, принадлежащие данной плоскости, рассмотрены в лекции 2. Сравним решение одной из таких задач, выполненное на двухпроекционном чертеже (“метод 2D”) и на экране компьютера (метод 3D”).

Задача 1. Построить горизонталь h в плоскости Σ общего положения, заданной точкой A и прямой линией $m=MN$. Горизонталь требуется провести через точку A .

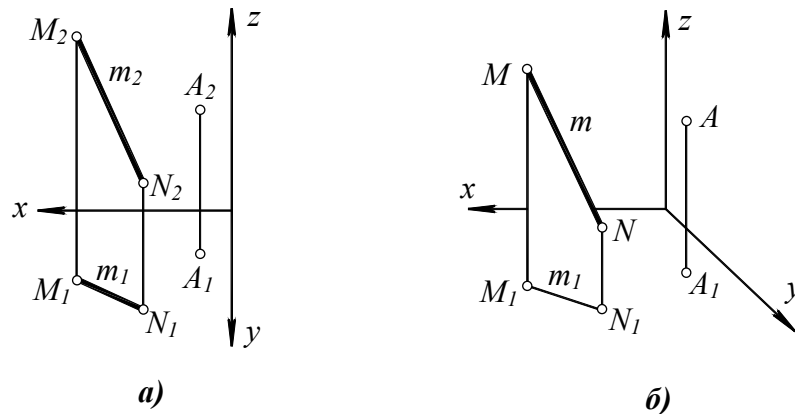


Рис. 14.7

На рис. 14.7, а дан обычный двухпроекционный чертеж точки A и прямой линии m . На рис. 14.7, б показано, как точка A , прямая m и их горизонтальные проекции A_1, m_1 выглядят в виртуальном трехмерном пространстве на экране компьютера. Требуется через точку A провести горизонталь, пересекающую прямую m . Чтобы решить задачу на чертеже (методом 2D), надо провести фронтальную проекцию h_2 горизонтали (до пересечения с фронтальной проекцией прямой MN), затем с помощью линий связи найти недостающую проекцию h_1 искомой горизонтали. Решение показано на рис. 14.8, а. Горизонталь h лежит в плоскости $\Sigma(A, m)$, так как имеет с этой плоскостью две общие точки: точку $I=MN \cap h$ и точку A . Задача решена “методом 2D”.

Немного сложнее решить эту задачу в виртуальном “трехмерном” пространстве компьютера. Конечно, с помощью команды “начертить отрезок” мы сумеем провести сколько угодно произвольных прямых, проходящих через точку A . На экране компьютера эти прямые будут выглядеть так, будто они начерчены прямо “по воздуху” компьютерного 3D-пространства.

Но нам нужно построить не произвольную, а вполне определенную прямую. Эта прямая должна проходить через точку A , пересекать прямую m и при этом располагаться параллельно горизонтальной плоскости $\Pi_1=xy$. Как провести такую прямую?

Оказывается, предоставленной нам возможности “чертить по воздуху” недостаточно для решения задачи. Потребуется использовать горизонтальные проекции данной

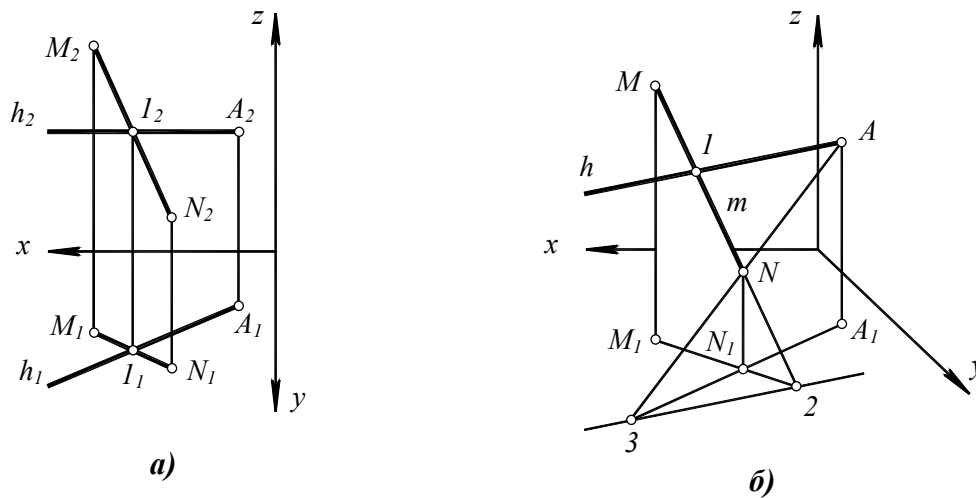


Рис. 14.8

прямой m и точки A . Построение горизонтальных проекций не вызывает затруднений, поскольку в каждой графической программе обязательно предусмотрена возможность проецирования геометрических фигур на любую плоскость.

Найдем точку $2 = MN \cap M_1N_1$ пересечения прямой m с горизонтальной плоскостью xu , удлинив (с помощью команды “удлинить”) отрезок MN и его проекцию M_1N_1 . Затем проведем отрезок AN и найдем точку 3 его пересечения с горизонтальной плоскостью: $3 = AN \cap A_1N_1$ (рис. 14.8, б). Прямая 2-3 располагается горизонтально и принадлежит плоскости $\Sigma(A, m)$. Проведем через A прямую h , параллельную прямой 2-3. Прямая h горизонтальна, принадлежит плоскости Σ и пересекает данную прямую m в точке I , то есть является искомой горизонталью. Задача решена “методом 3D”. Решение будет выглядеть на экране компьютера так, как показано на рис. 14.8, б.

Решение задачи в 3D-пространстве получилось немного сложнее, чем на обычном 2D-чертеже. Разумеется, в каждом из решений (2D и 3D) использованы одни и те же правила и закономерности, которые изучаются в курсе начертательной геометрии.

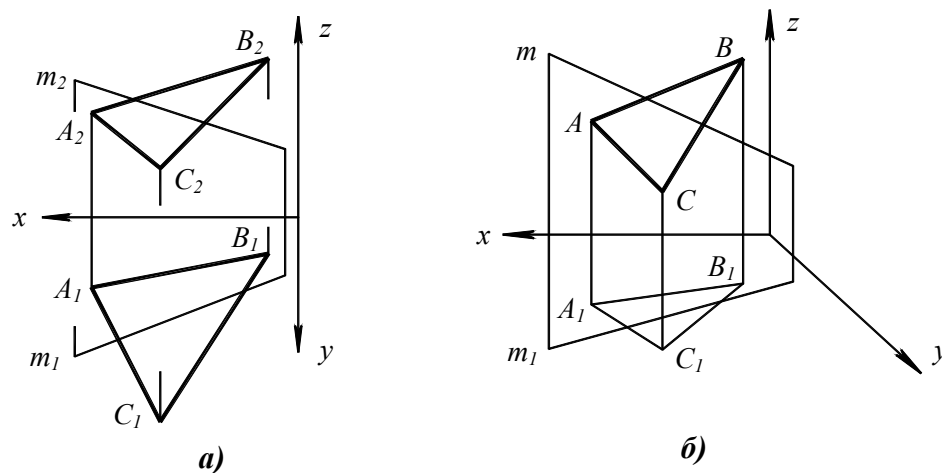


Рис. 14.9

Задача 2. Построить точку пересечения плоскости $\Delta(ABC)$ и прямой m общего положения (рис. 14.9). Сравним алгоритмы решения этой задачи при использовании двух-проекционного 2D-чертежа и 3D-компьютерного моделирования.

На рис. 14.9, а дан чертеж треугольника ABC и прямой m . На рис. 14.9, б показано, как эти фигуры (вместе со своими горизонтальными проекциями) выглядят в виртуальном трехмерном пространстве на экране компьютера. Требуется построить точку M пересечения прямой m с плоскостью треугольника ABC .

Для решения задачи на чертеже (методом 2D) надо через m провести какую-либо вспомогательную секущую плоскость (например, горизонтально-проецирующую плоскость Σ), построить линию пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника ($\Sigma \cap \Delta = l-2$) и отметить искомую точку $M = m \cap (l-2)$. Решение показано на рис. 14.10, а.

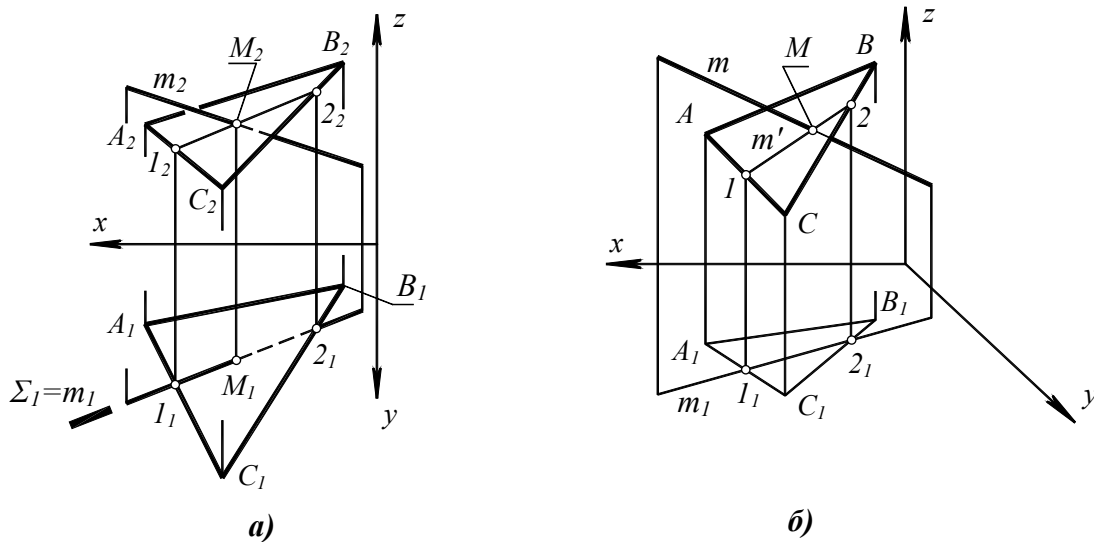


Рис. 14.10

Для решения этой задачи методом 3D в виртуальном трехмерном пространстве компьютера также применяется операция проецирования (рис. 14.10, б).

Находим проекцию m' прямой m на плоскость треугольника ABC и отмечаем точку пересечения $M = m' \cap m$. Эта точка является искомой, поскольку принадлежит как прямой m , так и плоскости $\Delta(ABC)$. Как уже отмечалось, построение проекции любой геометрической фигуры на любую плоскость не вызывает затруднений, поскольку в каждой графической программе обязательно предусмотрена такая возможность.

При проецировании прямой m на плоскость треугольника ABC можно совершенно произвольно выбирать направление проецирования. Например, на рис. 14.10, б направление проецирования выбрано перпендикулярно горизонтальной плоскости $\Pi_I = xy$. При этом прямая m проецируется на Π_I в прямую $m_I = l_I-2_I$, а на плоскость ABC в прямую $m' = l-2$. Искомая точка M находится на пересечении прямой m и ее проекции $l-2$.

Направление проецирования можно выбрать иначе. Например, можно построить ортогональную проекцию прямой m на плоскость треугольника ABC (п. 4.4, задача 5). В этом случае количество вспомогательных 3D-построений незначительно сократится (не надо будет строить горизонтальную проекцию $A_1B_1C_1$ треугольника ABC). Но потребность в операции проецирования обязательно сохраняется.

Вывод. Проецирование геометрических фигур на плоскость является основным “инструментом” при решении позиционных задач, как в начертательной геометрии, так и в компьютерном 3D-моделировании.

14.5.2. Метрические задачи

Метрической задачей называют либо определение истинных размеров фигуры, либо построение фигуры по заранее заданным линейным и угловым размерам. Например,

в начертательной геометрии рассматривают метрические задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей (лекция 4).

На проекционном чертеже размеры фигур искажаются. Длина проекции отрезка прямой общего положения меньше его истинной длины. Угловые размеры проекций также отличаются от истинных угловых размеров фигуры. Поэтому в 2D-графике возникают метрические задачи.

В 3D-пространстве компьютерной графической программы можно безо всяких затруднений “чертить по воздуху”. Компьютер – это безупречно точный электронный кульман, позволяющий выполнять 3D-построения строго по заданным размерам. Поэтому в 3D-моделировании нет метрических задач, подобных тем, которые есть в 2D-графике.

Для построения фигуры по заданному размеру надо просто задать этот размер с помощью клавиатуры компьютера. Для определения длины отрезка или длины кривой линии достаточно вызвать команду “справка”, которая предоставит полную информацию о метрических свойствах любого геометрического объекта. Для построения перпендикуляра надо включить объектную привязку “перпендикуляр”.

Вывод. Компьютер – точный электронный 3D-кульман. Метрические задачи, связанные с искажением линейных и угловых размеров при отображении пространства на плоскость, в 3D-графике вообще не возникают. Виртуальная трехмерная модель геометрической фигуры – это геометрически точный “цифровой макет” объемной фигуры, выполненный строго по заданным размерам. Именно поэтому трехмерная графика стала одним из основных инструментов конструктора.

14.5.3. Комбинированные (комплексные) задачи

Задачи, в которых на искомый элемент наложены два или более условий, называются комбинированными (комплексными). Комбинированная задача решается в следующем порядке (см. лекцию 12):

1. *Анализ* – выявление условий, наложенных на искомый элемент, и тех фигур (множеств), которые удовлетворяют этим условиям.
2. *Исследование* – определение количества решений задачи.
3. *Составление алгоритма* (алгоритм – символическая запись последовательности решения задачи).
4. *Построение* – графическая реализация алгоритма на чертеже.

Первые три действия (анализ, исследование, составление алгоритма) совершенно не зависят от того, какой вид графики (2D или 3D) мы будем использовать для последующих графических построений.

Графические построения могут выполняться либо на проекционном чертеже, либо в виртуальном компьютерном пространстве. Выбор зависит от условий рассматриваемой задачи. Одни построения удобно выполнять средствами 3D-графики, другие – с помощью чертежа.

Например, построение горизонтали в плоскости общего положения (см. рис. 14.8) гораздо проще реализовать на двухпроекционном чертеже, чем на 3D-макете. Если же в ходе решения задачи надо выполнять метрические построения (строить перпендикуляры, откладывать отрезки заданной длины и др.), то целесообразно использовать 3D-графику.

Можно сказать, что решение комплексной геометрической задачи происходит не в 2D и не в 3D, а совсем в другом пространстве – в голове учащегося. Это означает, что в первую очередь необходимо правильно понять условие задачи и наметить путь ее решения, составить анализ и записать алгоритм. Только после этого следует выбирать

наиболее удобный вариант решения (2D или 3D) и приступить к выполнению графических построений. В качестве примера рассмотрим два варианта решения (2D и 3D) типовой комбинированной задачи.

Задача. Через точку M провести прямую t , пересекающую скрещивающиеся прямые a и b (рис. 14.11).

На рис. 14.11, *а* представлены исходные геометрические фигуры (прямые a , b и точка A) на обычном двухпроекционном чертеже. На рис. 14.11, *б* показано, как данные фигуры (вместе со своими горизонтальными проекциями) выглядят в виртуальном трехмерном пространстве на экране компьютера.

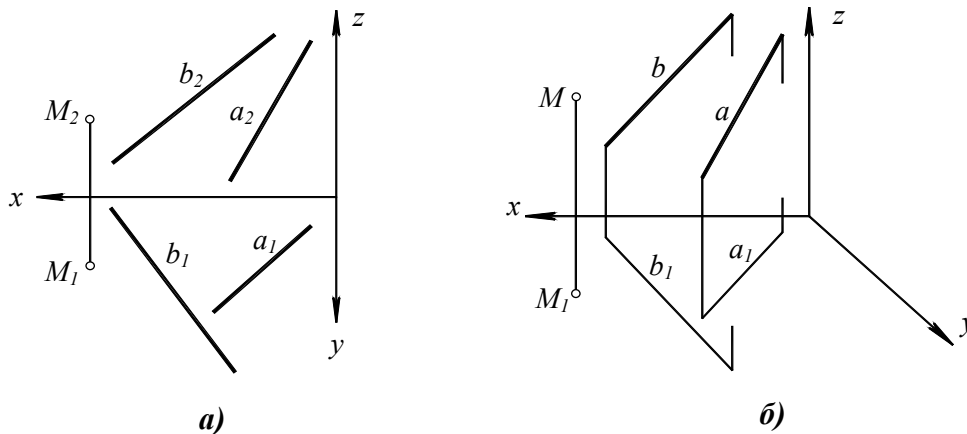


Рис. 14.11

Эта задача была подробно рассмотрена в лекции 12 (п. 12.3, задача 2). Напомним схему ее решения.

1. Множество прямых, проходящих через точку M и пересекающих прямую a , образует плоскость $\Delta(M, a)$.
2. Множество прямых, проходящих через точку M и пересекающих прямую b , образует плоскость $\Sigma(M, b)$.
3. Искомая прямая t , проходящая через точку M и пересекающая одновременно обе данные прямые a и b , должна находиться одновременно в плоскостях Δ и Σ . Поэтому прямая t является линией пересечения плоскостей Δ и Σ .

Для решения задачи на двухпроекционном чертеже (рис. 14.12, *а*) не обязательно находить линию пересечения плоскостей Δ и Σ . Достаточно построить точку B пересечения прямой b с плоскостью $\Delta(M, a)$. Искомая прямая t проходит через точки M и B . Чтобы на 2D-чертеже построить точку B , в плоскости $\Delta(M, a)$ дополнительно проведены отрезки MK и MT , где точки K и T – произвольные точки на прямой a . В соответствии с алгоритмом решения первой позиционной задачи (см. лекцию 3), проводим через прямую b секущую плоскость Θ , строим линию разреза $1-2$, отмечаем точку $B = b \cap (1-2)$ и проводим искомую прямую $t = MB$. Задача решена в варианте 2D.

Чтобы решить эту же задачу в 3D-пространстве (рис. 14.12, *б*), надо точно так же, как и на 2D-чертеже, построить точку B пересечения прямой b с плоскостью $\Delta(M, a)$, после чего провести искомую прямую t через точку M и точку B . Чтобы на 3D-модели построить точку $B = b \cap \Delta(M, a)$, проецируем прямую b на плоскость $\Delta(M, a)$ и отмечаем искомую точку B на пересечении прямой b с ее проекцией.

Направление проецирования может быть любым. Например, на рис. 14.12, б прямая b спроецирована на плоскость $\Delta(M, a)$ по направлению, параллельному оси z . Проекция $1-2$ прямой b пересеклась с прямой b в точке B , через которую проведена искомая прямая $m=MB$. Задача решена в варианте 3D (см. рис. 14.12, б).

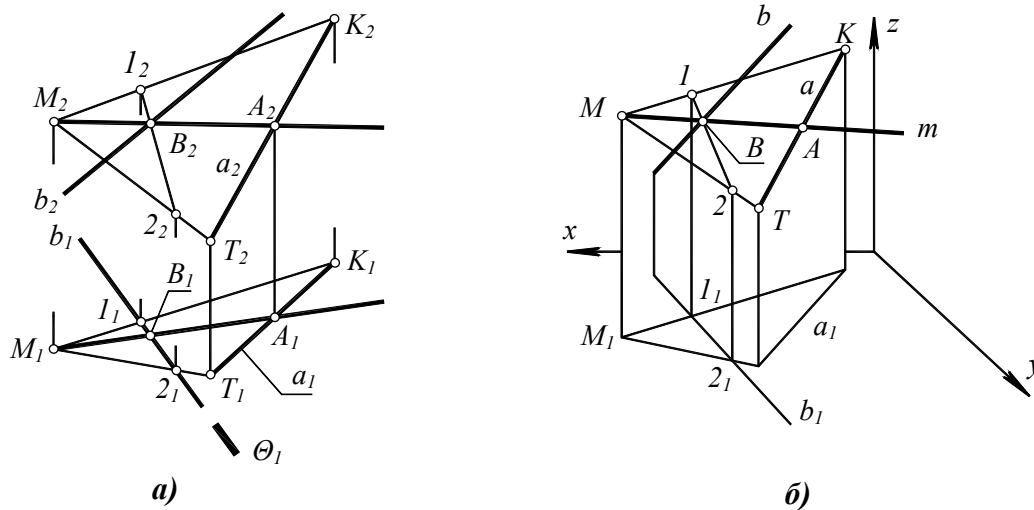


Рис. 14.12

Решение задачи в 3D-пространстве получилось точно таким же, как и на обычном 2D-чертеже. В каждом из решений (2D и 3D) использован один и тот же алгоритм и выполнены практически одинаковые вспомогательные построения.

Вывод. Решение комбинированной геометрической задачи происходит не в 2D или 3D-пространстве, а в голове учащегося. Графическая реализация алгоритма может быть выполнена либо на чертеже, либо в виртуальном компьютерном 3D-пространстве.

14.5.4. Задачи на построение линии пересечения поверхностей

В начертательной геометрии особое внимание уделяется второй позиционной задаче – построению на двухпроекционном чертеже линии взаимного пересечения поверхностей (лекции 8, 9, 10). Задачи этого типа – трудоемкие, требующие внимания и пространственного воображения.

По двум проекциям данных поверхностей надо “мысленно увидеть” их взаимное расположение и как можно точнее начертить проекции линии их пересечения с учетом видимости этой линии относительно плоскостей проекций. Задачи на построение линии пересечения поверхностей нужны для развития пространственного воображения и получения навыков выполнения сложных графических построений.

Компьютерная графика позволяет не только формировать совершенно точные и очень наглядные трехмерные изображения пересекающихся поверхностей, но и легко находить линию их пересечения. Для этого используется имеющаяся в любой графической программе команда “объединить”.

После построения трехмерных макетов заданных поверхностей и применения команды “объединить”, на экране компьютера возникает трехмерное изображение не только самих поверхностей, но и линии их пересечения.

При использовании 3D-графики конструктор полностью освобожден от необходимости строить линию пересечения заданных поверхностей “по точкам” с помощью секущих плоскостей или вспомогательных сфер. От него требуется начертить в виртуальном трехмерном пространстве заданные поверхности, используя компьютер как

точный 3D-кульман, а затем вызвать команду “объединить”. Линия пересечения будет построена автоматически, без участия конструктора.

Для проверки полученного решения могут использоваться методы начертательной геометрии, одинаково пригодные как в 2D, так и в 3D-графике.

Пусть, например, надо построить линию пересечения поверхностей кругового конуса и сферы (рис. 14.13, а). Решение этой задачи на обычном двухпроекционном чертеже было подробно рассмотрено в лекции 8 (см. рис. 8.7). Построим линию пересечения конуса и сферы с помощью средств 3D-моделирования.

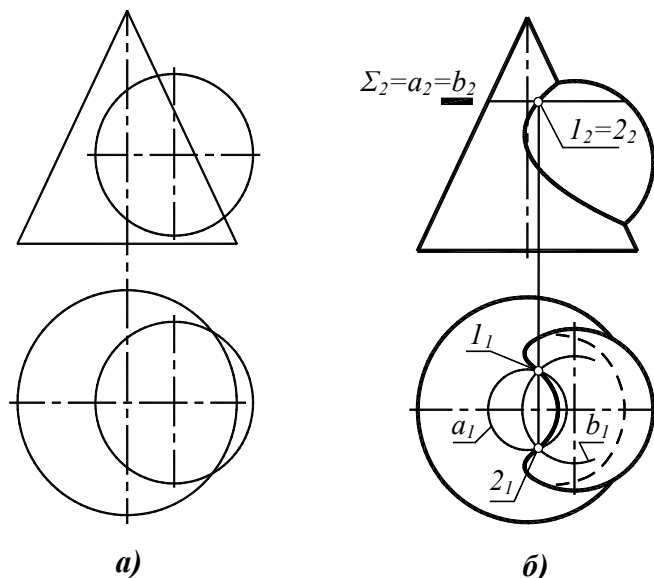


Рис. 14.13

Создаем макеты конуса и сферы в 3D-пространстве (на компьютере) и применяем команду “объединить”. В 3D-пространстве возникает наглядное трехмерное изображение пересекающихся между собой сферы и конуса. На экране компьютера хорошо видна линия пересечения поверхностей – замкнутая пространственная алгебраическая кривая четвертого порядка.

Для проверки точности ее построения могут использоваться методы начертательной геометрии. Найдем ортогональные проекции данных пересекающихся фигур на горизонтальную xy и фронтальную xz плоскости проекций. Как уже упоминалось, в каждой графической программе обязательно предусмотрена возможность проецирования геометрических фигур на любую плоскость, поэтому построение проекций не вызывает затруднений.

После построения проекций получаем двухпроекционный чертеж, показанный на рис. 14.13, б. Проводим вспомогательную секущую плоскость Σ . Находим линии a , b (окружности), которые получаются в пересечении конуса и сферы плоскостью Σ . Отмечая точки пересечения $1, 2$ линий a и b , убеждаемся, что эти точки совершенно точно попадают на линию пересечения, построенную компьютером.

Вывод. Компьютер дает возможность автоматизировать решение некоторых задач начертательной геометрии, в частности – задач на построение линии пересечения поверхностей. Автоматическое решение, полученное на компьютере, позволяет наглядно увидеть линию пересечения. Это решение может использоваться как “подсказка” при самостоятельном (не автоматическом) построении линии пересечения данных поверхностей для тех случаев, когда недостаток пространственного воображения затрудняет решение задачи.

14.6. Кривые линии на экране компьютера

Основным “инструментом” построения любых изображений (рисунков, чертежей, схем, графиков и пр.) является линия – прямая или кривая, закономерная или незакономерная. Понятие “линия” и типы линий были рассмотрены в лекции 6. Напомним, что если линия целиком лежит в плоскости, то ее называют *плоской кривой*. В п. 14.6 рассматриваются только плоские кривые.

В начертательной геометрии для решения задач стараются использовать графически простые линии – прямые и окружности. Эти линии вычерчивают с помощью линейки и циркуля. Решение какой-нибудь геометрической задачи, выполненное с использованием только линейки и циркуля, называют *геометрически точным*.

В трехмерной компьютерной графике линия также используется как основной инструмент геометрического моделирования. Например, для построения 3D-макета детали вычерчивается ее характерный *плоский контур*, а затем из этого контура с помощью команд “вращать” или “выдавить” формируется объемный макет. Так гончар лепит из глины кувшин, вращая заготовку на гончарном круге, а кулинар выдавливает крем на торт из специального кулинарного шприца. Форма кремового украшения совпадает с контуром отверстия в шприце.

Простейшие линии, за исключением прямой – это алгебраические кривые второго порядка: гипербола, парабола и эллипс (в частности – окружность).

14.6.1. Кривые второго порядка

Еще в древней Греции было известно (3 век до нашей эры), что в сечении кругового конуса плоскостью возникают кривые второго порядка. За два с лишним тысячелетия теория кривых второго порядка приобрела законченную форму. Для точного вычерчивания кривых второго порядка было изобретено множество разнообразных механических устройств (эллипсографы, параболические циркули и др.). С развитием средств компьютерной графики стало возможным вычерчивать кривые второго порядка, проходящие через заданные точки или имеющие заданные касательные [16].

Как известно (см. лекцию 6), кривая второго порядка вполне определена своими пятью точками. Через пять точек проходит единственная кривая второго порядка (так же, как через две точки проходит единственная прямая линия). Произвольно укажем на экране компьютера пять компланарных (то есть лежащих в одной плоскости) точек.

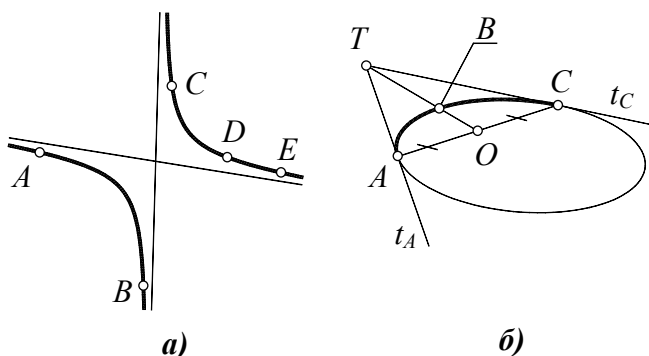


Рис. 14.14

Компьютер вычертит кривую второго порядка, проходящую через эти точки. Например, если даны точки A, B, C, D, E (рис. 14.14, а), то компьютер начертит гиперболу, проходящую через эти точки. Кроме гиперболы, будут начерчены ее асимптоты.

Кривая второго порядка может быть задана не только пятью точками, но и “набором” n точек и m касательных ($n+m=5$). Например, в технических задачах применяют *способ инженерного дискриминанта*, когда

дугу кривой второго порядка задают тремя точками A, B, C и касательными t_A, t_C в конечных точках A, C дуги (рис. 14.14, б). Величину $d=|OB|:|OT|$ называют инженерным дискриминантом (здесь $T=t_A \cap t_C$, а точка O – середина хорды AC). Если величина дис-

криминанта d больше $0,5$, получаем дугу гиперболы, если $d=0,5$ – дугу параболы. Если d меньше $0,5$, то получаем дугу эллипса, как показано на рис. 14.14, б.

Вывод. Компьютер позволяет вычерчивать кривую второго порядка, проходящую через данные точки и имеющую заданные касательные, так же точно, как и прямую, проходящую через две произвольные точки. Это существенно расширяет возможности графического решения геометрических задач. Благодаря применению компьютерной графики, кривые второго порядка стали такими же графически простыми и легко вычерчиваемыми кривыми, как прямая линия и окружность.

14.6.2. Кубическая парабола

Если проектируемый технический объект содержит поверхность сложной формы (обшивка самолета, кузов автомобиля), то линии, образующие эту поверхность, не удастся составить из простейших линий (прямых и кривых второго порядка). Более удобным геометрическим “инструментом” оказалась кубическая парабола (кривая третьего порядка), форма которой описывается каноническим уравнением $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Если в системе координат $xу$ “каноническую” параболу переместить и повернуть, то ее форма, определяемая коэффициентами a, b, c, d , не изменится, но уравнение кубической параболы утратит канонический вид и запишется в неявном виде $f(x, y)=0$, содержащем δ независимых коэффициентов. Посредством изменения этих коэффициентов можно “управлять” как формой параболы, так и ее положением на плоскости $xу$. Таким образом, кубическая парабола более “подвижна”, чем кривая второго порядка, которой можно управлять путем изменения лишь пяти независимых коэффициентов.

Для практического применения кубической параболы ее уравнение записывают в так называемой параметрической форме: $x=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$; $y=b_3t^3+b_2t^2+b_1t+b_0$. Каждому значению параметра t отвечает точка (x, y) . Можно доказать, что получаемое таким образом однопараметрическое множество точек (x, y) образует на плоскости $xу$ кубическую параболу $f(x, y)=0$, уравнение которой всегда возможно преобразовать к каноническому виду (переносом и поворотом системы координат $xу$).

Параметризованное описание кубической параболы содержит два уравнения, которые кратко записывают в виде одного векторного уравнения:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}_3t^3+\mathbf{a}_2t^2+\mathbf{a}_1t+\mathbf{a}_0, \quad (14.1)$$

где $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0$ – векторы с компонентами $a_i, b_i (i=1, 2, 3)$, а вектор \mathbf{r} – радиус-вектор точки, “бегущей” по параболе. Например, вектор \mathbf{a}_3 составлен из двух векторов $a_3\mathbf{i}$ и $b_3\mathbf{j}$, где \mathbf{i} и \mathbf{j} – единичные векторы (орты) по осям x, y . Обычно рассматривают сегмент параболы, получающийся при изменении параметра t от 0 до 1 .

Параметрическое уравнение (14.1) называют уравнением кубической параболы в форме Фергюсона [14]. Из этого уравнения получают уравнение кубической параболы в различных формах: в форме Эрмита, в форме Безье и др.

Кубическая парабола в форме Эрмита

Пусть требуется провести кубическую параболу, проходящую через точки A, B и имеющую в этих точках заданные значения производных $\dot{\mathbf{r}}_A=\mathbf{Q}_A, \dot{\mathbf{r}}_B=\mathbf{Q}_B$ (рис. 14.15). Уравнение (14.1) параболы записано в векторной форме, поэтому производная $\dot{\mathbf{r}}$ векторной функции \mathbf{r} по параметру t – векторная величина, характеризующаяся, как и любой вектор, величиной и направлением. При увеличении модуля вектора \mathbf{Q}_A кубическая парабола все теснее примыкает к направлению этого вектора (см. рис. 14.15). Кубическую

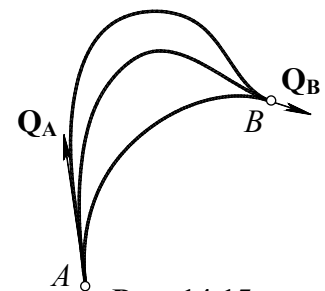


Рис. 14.15

параболу, построенную по заданным точкам A, B и векторным производным $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$ в этих точках, называют *кубической кривой Эрмита* (по аналогии с интерполяционным полиномом Эрмита, для расчета коэффициентов которого также используются не только значения функции в данных точках, но и значения ее производных в этих точках).

Если касательные к конструируемой кривой в ее конечных точках зафиксированы (заданы направления векторов $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$), то управление формой кривой Эрмита производится за счет изменения модулей этих двух векторов. В результате получаем *двупараметрическое множество* кубических парабол разной “полноты”, проходящих через данные точки A, B и касающихся данных прямых $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$ (см. рис. 14.15).

Заметим для сравнения, что кривые второго порядка, удовлетворяющие этим же условиям (касание двух данных прямых в данных точках), образуют *однопараметрическое множество* (параметр – величина инженерного дискриминанта d).

Кубическая парабола в форме Безье

Если записать уравнение кубической параболы не в форме Фергюсона, а в виде

$$\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{a}_3 + 3t^2(1-t) \mathbf{a}_2 + 3t(1-t)^2 \mathbf{a}_1 + (1-t)^3 \mathbf{a}_0, \quad (14.2)$$

то векторные коэффициенты \mathbf{a}_i приобретают наглядный геометрический смысл. Действительно, при $t=0$ получаем $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}_0$, то есть вектор \mathbf{a}_0 определяет положение начальной точки сегмента параболы. При $t=1$ имеем $\mathbf{r}(1) = \mathbf{a}_3$, то есть векторный коэффициент \mathbf{a}_3 указывает положение конечной точки сегмента параболы. Векторная производная $\dot{\mathbf{r}}(0)$ в начальной точке моделируемого сегмента равна $\dot{\mathbf{r}}(0) = 3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)$, в конечной точке сегмента равна $\dot{\mathbf{r}}(1) = 3(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)$.

Зададим на плоскости четыре произвольных радиус-вектора $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_3$ и отметим соответствующие им точки A_0, A_1, A_2, A_3 , образующие *характеристическую ломаную*. Парабола (14.2) пройдет через точки A_0, A_3 и коснется сторон A_0A_1 и A_2A_3 характеристической ломаной (рис. 14.16). Векторная производная $\dot{\mathbf{r}}(t)$ функции $\mathbf{r}(t)$ в точке A_0 совпадает по направлению с A_0A_1 , причем модуль производной равен утроенному расстоянию между точками A_0 и A_1 . В точке A_3 векторная производная совпадает с направлением стороны A_3A_2 , а ее модуль равен утроенному расстоянию между точками A_3 и A_2 .

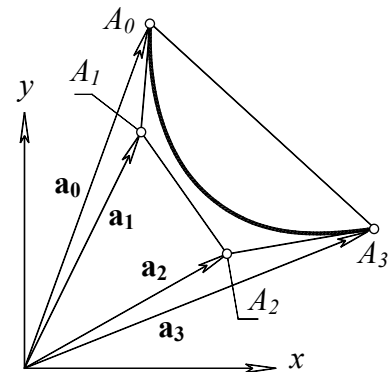


Рис. 14.16

Таким образом, чтобы построить кривую, задаем точки A_0, A_3 , через которые должна проходить наша кривая, а также задаем в этих точках желаемые касательные. На желаемых касательных указываем точки A_1 и A_2 . Увеличивая одновременно длины отрезков A_0A_1 и A_3A_2 , мы придаем конструируемому сегменту кубической параболы увеличенную “полноту”. Если же увеличивать только один из отрезков, например, A_0A_1 , то кривая пойдет ближе к касательной A_0A_1 , и форма кривой будет меняться так же, как она изменялась на рис. 14.15 при увеличении вектора \mathbf{Q}_A .

Описание сегмента кубической параболы уравнением вида (14.2) и ее геометрическое формирование с помощью характеристической ломаной называют *кубической кривой в форме Безье* [14]. Кривая Безье по существу не отличается от ранее рассмотренной кривой Эрмита. Действительно, при построении кривой Эрмита мы управляли ее формой, изменяя направления и модули касательных векторов (векторных производных) в граничных точках кривой (см. рис. 14.15). При управлении формой кривой Безье мы тоже изменяем касательные векторы, но не напрямую, а посредством изменения положения вершин A_1, A_2 характеристической ломаной.

14.6.3. Сплаины

В геометрии линия является очень важным понятием. До появления компьютерной графики использовалось множество механических инструментов для вычерчивания различных кривых. Одним из таких инструментов было универсальное лекало – гибкая металлическая линейка, которую использовали чертежники для соединения отдельных точек на чертеже. Эту линейку называют *сплайн* (от английского *spline* – гибкая металлическая линейка).

В связи с развитием компьютерной графики отпала потребность использовать гибкую линейку. Процедура построения гладкой кривой линии, проходящей через заданные точки, автоматизирована. Сплайном стали называть гладкую кривую линию, составленную из “кусочков” алгебраических кривых.

Понятие “гладкая кривая” имеет точный математический смысл. Составную кривую называют кривой первого порядка гладкости, если ее смежные составляющие имеют в стыковых точках общую касательную. Если же в точках стыка не только имеется общая касательная, но смежные составляющие имеют в стыковых точках общий радиус кривизны, то говорят, что составная кривая имеет второй порядок гладкости.

Наибольшее применение в задачах геометрического моделирования нашли так называемые *кубические сплайны*.

Определение. *Кубический сплайн на плоскости – составная кривая линия, состоящая из дуг кубических парабол $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, проходящая через заданные стыковые точки (узлы) и имеющая в узлах гладкость второго порядка [14].*

В любой графической программе обязательно есть команда “начертить сплайн”, то есть провести кусочно-гладкую кривую через указанные точки.

14.6.4. Построение обводов

В некоторых технических задачах требуется построить (сконструировать) составную линию, проходящую через данные точки и удовлетворяющую при этом каким-либо дополнительным геометрическим условиям (заданный порядок гладкости в стыковых точках, касание какой-либо прямой, величина кривизны в какой-нибудь из заданных точек и др.). Такую кривую называют *обводом*.

Определение. *Обвод – линия, составленная из дуг кривых выбранного вида, которые в стыковых точках имеют определенный порядок гладкости [6].*

Обвод из дуг кривых второго порядка

Пусть требуется построить выпукло-вогнутый обвод из дуг кривых второго порядка, проходящий через точки A, B, C, D и касающийся ломаной линии $AT_1T_2T_3D$ (рис.

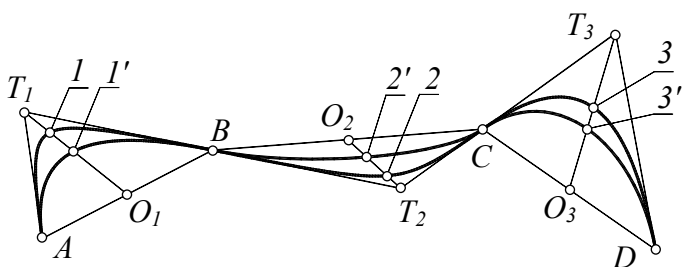


Рис. 14.17

14.17). Используя способ инженерного дискриминанта, на каждом участке конструируемого обвода указываем управляющие точки 1, 2, 3 и с помощью программного средства [16] вычерчиваем дуги кривых второго порядка. На рис. 14.17 показаны два варианта конструируемого обвода, участки которого отличаются положением управляющих точек, то есть величиной инженерного дискриминанта (см. п. 14.6.1).

Оба варианта обвода проходят через заданные точки, касаются заданной ломаной линии и имеют в стыковых точках гладкость первого порядка.

Заметим, что с помощью дуг кривых второго порядка невозможно сконструировать выпукло-вогнутый обвод с плавным изменением кривизны, так как в точках перегиба B, C кривизна должна равняться нулю. Кривые второго порядка не имеют точек с нулевой кривизной, поэтому в точках перегиба вектор кривизны стыкуемых дуг кривых второго порядка скачком меняется как по величине, так и по направлению.

Сплайн-интерполяция

В математике интерполяцией называют процедуру определения промежуточных значений какой-либо величины по известным ее значениям в некоторых узловых точках. Геометрически это означает, что через заданные узловые точки проводят плавную кривую. Если для этого используется сплайн, то такое построение называют сплайн-интерполяцией.

Пусть требуется построить обвод второго порядка гладкости, проходящий через заданные точки (узлы) A, B, C, D и касающийся характеристической ломаной $AT_1T_2T_3D$ в граничных точках A и D . Указанным условиям удовлетворяет кубический сплайн (рис. 14.18). Сплайн состоит из дуг AB, BC, CD кубических парабол, стыкующихся между собой с гладкостью второго порядка.

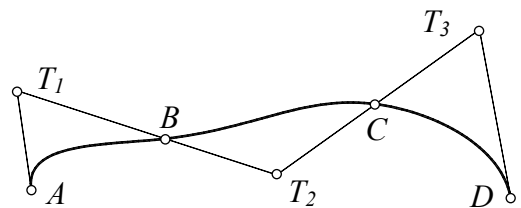


Рис. 14.18

В конструкции кубического сплайна не предусмотрена возможность управления углами наклона касательных к сплайну в его “внутренних” точках. Поэтому с помощью кубического сплайна не удастся получить обвод, касающийся характеристической ломаной во внутренних узловых точках B и C . Касание обеспечивается только в граничных точках A и D (см. рис. 14.18).

Обвод из сегментов кубических парабол в форме Безье

Пусть требуется построить обвод первого порядка гладкости из сегментов кубических парабол, проходящий через узловые точки A, B, C, D и имеющий в этих точках заданные касательные t_A, t_B, t_C, t_D . Для решения задачи указываем управляющие точки 1-2, 3-4, 5-6, лежащие на данных касательных (рис. 14.19).

Рассмотрим участок AB . В соответствии с уравнением (14.2), характеристическая ломаная $A12B$ полностью определяет сегмент AB кубической параболы. Перемещая точки 1 и 2 вдоль заданных касательных t_A, t_B , можно управлять формой этого сегмента.

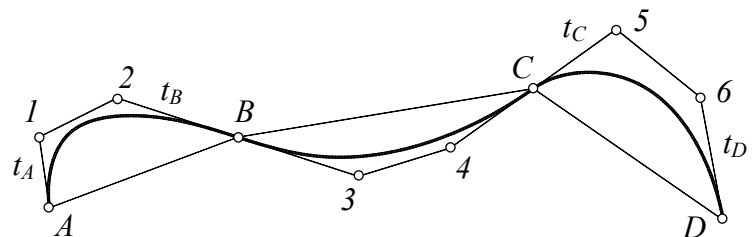


Рис. 14.19

Точно так же, перемещая точки 3, 4 вдоль касательных t_B и t_C , а точки 5, 6 – вдоль касательных t_C и t_D , можно управлять формой кубических сегментов BC и CD .

Кривые Безье позволяют сконструировать обвод не только первого, но и второго порядка гладкости. Для этого надо обеспечить одинаковую кривизну сегментов в точ-

ках стыка, что достигается специальным выбором положения управляющих точек. Действительно, при перемещении управляющих точек A_1, A_2 меняется не только форма всего сегмента, но и его кривизна в конечных точках (см. рис. 14.16). Можно рассчитать требуемое положение управляющих точек соседних сегментов из условия равенства кривизны в точках стыка.

Заметим, что такой расчет возможен не всегда. Например, на рис. 14.19 показан обвод, где стыковые точки B и C являются точками перегиба. Для обеспечения второго порядка гладкости кривизна соединяемых сегментов в этих точках должна быть равна нулю, то есть кубический сегмент BC должен иметь нулевую кривизну в своих конечных точках. Но такое условие невозможно обеспечить, поскольку кубическая парабола имеет единственную точку с нулевой кривизной (точку перегиба). В этом случае сегмент BC разбивают на два “подсегмента”, введя дополнительную узловую точку, в которой не требуется обеспечивать нулевую кривизну стыкующихся “подсегментов”.

Вывод. *Компьютерная графика предоставляет замечательно разнообразные средства и методы конструирования гладких кривых линий. В основе этих методов лежит параметрический способ задания кривых, позволяющий избавиться от “привязки” к декартовой системе координат и придать геометрический смысл коэффициентам алгебраических уравнений, описывающих конструируемую кривую.*

Вопросы для повторения

1. Что называют компьютерной графикой?
2. Что такое “система автоматизированного проектирования”? Какие программные средства содержатся в САПР?
3. Назвать характерные особенности 3D-графики, отличающей ее от обычной 2D-графики. Что общего между этими видами графики?
4. Используется ли в трехмерной компьютерной графике метод проецирования? Если да, то с какой целью?
5. В чем состоит основное назначение трехмерного компьютерного моделирования?
6. Какие новые возможности в построении кривых линий предоставляет компьютерная графика?

Лекция 15

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Начертательная геометрия – раздел математики, в котором изучается теория конструктивных методов отображения пространств различной размерности друг на друга. В конструктивном методе отображения исходное пространство и его модель “связаны” некоторой проекционной системой, включающей в себя проецирующие линии и поверхности. В этой главе рассмотрен простейший конструктивный способ отображения четырехмерного пространства E^4 на плоскость – обобщенный чертеж Монжа.

Многомерная геометрия возникла путем аналогии с геометрией на плоскости и с геометрией в трехмерном пространстве. На прямой линии точка задается одной координатой, на плоскости – двумя, в пространстве – тремя координатами. Для определения положения точки в четырехмерном пространстве надо указать четыре ее координаты.

На плоскости система координат имеет две оси, в пространстве – три. Как на плоскости, так и в пространстве каждая из осей координат может быть выбрана перпендикулярно другим осям. В четырехмерном пространстве система декартовых координат содержит четыре оси, причем любая пара этих осей перпендикулярна друг другу. Такое пространство существует лишь в воображении, так как реальное пространство трехмерно. Поэтому увидеть или смоделировать в буквальном, физическом смысле фигуры четырехмерного пространства никто не в состоянии. Увидеть эти фигуры и исследовать их свойства возможно только мысленно.

Человек, который впервые слышит о четырехмерном пространстве, готов возразить: “Но ведь не может быть четырех прямых, которые друг другу перпендикулярны!”. Действительно, в реальном трехмерном пространстве такая геометрическая конструкция невозможна. Но в виртуальном, воображаемом пространстве E^4 все четыре оси x, y, z, t декартовой системы координат могут быть приняты взаимно перпендикулярными.

Нет ничего нелогичного или противоречивого в том, чтобы рассматривать четверки чисел как координаты точки, исследовать свойства этих “четырёхмерных точек”, составлять из них фигуры, доказывать теоремы, постепенно формируя таким образом геометрию четырехмерного пространства.

15.1. Точка, прямая, плоскость, гиперплоскость пространства E^4

Чертеж для моделирования четырехмерного пространства состоит из трех полей проекций: $\Pi_1=Oxy$, $\Pi_2=Oxz$, $\Pi_3=Oxt$, где x, y, z, t – оси ортогональной системы координат. Точка A ортогонально проецируется на три плоскости проекций, затем вращением вокруг оси Ox плоскости Π_1, Π_2, Π_3 совмещаются. При этом проекции A_1, A_2, A_3 данной точки располагаются на одной линии связи, перпендикулярной оси Ox (рис. 15.1). Такой чертеж называют обобщенным чертежом Монжа.

Полученный чертеж является обратимым, так как на нем имеются четыре отрезка, определяющие координаты x_A, y_A, z_A, t_A точки A в пространстве E^4 . Точку называют пространством нулевой размерности или *0-плоскостью*.

Прямая определяется двумя своими точками. Указав проекции двух произвольных точек A, B и соединив одноименные проекции, получим чертеж прямой общего положения в пространстве E^4 (рис. 15.2). Прямая – одномерное пространство (*1-плоскость*).

Плоскость в пространстве E^4 , точно так же, как и в E^3 , задается тремя точками A, B, C (рис. 15.3), или точкой и прямой, или двумя пересекающимися прямыми. Плоскость – двумерное пространство (*2-плоскость*). Это пространство заполнено принадлежащими

ему точками и прямыми: точки A, B, C плюс три прямые, соединяющие эти точки, плюс все точки на этих трех прямых, плюс все прямые, соединяющие любые две точки, взятые по одной на каждой из этих прямых.

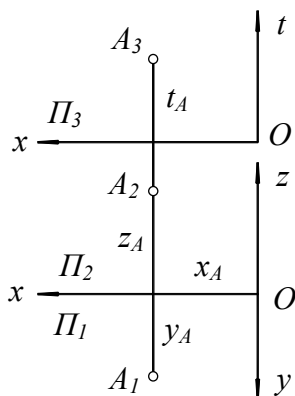


Рис. 15.1

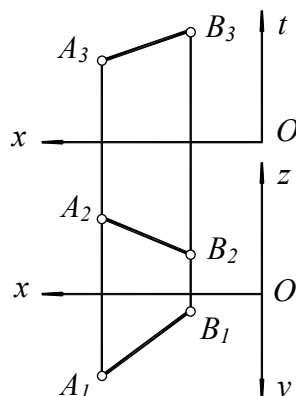


Рис. 15.2

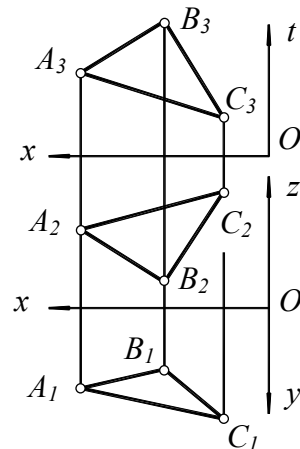


Рис. 15.3

Определение. Точечное пространство такой структуры, когда оно вместе с любыми двумя своими точками содержит прямую, проходящую через них, называется линейным.

Пространство нулевой размерности (точка) может быть “вложено” в линейное пространство размерности один (прямая). Другими словами, точка может принадлежать прямой. Говорят, что на прямой имеется ∞^1 точек, так как точка на прямой определяется одной своей координатой.

Пространство размерности один (прямая) может быть вложено в пространство размерности два (плоскость), то есть прямая может принадлежать плоскости. На плоскости имеется ∞^2 прямых, так как прямая на плоскости вполне определяется двумя отрезками, отсекаемыми ею на осях координат (двумя параметрами).

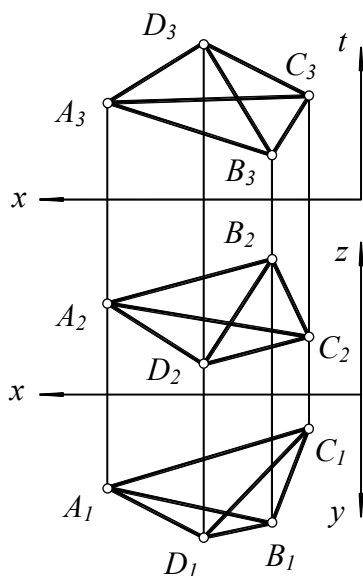


Рис. 15.4

Пространство размерности два (*2-плоскость*, то есть обычная плоскость) вложено в трехмерное пространство (*3-плоскость*). В трехмерном пространстве существует ∞^3 плоскостей, так как положение плоскости, принадлежащей трехмерному пространству, определяется тремя параметрами (например, тремя отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат).

Трехмерное пространство (*3-плоскость*), вложенное в пространство E^4 , вполне определяется четырьмя некопланарными точками $ABCD$ (рис. 15.4), или точкой и плоскостью, или двумя скрещивающимися прямыми, или тремя проходящими через одну точку некопланарными прямыми, или двумя пересекающимися по прямой плоскостями, или пересекающимися прямой и плоскостью.

Трехмерное пространство как часть четырехмерного пространства называют *гиперплоскостью*. Гиперплоскость – линейное подпространство, заполненное принадлежащими ему точками, прямыми и плоскостями. Это подпространство включает в себя точки A, B, C, D плюс шесть

прямых, соединяющих эти точки, плюс все прямые, соединяющие любую пару точек на этих прямых, плюс всевозможные плоскости, образованные этими точками и прямыми. В пространстве E^4 содержится множество ∞^4 гиперплоскостей, так как положение ги-

перпоскости в E^4 определяется четырьмя параметрами (например, четырьмя отрезками, отсекаемыми гиперплоскостью на осях координат). В четырехмерном пространстве наше привычное пространство E^3 становится лишь частью (подпространством) объемлющего пространства E^4 .

15.2. Инцидентность элементов гиперплоскости пространства E^4

Гиперплоскость четырехмерного пространства содержит “вложенные” в нее линейные элементы: точки, прямые и плоскости. Взаимопринадлежность (инцидентность) этих элементов определяется следующим признаком: *точка инцидентна гиперплоскости, если она принадлежит какой-либо прямой или плоскости, вложенной в данную гиперплоскость.*

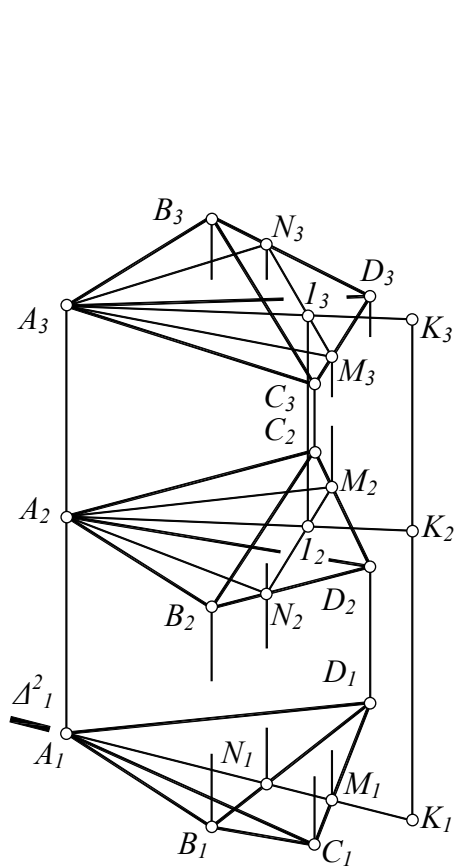


Рис. 15.5

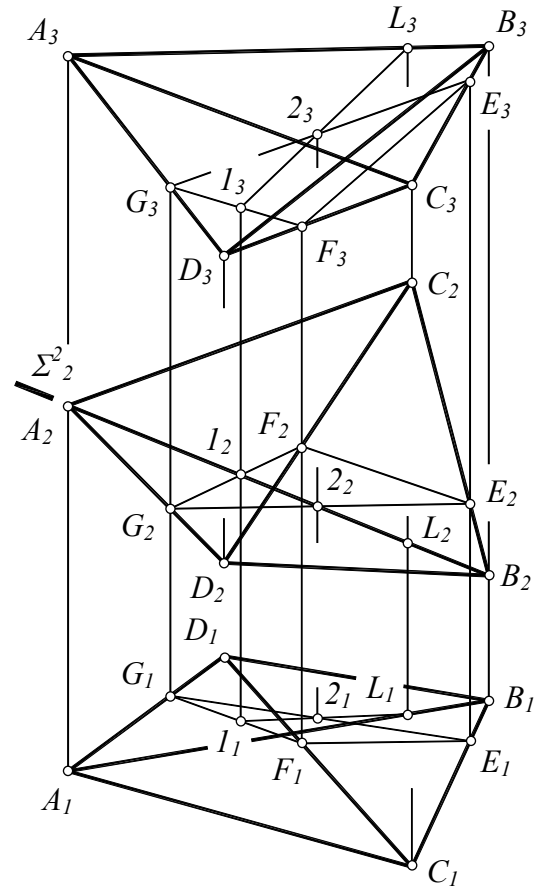


Рис. 15.6

Пусть гиперплоскость Σ^3 задана четырьмя точками A, B, C, D (здесь и далее надстрочный индекс обозначает размерность подпространства). Требуется построить какую-либо точку, инцидентную данной гиперплоскости. Покажем, что можно совершенно произвольно указать две проекции искомой точки, после чего найти ее третью проекцию из условия принадлежности гиперплоскости (рис. 15.5).

Произвольно отмечаем на чертеже две проекции K_1, K_2 некоторой точки K четырехмерного пространства и “объявляем” ее принадлежащей гиперплоскости Σ^3 . В гиперплоскости Σ^3 выделим плоскость $\Delta^2 = AMN$, проходящую через точку K . В плоскости Δ^2 проводим прямую AK , которая в точке I пересекается с MN .

Задача решена, так как точка K принадлежит гиперплоскости Σ^3 . Действительно, точка K инцидентна прямой $A-I$, вложенной в плоскость Δ^2 , которая, в свою очередь,

вложена в Σ^3 . Недостающая проекция K_3 точки K определяется на чертеже посредством линий связи (из условия принадлежности точки K данной гиперплоскости).

Подобным образом задача на принадлежность точки плоскости решается в обычном пространстве E^3 : для построения точки, принадлежащей плоскости, указывают одну проекцию искомой точки. Вторая проекция определяется из условия принадлежности точки данной плоскости.

Правило. Для построения точки, принадлежащей гиперплоскости, достаточно указать две ее проекции. Третья проекция определяется из условия принадлежности точки данной гиперплоскости.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется построить точку L пересечения прямой $l=AB$ и плоскости $\Delta^2=EFG$, вложенной в гиперплоскость $ABCD$ (рис. 15.6). Оба линейных элемента (прямая l и плоскость Δ^2) принадлежат одной и той же гиперплоскости $ABCD$, поэтому достаточно найти две проекции искомой точки. Для этого может быть использована любая пара проекций обобщенного чертежа. Рассматривая проекции Π_1 и Π_2 как чертеж тетраэдра $ABCD$, находим точку пересечения ребра тетраэдра $l=AB$ и плоскости Δ^2 : проводим через l вспомогательную плоскость Σ^2 , находим линию 1-2 пересечения плоскостей Δ^2 и Σ^2 и отмечаем искомую точку $L=l \cap (1-2)$. Третья проекция L_3 точки L определяется по линии связи.

15.3. Пересечение подпространств четырехмерного пространства

В E^4 существуют линейные подпространства: точки, прямые, плоскости и гиперплоскости. Эти подпространства либо “вложены” друг в друга, либо пересекаются (инцидентны), либо вовсе не имеют общих элементов (скрещиваются).

15.3.1. Пересечение прямой с плоскостью

Произвольная прямая и плоскость общего положения в четырехмерном пространстве не пересекаются (подобно тому, как в обычном пространстве не пересекаются две прямые общего положения). Действительно, допустим, что некоторая плоскость Γ^2 и прямая l пересеклись в точке L . Отметим на плоскости Γ^2 тройку произвольных точек A, B, C , а на прямой l – произвольную точку D . Четыре точки A, B, C, D определяют в E^4 некоторую гиперплоскость Σ^3 . Очевидно, плоскость Γ^2 и прямая l “вложены” в эту гиперплоскость, так как прямая l имеет две точки D, L , а плоскость Γ^2 – три точки A, B, C , инцидентные Σ^3 . Но в таком случае прямая l и плоскость Γ^2 занимают в E^4 не произвольное “общее” положение, а частное: они принадлежат одной и той же гиперплоскости Σ^3 .

Попытаемся построить точку пересечения произвольной прямой l с плоскостью общего положения Δ^2 . Предварительно мысленно передвинем и повернем систему координат $Oxuzt$ до совмещения плоскости проекций $\Pi_1=Oxy$ с плоскостью Δ^2 (рис. 15.7). Если существует точка пересечения прямой l и плоскости $\Delta^2=\Pi_1$, то она должна иметь по осям t и z координаты, равные нулю (так как оси t и z перпендикулярны плоскости Π_1). На прямой l есть точка 1 с координатой $t=0$ и точка 2 с координатой $z=0$, но нет точки, в которой обе координаты t и z равны нулю. Поэтому прямая l не имеет общей точки с плоскостью Δ^2 .

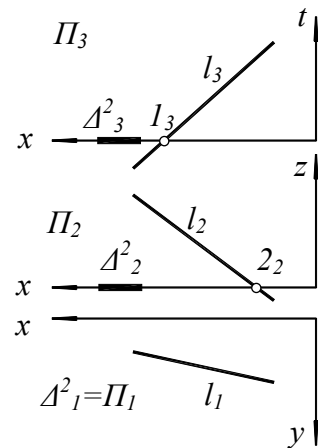


Рис. 15.7

15.3.2. Пересечение двух плоскостей

Две плоскости общего положения в четырехмерном пространстве (не “вложенные” в одну гиперплоскость) пересекаются только в одной точке. Действительно, предположим, что две плоскости Σ^2 и Δ^2 в пространстве E^4 пересеклись по прямой. Отметим на этой прямой две произвольные точки A, B . На плоскости Σ^2 отметим произвольную точку C , на плоскости Δ^2 отмечаем точку D . Точки A, B, C, D определяют в R^4 гиперплоскость, которой принадлежит как плоскость $\Sigma^2=ABC$, так и плоскость $\Delta^2=ABD$. Следовательно, если две плоскости в E^4 пересекаются по прямой, то они “вложены” в одну гиперплоскость, то есть занимают не общее, а частное положение.

Пусть в пространстве E^4 даны две произвольные плоскости. Совместим одну из них с плоскостью проекций $\Pi_1=Oxy$, а другую плоскость зададим тремя произвольными точками A, B, C (рис. 15.8). Построим общий элемент плоскостей Π_1 и ABC . Искомый элемент находится в Π_1 , поэтому он должен иметь по оси t координату, равную нулю (так как ось t перпендикулярна плоскости Π_1). Этому условию удовлетворяют все точки прямой $1-2$ (см. рис. 15.8). Но по оси z искомый общий элемент плоскостей Π_1 и ABC также должен иметь координату, равную нулю (потому что ось z , как и ось t , перпендикулярна Π_1). Условию $z=0$ удовлетворяет единственная точка D на прямой $1-2$, которая и является общим элементом данных плоскостей в пространстве E^4 . Таким образом, плоскости общего положения в четырехмерном пространстве пересекаются только в одной точке.

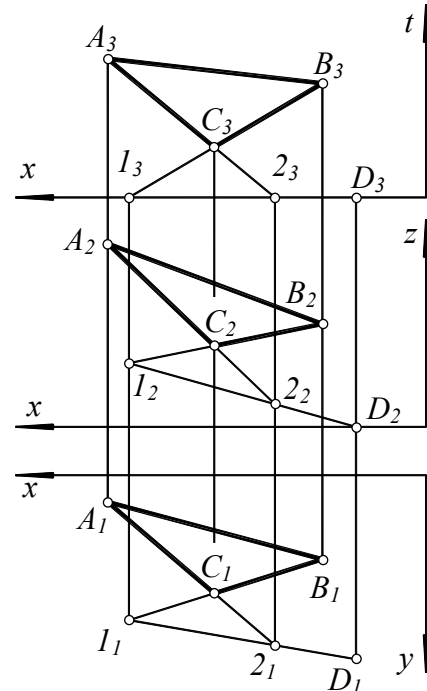


Рис. 15.8

15.3.3. Пересечение прямой и гиперплоскости

Произвольная прямая и гиперплоскость общего положения в четырехмерном пространстве пересекаются в одной точке. Рассмотрим эту задачу на обобщенном чертеже Монжа. Пусть на чертеже каким-либо способом (четырьмя некопланарными точками, двумя скрещивающимися прямыми, тремя пересекающимися прямыми или др.) задана гиперплоскость Σ^3 . Требуется найти точку пересечения этой гиперплоскости с произвольной прямой l .

В гиперплоскости Σ^3 можно построить произвольную тройку взаимно перпендикулярных прямых x', y', z' . Для этого надо отметить в Σ^3 произвольную плоскость, начертить в ней две произвольные взаимно перпендикулярные прямые x', y' и через точку их пересечения провести перпендикуляр z' к плоскости $x'y'$. Мысленно выполнив такое построение, переместим систему координат x, y, z, t таким образом, чтобы оси x, y, z совместились с прямыми x', y', z' . В результате гиперплоскость Σ^3 совпадет с “координатной гиперплоскостью” $Oxyz$.

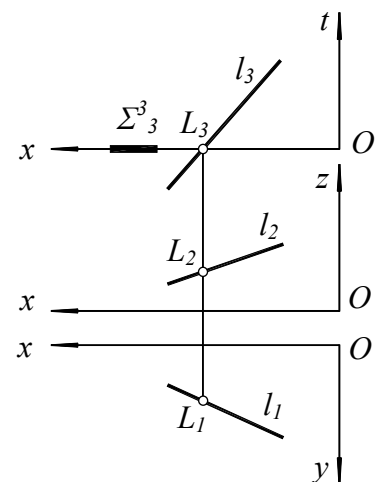


Рис. 15.9

Проекция гиперплоскости Σ^3 на плоскость $\Pi_3=Oxt$ вырождается в прямую, совпадающую с осью x (так как координаты по оси t всех точек этой гиперплоскости равны нулю), а ее невырожденными проекциями на Π_1 и Π_2 будут точечные поля $\Pi_1=Oxy$ и $\Pi_2=Oxz$ (рис. 15.9). Прямая l занимает общее положение в четырехмерном пространстве и пересекается с трехмерным подпространством Σ^3 в точке L . Действительно, координата точки L по оси t равна нулю, то есть L принадлежит гиперплоскости $\Sigma^3=Oxyz$. С другой стороны, точка L принадлежит прямой l , поэтому L – искомая общая точка прямой l и гиперплоскости Σ^3 .

15.3.4. Пересечение плоскости и гиперплоскости

Покажем, что произвольная плоскость Δ^2 и гиперплоскость Σ^3 пространства E^4 пересекаются по прямой. Как в предыдущем примере, мысленно заменим систему координат

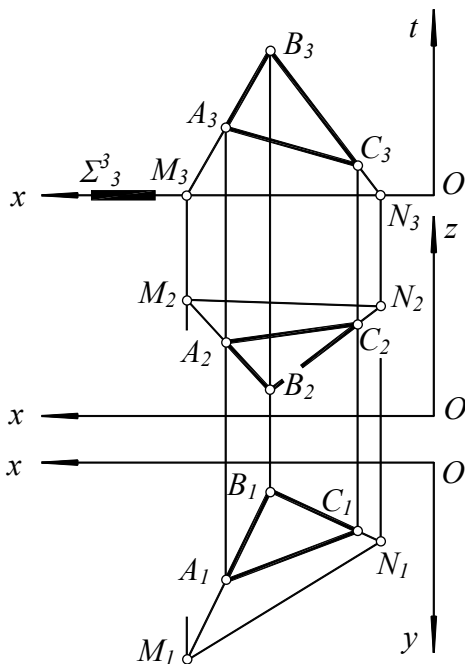


Рис. 15.10

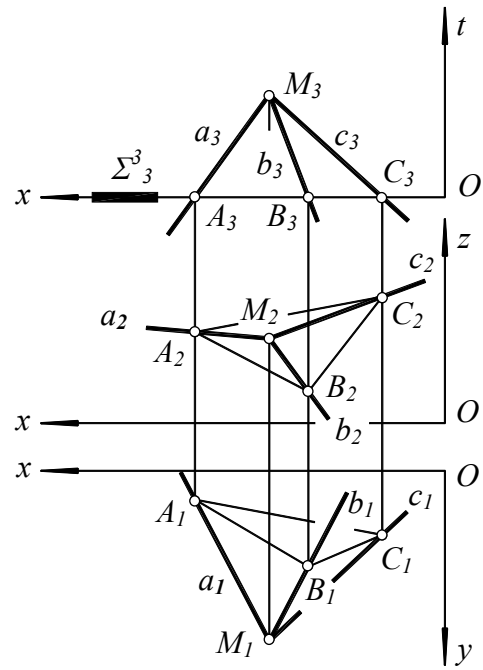


Рис. 15.11

динат таким образом, чтобы данная гиперплоскость Σ^3 совместилась с координатной гиперплоскостью $Oxyz$. При этом проекция гиперплоскости Σ^3 на плоскость $\Pi_3=Oxt$ вырождается в прямую, совпадающую с осью Ox , а плоскость Δ^2 , заданная точками A, B, C , занимает некоторое общее положение (рис. 15.10). Стороны AB и BC треугольника ABC пересекаются с гиперплоскостью Σ^3 в точках M и N , а вся прямая MN принадлежит как пространству Σ^3 , так и плоскости Δ^2 . Следовательно, прямая MN – линия пересечения плоскости Δ^2 и гиперплоскости Σ^3 .

15.3.5. Пересечение двух гиперплоскостей

Две гиперплоскости Σ^3 и Θ^3 четырехмерного пространства пересекаются по обычной 2-плоскости. Как в предыдущих примерах, мысленно заменим систему координат таким образом, чтобы гиперплоскость Σ^3 совместилась с координатной гиперплоскостью $Oxyz$. Другая гиперплоскость $\Theta^3(a \cap b \cap c)$, заданная на чертеже тремя пересекающимися в точке M прямыми a, b, c , будет занимать произвольное общее положение (рис. 15.11). Все точки пространства E^4 , координата которых по оси t равна нулю, при-

надлежат гиперплоскости $Oxyz$. Поэтому общим элементом гиперплоскостей $\Sigma^3(Oxyz)$ и Θ^3 является множество точек гиперплоскости Θ^3 , координата которых по оси t равна нулю. Этому условию удовлетворяют все точки и прямые плоскости ABC , где A, B, C – точки пересечения прямых a, b, c и гиперплоскости $Oxyz$. Следовательно, ABC есть плоскость пересечения двух гиперплоскостей.

15.3.6. Размерность пространства пересечения

Отметим определенную закономерность, возникающую при пересечении подпространств различной размерности в объемлющем трех или четырехмерном пространстве. Так, например, плоскость (пространство размерности 2) и прямая (пространство размерности 1) пересекаются в обычном трехмерном пространстве в одной точке (пространство нулевой размерности).

Можно предположить, что размерность пространства пересечения равна сумме размерностей пересекающихся подпространств (в нашем примере: *два плюс один*) минус размерность объемлющего пространства (*три*). Для рассмотренного примера получаем *ноль* (размерность точки), что соответствует действительности. Проверим свое предположение, подсчитав, например, размерность пространства пересечения двух гиперплоскостей четырехмерного пространства: *три* плюс *три* (размерности пересекающихся подпространств) минус *четыре* (размерность объемлющего пространства) – получаем *два* (размерность плоскости), что соответствует модели четырехмерного пространства.

Продолжая “экспериментальную проверку”, убеждаемся, что во всех случаях пересечения двух подпространств выполняется соотношение

$$r = p_1 + p_2 - n,$$

где r – размерность пространства пересечения двух подпространств размерности p_1 и p_2 , вложенных в объемлющее пространство размерности n . Если полученное значение r меньше нуля, то данные подпространства не пересекаются. Например, для плоскости и прямой в пространстве R^4 получаем размерность их общего пространства $r = -1$, что означает отсутствие пересечения (обычная плоскость и прямая общего положения в четырехмерном пространстве не пересекаются).

15.4. Перпендикулярность в четырехмерном пространстве

В обычном трехмерном пространстве для построения точки пересечения прямой и плоскости или линии пересечения двух плоскостей используется вспомогательный “геометрический инструмент” – проецирующая плоскость, то есть плоскость, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций. Проекция такой плоскости вырождается в прямую линию.

При переходе в четырехмерное пространство основным вспомогательным инструментом становится “*проецирующая гиперплоскость*”, то есть трехмерное подпространство, перпендикулярное какой-либо плоскости проекций. Проекция всего трехмерного подпространства на эту плоскость проекций вырождается в прямую линию.

Может показаться странным, что бесконечная по количеству элементов и ничем не ограниченная в пространстве гиперплоскость (трехмерное множество) не заполняет собой все предоставленное ему пространство (пусть даже и четырехмерное). Кажется еще более странным, что изображение трехмерного пространства может выглядеть прямой линией.

Тем не менее, нас не удивляет, что двумерное пространство (обычная плоскость) не заполняет собой все трехмерное пространство, хотя плоскость ничем не ограничена и

содержит бесконечное множество точек и прямых. Если в обычном пространстве каким-либо образом задать плоскость, то, очевидно, в пространстве найдутся точки и прямые, не принадлежащие этой плоскости. Точно так же в четырехмерном пространстве можно указать точки, прямые и плоскости, не принадлежащие данной гиперплоскости.

Также не вызывает затруднений тот факт, что в обычном трехмерном пространстве изображение двумерного пространства (плоскости) может вырождаться в прямую линию. Труднее представить, что изображение гиперплоскости пространства E^4 также может вырождаться на чертеже в прямую линию. При каких условиях это происходит?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим условия перпендикулярности прямой, плоскости и гиперплоскости к какой-либо плоскости проекций в четырехмерном пространстве. Для определенности будем рассматривать условия перпендикулярности к плоскости $\Pi_1=Oxy$.

15.4.1. Перпендикуляр, восстановленный к плоскости проекций

В пространстве E^4 из любой точки плоскости $\Pi_1=Oxy$ можно восстановить к Π_1 не один, а множество перпендикуляров. Например, через точку O (начало координат) проходит множество прямых m_i , лежащих в плоскости $\Pi_4=Ozt$. Покажем, что все прямые этого множества перпендикулярны плоскости $\Pi_1=Oxy$.

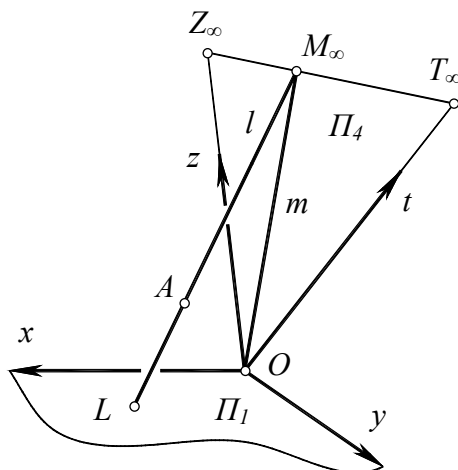


Рис. 15.12

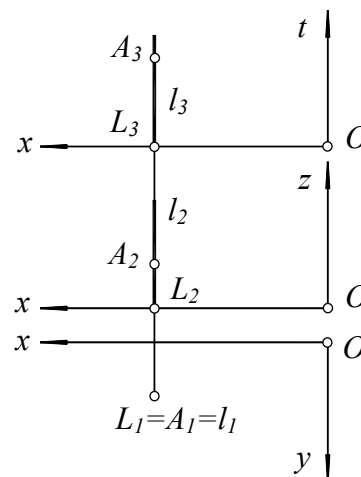


Рис. 15.13

Возьмем в координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$ произвольную прямую m , проходящую через точку O (рис. 15.12). Как у любой точки плоскости Ozt , координаты x, y всех точек этой прямой равны нулю (то есть равны координатам $x_O=0, y_O=0$ точки O , в которой пересекаются взаимно перпендикулярные плоскости Π_1 и Π_4). Постоянство координат x, y всех точек прямой означает, что эта прямая (как и любая другая прямая m_i плоскости $\Pi_4=Ozt$, проходящая через точку O) перпендикулярна плоскости Π_1 .

Рассмотрим произвольную точку L плоскости Π_1 и покажем, что через нее также проходит множество перпендикуляров к Π_1 . Через точку L проведем прямую l , параллельную прямой m (см. рис. 15.12). Прямая l может быть получена параллельным переносом прямой m из точки O в точку L . Прямая l , как и прямая m , перпендикулярна плоскости Π_1 . При этом параллельные прямые l и m пересекаются в несобственной точке M_∞ , инцидентной несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$. И вообще, любая прямая, соединяющая произвольную точку плоскости Π_1 с произвольной точкой несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$, параллельна какой-либо прямой m_i , а следовательно, перпендикулярна плоскости $\Pi_1=Oxy$.

Вывод. Все прямые пространства $E^4(Oxyzt)$, проходящие через данную точку L плоскости $\Pi_1=Oxy$ и пересекающие несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$ координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$, перпендикулярны к плоскости Π_1 в данной точке L . Иными словами, любая прямая, проведенная из какой-либо точки плоскости Π_1 параллельно перпендикулярной к Π_1 координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$, перпендикулярна к Π_1 .

Таким образом, в пространстве E^4 из любой точки координатной плоскости $\Pi_1=Oxy$ можно провести пучок (однопараметрическое множество) прямых, перпендикулярных к Π_1 . Этот пучок прямых перспективен ряду точек несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$.

Чтобы смоделировать на чертеже перпендикуляр l , восставленный к плоскости Π_1 из точки L этой плоскости, достаточно провести через L прямую l параллельно координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$ (рис. 15.13).

Так как вся координатная плоскость $\Pi_4=Ozt$ ортогонально проецируется на Π_1 в точку (в начало координат O), то любая параллельная плоскости Π_4 прямая $l=LA$ также проецируется на Π_1 в точку. На рис. 15.12 и рис. 15.13 точка A на прямой l указана для “выделения” этой прямой из однопараметрического множества перпендикуляров к Π_1 , проходящих через точку L .

15.4.2. Плоскость, вполне перпендикулярная плоскости проекций

В пространстве E^4 все перпендикуляры, восставленные к плоскости $\Pi_1=Oxy$ из произвольной точки L этой плоскости, пересекают несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$ координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$. Точка L плоскости Π_1 и несобственная прямая $Z_\infty T_\infty$ задают в четырехмерном пространстве некоторую плоскость Δ^2 , “наполненную” перпендикулярами l_i к Π_1 , проходящими через точку L (рис. 15.14).

Все точки плоскости Δ^2 имеют по осям Ox , Oy одинаковые координаты, равные координатам x_L , y_L точки L , поэтому вся плоскость Δ^2 ортогонально проецируется на плоскость $\Pi_1=Oxy$ в одну и ту же точку (в точку L). Такую плоскость называют “проецирующей” или “вполне перпендикулярной” к плоскости Π_1 . Плоскости Π_1 и Δ^2 пересекаются в точке L (см. рис. 15.14). Точка L – единственная общая точка этих плоскостей. Любая проходящая через L прямая плоскости Π_1 перпендикулярна всем проходящим через L прямым плоскости Δ^2 .

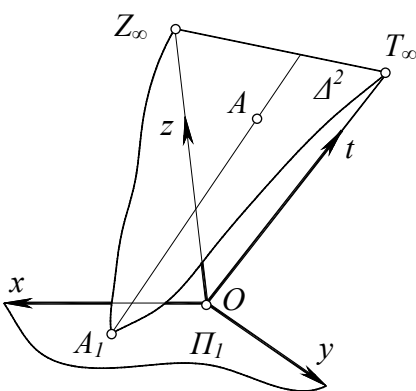


Рис. 15.15

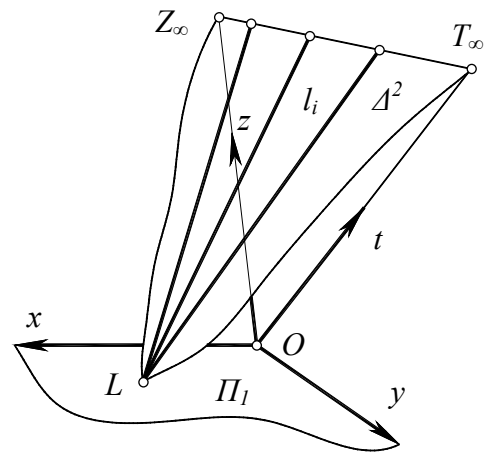


Рис. 15.14

Любая проходящая через L прямая плоскости Π_1 перпендикулярна всем проходящим через L прямым плоскости Δ^2 .

Определение. Две плоскости четырехмерного пространства называют вполне перпендикулярными, если они пересекаются в точке, причем каждая прямая одной плоскости, проходящая через их общую точку, перпендикулярна всем прямым другой плоскости, проходящим через эту же точку.

Через каждую точку L плоскости Π_1 проходит единственная проецирующая плоскость $\Delta^2(LZ_\infty T_\infty)$, поэтому размерность множества проецирующихся плоскостей совпадает с размерностью множества точек плоскости (оба множества двухпараметричны).

Говорят, что между множеством точек плоскости Π_1 и множеством проецирующихся плоскостей Δ^2 установлено взаимно-однозначное соответствие.

Все плоскости, вполне перпендикулярные к Π_1 , проходят через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$, то есть параллельны плоскости $\Pi_4 = Ozt$. И наоборот, любая плоскость, проходящая через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$ (то есть плоскость, параллельная плоскости Π_4), вполне перпендикулярна плоскости Π_1 .

Через произвольно указанную точку $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ пространства E^4 проходит единственная проецирующая плоскость $\Delta^2(AZ_\infty T_\infty)$, которая пересекается с плоскостью Π_1 в некоторой точке $A_1(x_A, y_A, 0, 0)$ (рис. 15.15). Все точки пространства E^4 с координатами x_A, y_A и произвольными координатами z, t принадлежат плоскости Δ^2 .

15.4.3. Перпендикуляр, опущенный на плоскость проекций из произвольной точки пространства E^4

Чтобы из точки A четырехмерного пространства опустить перпендикуляр d на плоскость Π_1 , предварительно проведем через A проецирующую плоскость Δ^2 . Плоскость Δ^2 , определенная несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ и точкой A , пересекается с Π_1 в некоторой точке D . Прямая d , соединяющая точки A и D , пересекается с несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ в точке A_∞ (рис. 15.16). Согласно данному в п. 15.3.1 признаку перпендикулярности, прямая $d = A_\infty AD$ есть искомым перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость Π_1 .

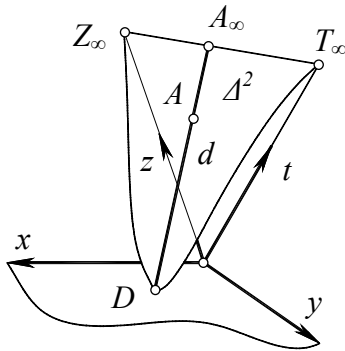


Рис. 15.16

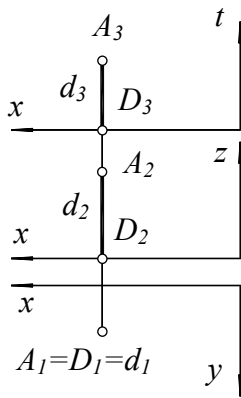


Рис. 15.17

Таким образом, через любую точку A пространства E^4 проходит единственный перпендикуляр к плоскости проекций Π_1 . Чертеж перпендикуляра $d = AD$, опущенного из точки A на плоскость Π_1 , показан на рис. 15.17.

Если точка A находится на плоскости Π_1 , то точки A и D совпадают, и положение перпендикуляра $d = AD$ становится неопределенным. В этом случае любая прямая, соединяющая точку A с произвольной точкой на несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$, перпендикулярна плоскости Π_1 (см. п. 15.4.1).

15.4.4. Гиперплоскость, перпендикулярная к плоскости проекций

Рассмотрим гиперплоскость Σ^3 , заданную двумя скрещивающимися прямыми: несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ и какой-либо прямой m , лежащей в плоскости Π_1 . Гиперплоскость Σ^3 параллельна координатной плоскости $\Pi_4 = Ozt$ (так как проходит через несобственную прямую плоскости Π_4) и пересекает координатную плоскость Π_1 по данной прямой m .

Через точку A гиперплоскости Σ^3 проходит единственная прямая a , пересекающая прямые m и $Z_\infty T_\infty$ (так как через всякую точку трехмерного пространства можно провести единственную прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые). Точки, в которых прямая a пересекается с прямыми $Z_\infty T_\infty$ и m , обозначим A_∞ и A_1 . Прямая $a = A_\infty A A_1$ принадлежит гиперплоскости Σ^3 и перпендикулярна плоскости Π_1 (рис. 15.18).

Вывод. Через произвольную точку A гиперплоскости $\Sigma^3(m, Z_\infty T_\infty)$ можно провести единственный перпендикуляр a к плоскости Π_1 . Этот перпендикуляр принадлежит Σ^3 и пересекается с Π_1 в некоторой точке A_1 , инцидентной линии m пересечения гиперплоскости Σ^3 с плоскостью Π_1 .

Таким образом, гиперплоскость Σ^3 , проходящая через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$, “наполнена” перпендикулярами к Π_1 , посредством которых все точки гиперплоскости проецируются на Π_1 в линию ее пересечения с плоскостью Π_1 . Такую гиперплоскость называют *проецирующей гиперплоскостью* (по аналогии с проецирующей плоскостью обычного трехмерного пространства, которая также “наполнена” перпендикулярами к Π_1 и также проецируется в прямую линию).

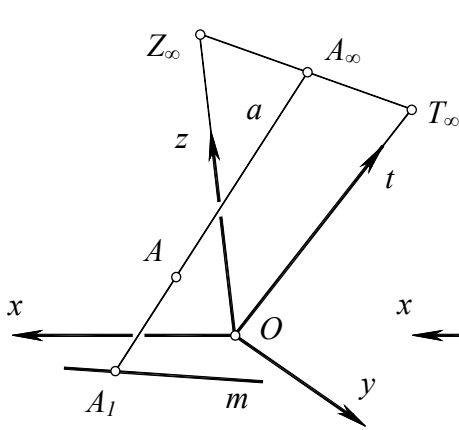


Рис. 15.18

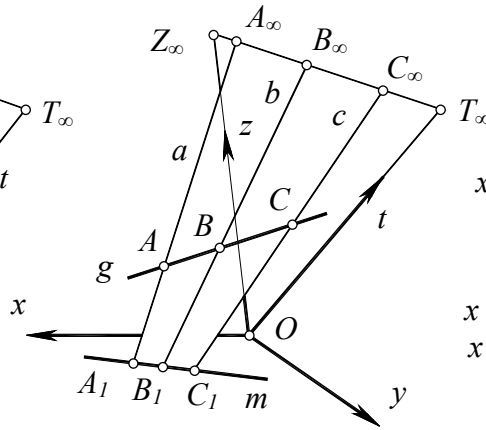


Рис. 15.19

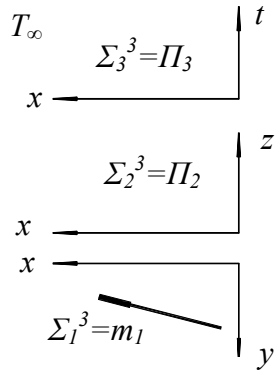


Рис. 15.20

Перпендикуляры к Π_1 , заполняющие проецирующую гиперплоскость Σ^3 , не параллельны между собой (у них нет общей несобственной точки), но параллельны координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$ (так как пересекаются с несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ плоскости Π_4). Например, рассмотрим множество перпендикуляров к плоскости Π_1 , пересекающих какую-либо прямую g , лежащую в $\Sigma^3(m, Z_\infty T_\infty)$. Любой перпендикуляр $a, b, c \dots$ из этого множества пересекается с тремя лежащими в Σ^3 прямыми ($g, m, Z_\infty T_\infty$), из которых одна несобственная (рис. 15.19). Следовательно, все перпендикуляры к Π_1 , пересекающие прямую g , образуют линейчатый параболоид с плоскостью параллелизма Π_4 . Его можно назвать *проецирующим параболоидом* (образующие параболоида перпендикулярны к Π_1 и ортогонально проецируют точки $A, B, C \dots$ прямой g на плоскость Π_1).

Чтобы задать на чертеже произвольную проецирующую (перпендикулярную к Π_1) гиперплоскость Σ^3 , достаточно указать ее вырожденную проекцию $\Sigma_1^3=m_1$. Невырожденными проекциями гиперплоскости Σ^3 будут все поля проекций $\Pi_2=Oxz$ и $\Pi_3=Oxt$ (рис. 15.20).

15.4.5. Сопряженные элементы четырехмерного пространства

В начертательной геометрии трехмерное евклидово пространство дополняется “несобственной плоскостью”, которая определена тремя несобственными точками $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$ координатных осей Ox, Oy, Oz и содержит все несобственные элементы (точки и прямые) пространства. В свою очередь, четырехмерное пространство дополняется “несобственной гиперплоскостью”, положение которой определяется четырьмя несобственными точками $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty, T_\infty$ взаимно перпендикулярных координатных осей Ox, Oy, Oz, Ot . Несобственная гиперплоскость содержит все несобственные точки, прямые и плоскости пространства E^4 .

Если какая-либо плоскость пространства E^4 проходит через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$ плоскости $\Pi_4=Ozt$, то она перпендикулярна плоскости проекций $\Pi_1=Oxy$. В силу симметрии плоскостей $\Pi_1=Oxy$ и $\Pi_4=Ozt$ справедливо и обратное: если какая-либо

плоскость проходит через несобственную прямую $X_\infty Y_\infty$ плоскости Π_1 , то она перпендикулярна плоскости Π_4 .

Определение. Несобственные прямые вполне перпендикулярных координатных плоскостей называют сопряженными прямыми.

Те из координатных плоскостей, которые не содержат одноименных осей координат, вполне перпендикулярны. Через начало координат проходят три пары вполне перпендикулярных координатных плоскостей: $\Pi_1=Oxy$ и $\Pi_4=Ozt$, $\Pi_2=Oxz$ и $\Pi_5=Oyt$, $\Pi_3=Oxt$ и $\Pi_6=Oyz$. Несобственные прямые этих плоскостей пересекаются в несобственных точках X_∞ , Y_∞ , Z_∞ , T_∞ координатных осей пространства E^4 . Эти точки являются вершинами тетраэдра, скрещивающиеся ребра которого $X_\infty Y_\infty$ и $Z_\infty T_\infty$, $X_\infty Z_\infty$ и $Y_\infty T_\infty$, $X_\infty T_\infty$ и $Y_\infty Z_\infty$ называют взаимно сопряженными (рис. 15.21). Отметим также, что всякая вершина тетраэдра $X_\infty Y_\infty Z_\infty T_\infty$ сопряжена с его противоположной гранью.

Понятие “сопряженность” связано с понятием “перпендикулярность”. Например, сопряженность вершины T_∞ с противоположной гранью $X_\infty Y_\infty Z_\infty$ означает, что координатная ось Ot перпендикулярна координатной гиперплоскости $Oxyz$. Взаимная сопряженность скрещивающихся ребер $X_\infty Z_\infty$ и $Y_\infty T_\infty$ означает, что плоскость или гиперплоскость, проходящие через $Y_\infty T_\infty$, перпендикулярны координатной плоскости $\Pi_2=Oxz$.

Рассмотренные условия перпендикулярности к плоскости проекций $\Pi_1=Oxy$ могут быть обобщены следующим образом.

1. Прямая перпендикулярна плоскости проекций Π_i , если она пересекает как эту плоскость проекций, так и несобственную прямую, сопряженную с несобственной прямой плоскости Π_i .

2. Какая-либо 2-плоскость пространства E^4 вполне перпендикулярна плоскости проекций Π_i , если она проходит через несобственную прямую, сопряженную с несобственной прямой плоскости Π_i .

3. Какая-либо гиперплоскость пространства E^4 перпендикулярна плоскости проекций Π_i , если она проходит через несобственную прямую, сопряженную с несобственной прямой плоскости Π_i .

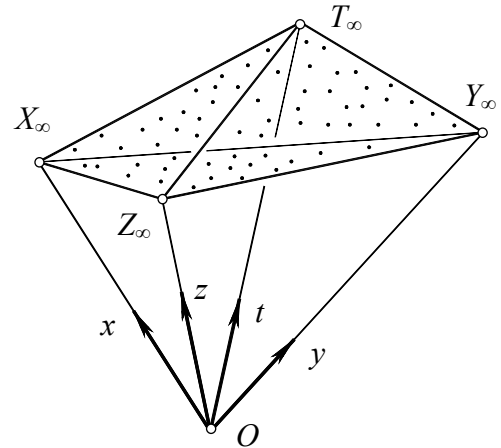


Рис. 15.21

15.5. Позиционные задачи в четырехмерном пространстве

Позиционными называют задачи на построение общих элементов геометрических множеств (прямых, плоскостей, поверхностей). Для решения таких задач обычно используется способ “понижения размерности”, который в начертательной геометрии называют способом вспомогательных поверхностей.

Например, при построении линии пересечения двух поверхностей в обычном трехмерном пространстве все пространство E^3 “расслаивают” секущими поверхностями (плоскостями, сферами или какими-либо другими поверхностями) на множество двумерных слоев. Затем в каждом слое определяют общие элементы заданных поверхностей. Тем самым трехмерная задача сводится к решению множества двумерных задач.

Заметим, что способ расслоения пространства на подпространства меньшей размерности используется не только в начертательной геометрии. Это универсальный математический прием. Например, для определения объема, ограниченного какой-либо

функцией $z=f(x, y)$, надо, как известно, “взять двойной интеграл”. Операция интегрирования в данном случае физически трактуется как расслоение пространства на плоские слои “бесконечно малой толщины” с последующим суммированием элементарных объемов этих слоев.

Мы уже рассматривали позиционные задачи в четырехмерном пространстве, но только для случая, когда одно из пересекающихся подпространств занимает особое (частное) положение относительно декартовой системы координат $Oxyz$ (см. п. 15.3). Составим алгоритмы решения этих задач для общего случая, когда пересекающиеся подпространства занимают произвольное (общее) положение.

15.5.1. Прямая и плоскость

Покажем, что произвольная прямая l и плоскость общего положения $\Delta^2(ABC)$ в пространстве E^4 не пересекаются (рис. 15.22). Заключение прямую l во вспомогательную

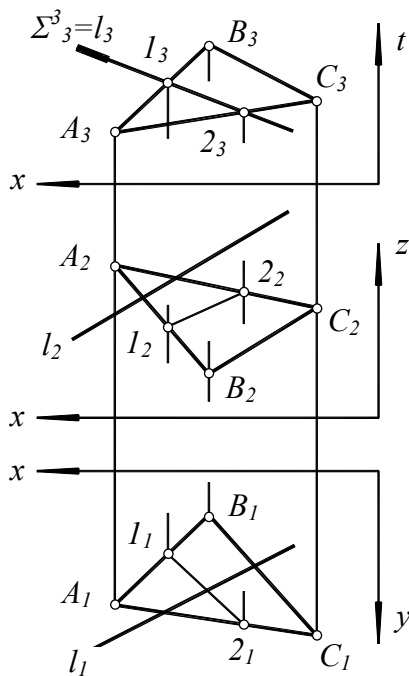


Рис. 15.22

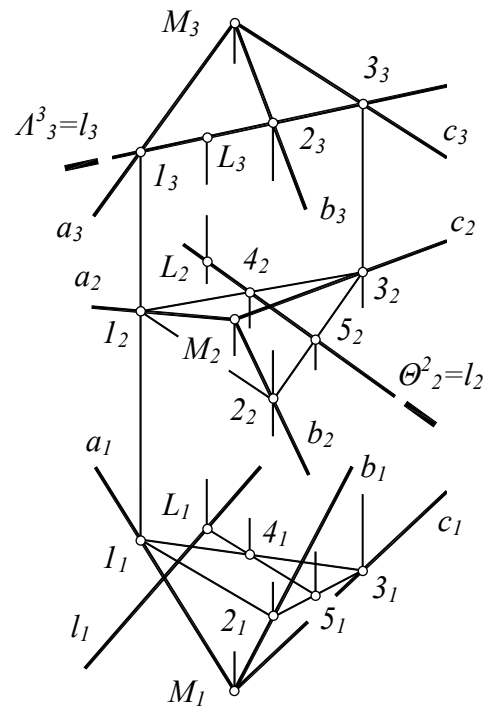


Рис. 15.23

проецирующую гиперплоскость Σ^3 , находим линию $a=l-2$ пересечения плоскости Δ^2 и гиперплоскости Σ^3 . Размерность задачи понизилась, так как теперь достаточно найти общую точку прямых a и l в трехмерном подпространстве Σ^3 . Но из чертежа (см. рис. 15.22) следует, что принадлежащие гиперплоскости Σ^3 прямые $a=l-2$ и l не имеют общей точки (скрещиваются). Следовательно, прямая и плоскость общего положения в четырехмерном пространстве не пересекаются.

Прямая и плоскость пространства E^4 пересекаются лишь в том случае, если они принадлежат одной гиперплоскости. Например, возьмем в произвольной плоскости Δ^2 пространства E^4 какую-либо точку L и проведем через нее произвольную прямую l , не лежащую в Δ^2 . Получаем пересекающиеся прямую и плоскость, что, казалось бы, противоречит утверждению, что прямая и плоскость в четырехмерном пространстве не пересекаются. На самом деле противоречия нет, так как пересекающиеся прямая l и плоскость Δ^2 занимают в четырехмерном пространстве не общее, а частное положение (прямая l и плоскость Δ^2 заключены в общую гиперплоскость).

15.5.2. Прямая и гиперплоскость

Покажем, что прямая l и произвольная гиперплоскость Σ^3 четырехмерного пространства пересекаются в точке.

Пусть гиперплоскость Σ^3 задана тремя пересекающимися в одной точке прямыми a , b , c (рис. 15.23). Чтобы понизить размерность задачи, заключаем прямую l во вспомогательную проецирующую гиперплоскость A^3 и находим плоскость 123 , общую для гиперплоскостей Σ^3 и A^3 . Так как прямая l и плоскость 123 “погружены” в одну и ту же гиперплоскость A^3 , то они пересекутся в некоторой точке L . Эта точка является искомой точкой пересечения подпространств l и Σ^3 .

Плоскость 123 и прямая l вложены в трехмерное подпространство A^3 , поэтому их взаимное положение вполне определяется двумя невырожденными проекциями на обобщенном чертеже Монжа. Точка $L=l \cap 123$ на таком чертеже “пониженной размерности” может быть найдена по обычному алгоритму:

1. Через l проводим проецирующую плоскость Θ^2 .
2. Строим линию пересечения 4-5 плоскости 123 и плоскости Θ^2 .
3. Отмечаем искомую точку $L=l \cap (4-5)$.

Заметим, что вместо вспомогательной плоскости Θ^2 может быть использована проецирующая гиперплоскость Θ^3 пространства E^4 . При этом алгоритм и его графическая реализация полностью сохраняются:

1. Через l проводим проецирующую гиперплоскость Θ^3 .
2. Строим линию пересечения 4-5 плоскости 123 и гиперплоскости Θ^3 .
3. Отмечаем искомую точку $L=l \cap (4-5)$.

15.5.3. Плоскость и гиперплоскость

Плоскость A^2 и гиперплоскость Σ^3 четырехмерного пространства пересекаются по прямой линии, для построения которой достаточно определить две общие точки данных множеств. Проведем в плоскости A^2 две произвольные прямые и по алгоритму, изложенному в предыдущем параграфе, определим точки пересечения этих прямых с гиперплоскостью Σ^3 . Искомая прямая проходит через найденные точки. Задача решена.

15.5.4. Две плоскости

Даны две плоскости общего положения $A^2(ABC)$ и $\Phi^2(m||n)$. Требуется построить точку их пересечения (рис. 15.24).

Одну из данных плоскостей заключаем в какую-либо гиперплоскость общего положения. На рис. 15.24 плоскость $A^2(ABC)$ заключена в гиперплоскость $\Sigma^3(ABCN)$, где точка N инцидентна плоскости Φ^2 (точка N произвольно отмечена на прямой n). Такой выбор “объемлющей” гиперплоскости позволяет несколько упростить последующие построения.

Таким образом, одна из данных плоскостей (плоскость A^2) полностью погружена в гиперплоскость Σ^3 , а другая (плоскость Φ^2) – пересекается с Σ^3 по некоторой прямой l . Прямая l и плоскость A^2 обязательно пересекутся, так как они погружены в общую гиперплоскость Σ^3 . Точка $L=l \cap A^2$ принадлежит как плоскости A^2 , так и плоскости Φ^2 , следовательно, это и есть искомая точка пересечения заданных плоскостей.

Рассмотрим алгоритм решения задачи на обобщенном чертеже Монжа.

1. Находим прямую l пересечения плоскости $\Phi^2(m||n)$ и гиперплоскости Σ^3 . Благодаря специальному выбору объемлющей гиперплоскости Σ^3 , одна точка этой прямой заранее известна (точка $N=n\cap\Sigma^3$), поэтому для построения всей прямой l достаточно найти еще одну точку, общую для Φ^2 и Σ^3 .

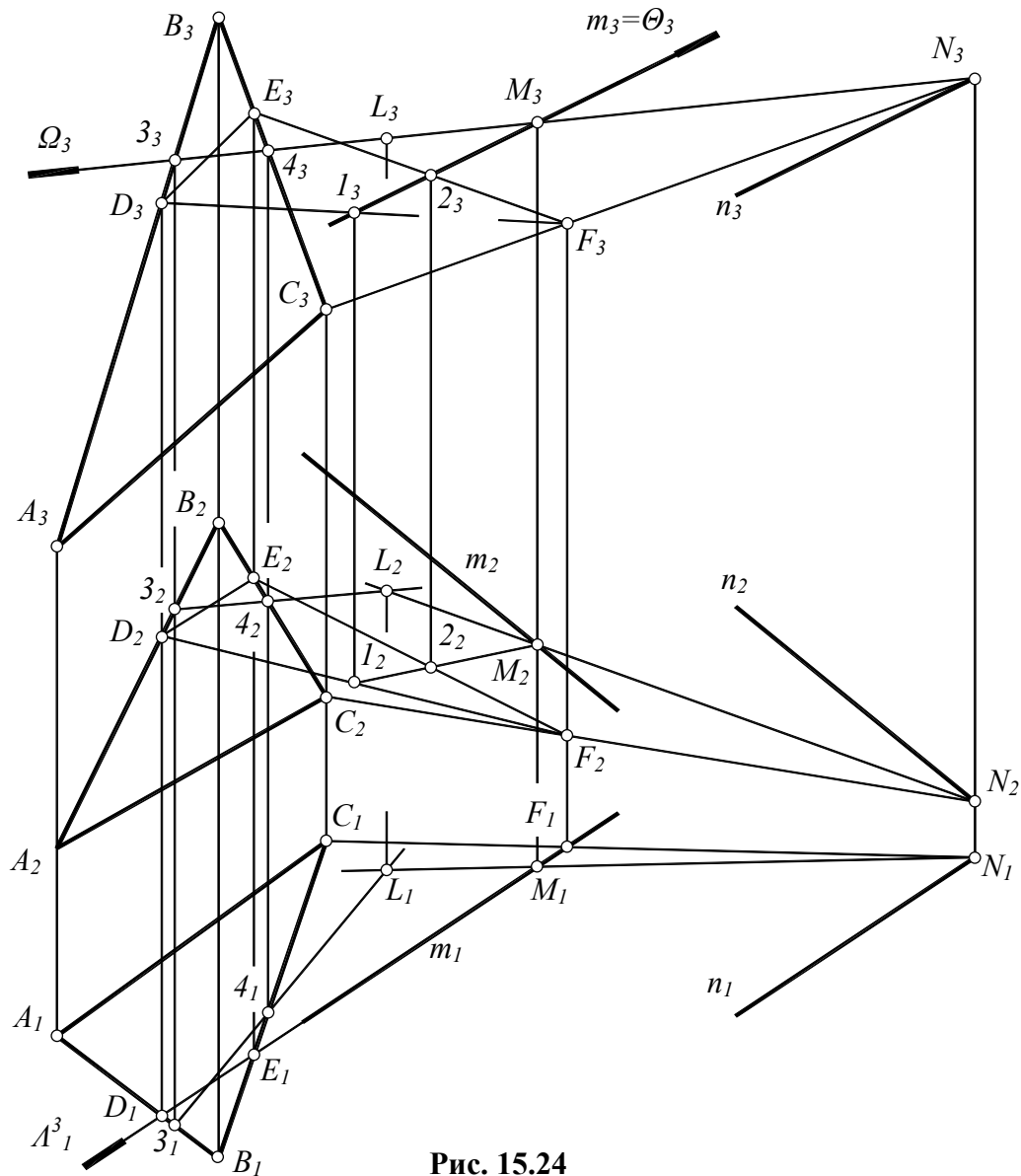


Рис. 15.24

Например, найдем точку M пересечения прямой m с гиперплоскостью Σ^3 . Для этого (в соответствии с алгоритмом, изложенным в п. 15.5.2) проводим через прямую m проецирующую гиперплоскость A^3 , которая пересекается с гиперплоскостью $\Sigma^3(ABCN)$ по плоскости DEF . Прямая m и плоскость DEF , “погруженные” в проецирующую гиперплоскость A^3 , должны пересечься в некоторой точке M .

Для построения точки $M=m\cap DEF$ проводим через m вспомогательное проецирующее подпространство Θ , строим линию пересечения $l-2$ плоскости DEF и подпространства Θ , затем отмечаем точку M на пересечении прямых m и $l-2$.

Прямая $l=MN$ есть линия пересечения плоскости $\Phi^2(m||n)$ и вспомогательной гиперплоскости $\Sigma^3(ABCN)$.

2. Плоскость A^2 и прямая $l=MN$ погружены в объемлющую гиперплоскость Σ^3 , поэтому они пересекутся в некоторой точке L . Для построения точки L проводим через

$l=MN$ проецирующее подпространство Ω , которое пересекает плоскость $\Delta^2(ABC)$ по прямой 3-4. Прямые l и 3-4 пересекаются в искомой точке $L=\Delta^2\cap\Phi^2$.

Примечание. Подпространства Θ и Ω могут считаться либо проецирующими гиперплоскостями на обобщенном чертеже Монжа, либо проецирующими плоскостями на обычном двухпроекционном чертеже, состоящем из полей Π_2 и Π_3 .

15.5.5. Две гиперплоскости

Две произвольные гиперплоскости четырехмерного пространства пересекаются по 2-плоскости. Рассмотрим алгоритм построения общей плоскости двух данных гиперплоскостей Δ^3 и Φ^3 .

В одной из данных гиперплоскостей (например, в Δ^3) выделяем произвольную прямую a и находим точку A пересечения этой прямой с гиперплоскостью Φ^3 . Точка A – общая точка множеств Δ^3 и Φ^3 .

Трижды повторяя описанную процедуру, получим три общие точки данных подпространств Δ^3 и Φ^3 , через которые проходит искомая плоскость. Алгоритм построения точки пересечения прямой и гиперплоскости изложен в п. 15.5.2.

15.6. “Клетка” в четырехмерном пространстве

Отметим на прямой линии $l=x$ две точки O и L , а между ними – точку A . Нам не удастся переместить точку A вдоль прямой в положение A' , минуя граничные точки отрезка OL . Но можно покинуть ось x , выйдя из одномерного пространства x в двумерное пространство листа бумаги, и “перескочить” граничную точку (рис. 15.25, а).

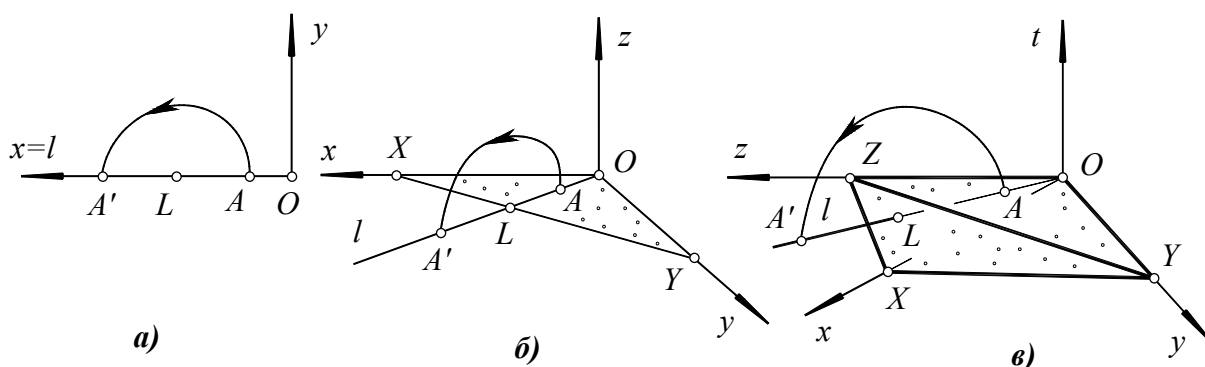


Рис. 15.25

Начертим в плоскости $xу$ треугольник OXY , а внутри – точку A . Как бы мы ни двигали точку по плоскости, извлечь ее из треугольной клетки невозможно. Но стоит только “выйти в третье измерение”, и точку легко вынуть из треугольника, подняв ее вверх, над плоскостью. У всех точек плоскости $xу$ координата z равна нулю. Поэтому достаточно переместить точку A в направлении оси z (то есть придать координате z_A точки A ненулевое значение), и точка покинет не только треугольную клетку OXY , но всю координатную плоскость $xу$ (рис. 15.25, б).

Аналогично дело обстоит в трехмерном пространстве. Если имеется четырехгранник $OXYZ$, внутри которого заключена точка A , то, не прорывая грани тетраэдра, невозможно вынуть из него точку. Но если бы существовало четвертое измерение, то можно было бы “поднять” точку над трехмерным пространством (над координатной гиперплоскостью $xуz$) в направлении четвертого измерения t , а затем снова вложить ее в гиперплоскость $xуz$, но уже вне четырехгранника $OXYZ$. Действительно, у всех точек, лежащих в гиперплоскости $xуz$, координата t равна нулю, так как ось t перпендикулярна

гиперплоскости xyz . Следовательно, можно переместить точку A в направлении оси t (придать координате t_A точки A ненулевое значение), и точка выйдет не только из тетраэдра $OXYZ$, но и из всего трехмерного пространства xyz (рис. 15.25, в).

15.6.1. Гиперпятигранник

Возникает естественный вопрос: какова должна быть простейшая клетка, ограничивающая перемещение точки в пространстве E^4 ? “Стенки” такой клетки не могут быть образованы обычными плоскостями, так как точка в четырехмерном пространстве способна перемещаться по прямолинейной или криволинейной траектории, не пересекаясь ни с одной из плоскостей, заполняющих пространство E^4 .

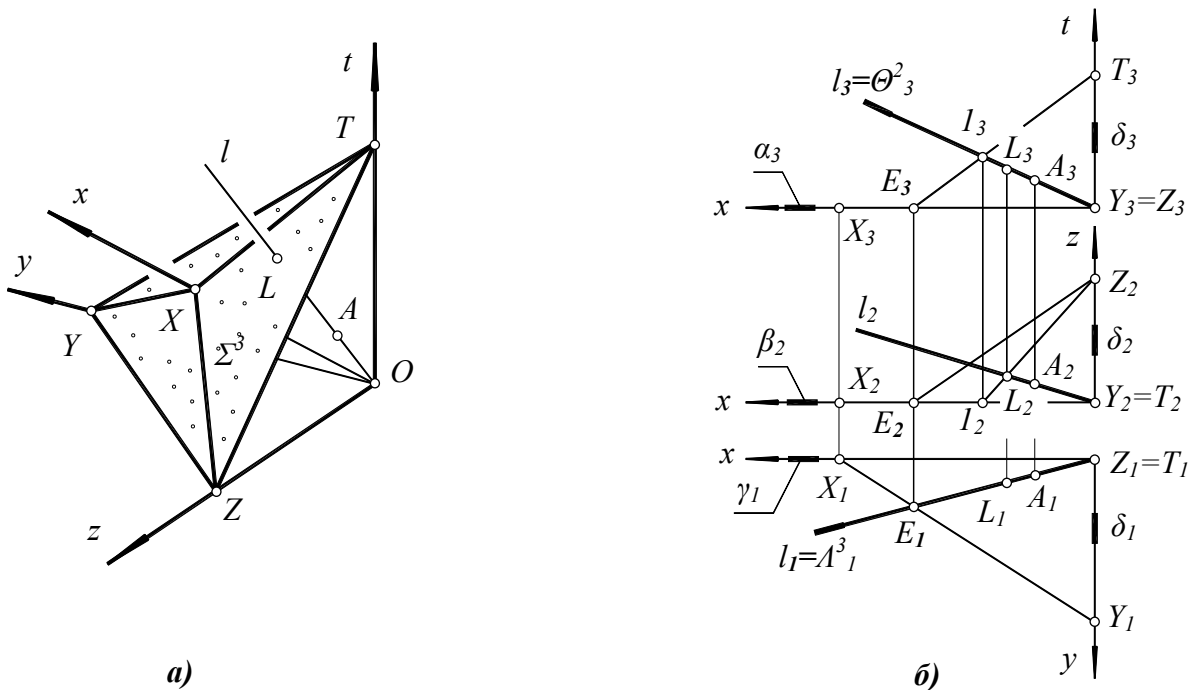


Рис. 15.26

Поясним последнее утверждение, обратившись к аналогии с пространством трех измерений. Очевидно, в E^3 бесполезно сооружать клетку из прямых линий (прутьев). Точка свободно преодолет такое препятствие, поскольку траектория точки и любой прут клетки в общем случае не пересекаются (скрещиваются). Аналогично, траектория точки пространства E^4 в общем случае не пересекается (скрещивается) с любой плоскостью, вложенной в это пространство.

Простейшая клетка одномерного пространства – две точки (две 0 -плоскости), исполняющие роль стенок клетки. Простейшая клетка двумерного пространства – треугольник. В этом случае клетка образована тремя прямыми (три 1 -плоскости). В трехмерном пространстве элементарная клетка – четырехгранник, грани которого – четыре обычные плоскости (четыре 2 -плоскости). Три грани могут быть совмещены с плоскостями проекций Π_1, Π_2, Π_3 , а четвертая должна занимать общее положение.

Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что в четырехмерном пространстве простейшей клеткой служит “гиперпятигранник”, грани которого – пять гиперплоскостей (пять 3 -плоскостей). Четыре грани могут быть совмещены с гиперплоскостями проекций $\alpha^3=xyz, \beta^3=xyt, \gamma^3=xzt, \delta^3=yzt$. В этом случае пятая грань должна быть гиперплоскостью общего положения $\Sigma^3(XYZT)$, где X, Y, Z, T – точки пересечения Σ^3 с координатными осями (рис. 15.26, а).

Точка A пространства E^4 может находиться либо вне, либо внутри рассматриваемой гиперклетки. Проведем через начало координат O и точку A прямую l , которая пересекается с гранью Σ^3 в некоторой точке L . Все точки, находящиеся на отрезке OL (в том числе точка A), заключены в гиперклетку. Извлечь их оттуда, не пересекая ни одну из пяти гиперграней, не удастся.

Задача. Пусть на обобщенном чертеже задана гиперклетка пространства E^4 , образованная четырьмя гиперплоскостями проекций $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ и гиперплоскостью общего положения Σ^3 , пересекающейся с осями координат в точках X, Y, Z, T . Требуется определить, находится данная точка A внутри или снаружи гиперклетки (рис. 15.26, б).

Из начала координат проводим через точку A прямую l , которая пересекается с Σ^3 в некоторой точке L . Для построения точки L используем способ “понижения размерности”: вводим в рассмотрение проходящую через l вспомогательную проектирующую гиперплоскость A^3 (см. п. 15.5.2). Гиперплоскости Σ^3 и A^3 пересекаются по плоскости $\Delta^2(EZT)$. Прямая l и плоскость Δ^2 , “погруженные” в общую гиперплоскость A^3 , пересекаются в искомой точке L . Чтобы отметить эту точку, проведем через l обычную плоскость Θ^2 , пересекающую плоскость $\Delta^2(EZT)$ по линии $l-Z$. На пересечении прямых l и $l-Z$ отмечаем точку L . Точка A находится между точками O и L , следовательно, она заключена внутри гиперклетки.

15.6.2. Гиперкуб

Чтобы на плоскости начертить квадрат, надо провести прямые x', y' , параллельные осям x, y декартовой системы координат (на равных расстояниях от осей). При этом две стороны квадрата будут совмещены с осями координат.

Чтобы в трехмерном пространстве начертить куб, проводим три плоскости, параллельные координатным плоскостям $\Pi_1=xy, \Pi_2=xz, \Pi_3=yz$ (на равных расстояниях от плоскостей проекций). Три грани куба при этом совмещены с плоскостями проекций.

Аналогичным образом, чтобы в четырехмерном пространстве начертить гиперкуб, проводим четыре гиперплоскости $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, параллельные гиперплоскостям проекций $\alpha=xyz, \beta=xyt, \gamma=xzt, \delta=yzt$ (на равных расстояниях от гиперплоскостей проекций). Гиперкуб имеет восемь попарно параллельных трехмерных граней, четыре из которых, в соответствии с рассмотренной конструктивной моделью, совмещены с гиперплоскостями проекций. Каждая пара граней перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, поэтому на обобщенном чертеже проекции гиперграней выражаются в прямые линии (рис. 15.27). Точка A заключена внутри гиперкуба.

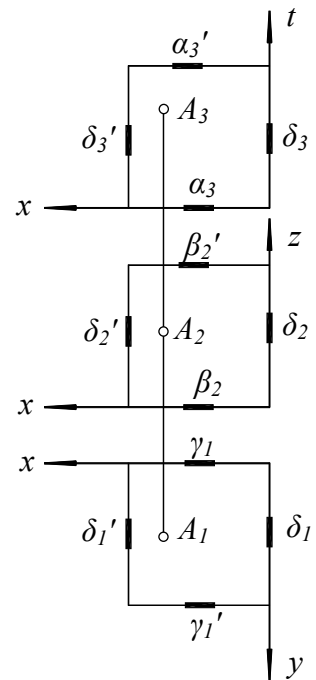


Рис. 15.27

15.6.3. Гиперсвязка

Множество прямых, проходящих через данную точку O трехмерного пространства, называют *связкой прямых* с центром O . Возьмем в расширенном евклидовом пространстве E^3 произвольную плоскость Δ^2 , не проходящую через точку O . Между точками плоскости Δ^2 и лучами связки устанавливается взаимно однозначное проекционное соответствие. На плоскости имеется ∞^2 точек, следовательно, связка в пространстве E^3 — двухпараметрическое множество прямых.

Определение. Множество прямых, проходящих через точку O четырехмерного пространства, называют гиперсвязкой с центром O .

В четырехмерном пространстве существует взаимно однозначное проекционное соответствие между лучами гиперсвязки и точками гиперплоскости общего положения, поэтому в гиперсвязке имеется ∞^3 прямых (столько же, сколько точек на гиперплоскости). С помощью лучей гиперсвязки можно осуществить центральное проецирование точек пространства E^4 на какую-либо “картинную гиперплоскость” Σ^3 , не проходящую через центр гиперсвязки (отобразить пространство E^4 на пространство E^3).

Вопросы для повторения

1. Дать определение понятию “размерность пространства”.
2. Сколько проекций должен содержать обратимый чертеж геометрической фигуры четырехмерного пространства?
3. Прямая линия содержит ∞^1 точек. Сколько точек содержится в гиперплоскости четырехмерного пространства?
4. Пересекаются ли в четырехмерном пространстве прямая линия и 2-плоскость общего положения?
5. В каком случае гиперплоскость четырехмерного пространства изображается на чертеже прямой линией?
6. Сколько перпендикуляров к плоскости проекций Π_1 можно провести через какую-нибудь точку этой плоскости? Сколько перпендикуляров к плоскости Π_1 можно провести через произвольно взятую точку четырехмерного пространства?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Монж, Г. Начертательная геометрия: учебник / Г. Монж. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – 291 с.
2. Рынин, Н.А. Начертательная геометрия: учебник / Н.А. Рынин. – М.: Госстройиздат, 1939. – 447 с.
3. Курс начертательной геометрии: учебник / Н.Ф. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова и др.; под ред. Н.Ф. Четверухина. – М.: Высшая школа, 1963. – 420 с.
4. Бубенников, А.В. Начертательная геометрия: учебник / А.В. Бубенников. – М.: Высшая школа, 1985. – 288 с.
5. Фролов, С.А. Начертательная геометрия: учебник / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.
6. Иванов, Г.С. Начертательная геометрия: учебник / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.
7. Иванов, Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии: учебное пособие / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1998. – 158 с.
8. Соболев, Н.А. Общая теория изображений: учебное пособие / Н.А. Соболев. – М.: Архитектура, 2004. – 671 с.
9. Пеклич, В.А. Начертательная геометрия: учебное пособие / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 2007. – 267 с.
10. Пеклич, В.А. Упражнения и задачи по начертательной геометрии: учебное пособие / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 2007. – 230 с.
11. Курс начертательной геометрии на основе геометрического моделирования: учебник / В.Я. Волков, В.Ю. Юрков, К.Л. Панчук, Н.В. Кайгородцева. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2010. – 253 с.
12. Сборник задач и упражнений по начертательной геометрии: учебное пособие / В.Я. Волков, В.Ю. Юрков, К.Л. Панчук, Н.В. Кайгородцева. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2010. – 74 с.
13. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Д. Кадомцев и др. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 255 с.
14. Фокс, А., Пратт М. Вычислительная геометрия: монография / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
15. Короткий, В.А. Метрические свойства линейчатых поверхностей второго порядка: учебное пособие / В.А. Короткий. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2001. – 70 с.
16. Программа для ЭВМ “Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых” / В.А. Короткий, правообладатель ГОУ ВПО “ЮУрГУ”, свидетельство о гос. регистрации № 2011611961 от 04.03.2011 г.